Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Гайфуллин, П. В. Ягодовский, Об интегрируемости m -значных динамик при помощи однопорожденных m -значных групп, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 1, 201–202

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm5586>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 18:07:57

Об интегрируемости m -значных динамик при помощи однопорожденных m -значных групп

А. А. Гайфуллин, П. В. Ягодовский

В настоящей заметке доказывается достаточный признак интегрируемости многозначной динамики при помощи многозначной группы. Интегрируемость многозначной динамики понимается в смысле [1].

Пусть S – конечное множество, $(S)^m$ – его m -я симметрическая степень; m -значной динамикой с дискретным временем на множестве S называется отображение $T: S \rightarrow (S)^m$. Графом динамики T называется граф с ориентированными ребрами на множестве вершин S такой, что из вершины s в вершину s' ведет столько ребер, какова кратность вхождения вершины s' в мультимножество $T(s)$. Из каждой вершины этого графа выходит ровно m ребер, а число ребер, входящих в вершину s , равно числу прообразов элемента s при динамике T с учетом кратностей. Для каждого натурального числа k динамика T задает естественным образом km -значную динамику на том же множестве S .

Говорят, что множество A несет на себе структуру m -значной группы, если заданы единица $e \in A$ и умножение $\mu: A \times A \rightarrow (A)^m$, удовлетворяющие естественным обобщениям аксиом ассоциативной группы. (Подробнее см. [1]–[3]. Понятие m -значной группы было введено В. М. Бухштабером в начале 1990-х годов.) В частности, для каждого элемента $a \in A$ должен существовать хотя бы один обратный ему элемент b , т.е. такой, что $e \in \mu(a, b)$ и $e \in \mu(b, a)$. Говорят, что многозначная группа порождена элементом a_1 , если в степенях элемента a_1 встречаются все элементы группы; такие группы называются однопорожденными. Образующий a_1 называется эрмитовым, если он является обратным самому себе. Для любой (обычной) группы G и ее подгруппы H на множестве двойных смежных классов $H \backslash G / H$ существует структура многозначной бикосетной группы с умножением $\mu(Hg_1H, Hg_2H) = [Hg_1hg_2H, h \in H]$.

Действием m -значной группы A на множестве S называется отображение $\nu: A \times S \rightarrow (S)^m$ такое, что мультимножества $\nu(a_1, \nu(a_2, s))$ и $\nu(\mu(a_1, a_2), s)$ совпадают для любых $a_1, a_2 \in A$, $s \in S$ и $\nu(e, s) = [s, s, \dots, s]$. Согласно [1], динамика T на множестве S называется интегрируемой при помощи однопорожденной многозначной группы A с образующим a_1 , если существует действие ν группы A на S такое, что мультимножества $T(s)$ и $\nu(a_1, s)$ совпадают для любого $s \in S$.

В [4] для широкого класса многозначных динамик, а именно, для динамик, задаваемых однородными графами (см. ниже), было доказано, что некоторые кратные им динамики интегрируемы, и поставлена задача о характеристизации динамик, интегрируемых без перехода к кратным. В настоящей статье мы решаем эту задачу, доказывая достаточный признак интегрируемости многозначных динамик, который, в частности, обеспечивает интегрируемость всех динамик, задаваемых однородными графами. Доказательство основано на конструкции, являющейся обобщением конструкции работы [4].

ТЕОРЕМА 1 (достаточный признак интегрируемости). Пусть m -значная динамика T на множестве S такова, что каждый элемент $s \in S$ имеет с учетом кратностей ровно m прообразов. Тогда динамика T интегрируема при помощи некоторой бикосетной однопорожденной m -значной группы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим граф динамики T ; пусть E – множество его ребер. Для каждой вершины s обозначим через $E_{s,-}$ множество ребер, выходящих из вершины s , и через $E_{s,+}$ множество ребер, входящих в вершину s . Тогда $|E_{s,-}| = |E_{s,+}| = m$. Пусть γ – множество из m элементов, H – какая-либо транзитивная группа перестановок его элементов. Для каждой вершины s выберем произвольным образом картирующие биекции $\psi_{s,\pm}: \gamma \rightarrow E_{s,\pm}$. Биекции $\psi_{s,-}$ позволяют определить действие

группы H на множестве E : если $\varepsilon \in E_{s,-}$, то $h(\varepsilon) = \psi_{s,-}(h(\psi_{s,-}^{-1}(\varepsilon)))$. Таким образом, можно считать группу H подгруппой группы перестановок множества E . Отображение, ставящее в соответствие каждому ребру его начало, задает отождествление $E/H = S$. Положим $t(\varepsilon) = \psi_{s,-}(\psi_{s,+}^{-1}(\varepsilon))$, если $\varepsilon \in E_{s,+}$. Тогда t – перестановка множества E . Обозначим через G подгруппу группы перестановок множества E , порожденную подгруппой H и перестановкой t . Многозначная бикосетная группа $A = H \backslash G/H$ естественно действует на множестве $S = E/H$, причем динамика, задаваемая ее образующим HtH , кратна динамике T с коэффициентом $\frac{|H|}{m}$. Группа A будет интегрировать динамику T , например, если в качестве H взять группу $\mathbb{Z}_m$, действующую на множестве γ циклическими перестановками. Теорема 1 доказана.

Пусть Γ – обобщенный однородный граф, т.е. граф с неориентированными (возможно, кратными) ребрами и ориентированными (возможно, кратными) петлями, все вершины которого имеют степень m . Определим на множестве его вершин динамику T , переводящую вершину в мультимножество ее соседей. Граф этой динамики может быть получен из Γ заменой каждого ребра на пару ребер, имеющих противоположные ориентации. Определим картирующие биекции так, чтобы перестановка t меняла местами ребра каждой такой пары, а петли оставляла неподвижными. Тогда $t^2 = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Естественная многозначная динамика на множестве вершин обобщенного однородного графа интегрируема при помощи некоторой бикосетной однопорожжденной многозначной группы с эрмитовым образующим.

Интегрируемость динамики, кратной динамике T , в случае, когда Γ – симметрический граф без петель и кратных ребер, была доказана в серии работ [5], [2], [3]. Интегрирующая группа имела вид $H \backslash G_{\Gamma} / H_{\Gamma}$, где G_{Γ} – группа автоморфизмов графа Γ , действующая транзитивно на его вершинах и его ребрах, $H_{\Gamma} \subset G_{\Gamma}$ – стабилизатор некоторой вершины. Конструкция из [5], [2], [3] и конструкция из настоящей заметки приводят, вообще говоря, к различным многозначным группам, поскольку введение картирующих биекций нарушает симметрию графа. Подчеркнем, что построенная в доказательстве теоремы 1 группа A зависит не только от выбора группы H , но и от выбора картирующих биекций. Например, для полного графа на 4 вершинах при $H = \mathbb{Z}_3$ существует ровно 3 принципиально различных способа выбора картирующих биекций. В результате мы получаем трехзначные группы, интегрирующие соответствующую динамику, порядков 2, 12 и 38. Первая из этих групп может быть построена и с помощью конструкции из работ [5], [2], [3].

В завершение авторы хотят выразить свою глубокую благодарность профессору В. М. Бухштаберу за помощь и поддержку в работе.

Список литературы

- [1] V. Buchstaber, *Mosc. Math. J.*, **6**:1 (2006), 57–84. [2] П. В. Ягодковский, *Записки науч. сем. ПОМИ*, **292** (2002), 161–174. [3] П. В. Ягодковский, *Записки науч. сем. ПОМИ*, **325** (2005), 225–242. [4] В. М. Бухштабер, А. А. Гайфуллин, *УМН*, **61**:3 (2006), 171–172. [5] П. В. Ягодковский, *УМН*, **57**:1 (2002), 143–144.

А. А. Гайфуллин (A. A. Gaifullin)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: gaifull@mccme.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
17.11.2006

П. В. Ягодковский (P. V. Yagodovskii)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Финансовая академия при Правительстве РФ
E-mail: korcsak@list.ru