Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Всемирнов, М. Г. Ржевский, Верхняя оценка контактного числа в размерности 9, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 5, 149–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm559>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 13:57:08

ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА КОНТАКТНОГО ЧИСЛА В РАЗМЕРНОСТИ 9

М. А. ВСЕМИРНОВ, М. Г. РЖЕВСКИЙ

Контактным числом τ_d евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ называют максимальное число шаров единичного радиуса с непересекающимися внутренностями, касающихся одного такого же шара. Эквивалентным образом, τ_d есть максимальная мощность 1/2-сферического кода, т.е. такого набора точек на единичной сфере S^{d-1} , в котором для любых двух различных точек x и y имеем $\langle x, y \rangle \leq 1/2$. Здесь $\langle x, y \rangle$ — обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$. Задача нахождения точного значения τ_d очень сложна. В настоящий момент она решена лишь для размерностей $d = 2, 3, 8, 24$; в остальных случаях известны лишь двусторонние оценки на размер контактного числа, см. [1], [2]. Более того, даже незначительное улучшение этих оценок требует привлечения больших усилий. Так, в [3] получены оценки $\tau_{19} \leq 25900$, $\tau_{21} \leq 56851$ и $\tau_{23} \leq 128095$, которые лишь на 1 уменьшают соответствующие оценки из [1], [2]. В остальных размерностях $d \leq 24$ лучшими на настоящий момент оставались оценки из [1], [2]. Например, в [2] показано, что $\tau_9 \leq 380$. С другой стороны, известно (см. [1]), что $\tau_9 \geq 306$.

В настоящей заметке мы устанавливаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. $\tau_9 \leq 379$.

Общая схема доказательства следует работам [1], [2], [4] и основана на сведениях к задаче линейного программирования. При этом используются дополнительные неравенства, возникающие из естественных геометрических ограничений.

Пусть C — 1/2-сферический код в $\mathbb{R}^d$. Через $\alpha(t)$ обозначим функцию распределения кода C , т.е.

$$\alpha(t) = \frac{\#\{\langle x, y \rangle \in C^2 : \langle x, y \rangle = t\}}{\#C}.$$

Пусть $\Phi_{k,d}(t) = P_k^{((d-3)/2, (d-3)/2)}(t)$ — (ультрасферические) многочлены Якоби, нормализованные условием $P_k^{((d-3)/2, (d-3)/2)}(1) = 1$. Хорошо известно (см., например, [1], [4]), что имеют место следующие неравенства:

$$\sum_{-1 \leq t \leq 1/2} \alpha(t) \Phi_{k,d}(t) \geq -1 \quad \text{для всех } k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Пусть $x_1, \dots, x_{m+1}, z \in C$. Так как $\langle x_i, x_j \rangle \leq 1/2$ при $i \neq j$ и $\langle x_i, x_i \rangle = \langle z, z \rangle = 1$, то

$$m+1 + \frac{m(m+1)}{2} \geq \sum_{i,j} \langle x_i, x_j \rangle = \left(\sum_{i=1}^{m+1} x_i, \sum_{i=1}^{m+1} x_i \right) \geq \left(\sum_{i=1}^{m+1} x_i, z \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{m+1} \langle x_i, z \rangle \right)^2.$$

В частности, если $\langle x_i, z \rangle < 0$ для всех $i = 1, \dots, m+1$, то

$$\max_{i=1, \dots, m+1} \langle x_i, z \rangle \geq t_m, \quad \text{где } t_m = -\sqrt{\frac{m+2}{2m+2}}.$$

Таким образом, для всех $m = 1, 2, \dots$ имеют место следующие неравенства:

$$\sum_{-1 \leq t < t_m} \alpha(t) \leq m. \quad (2)$$

Работа выполнена при частичной поддержке Cariplo Foundation (Italy) и гранта 001 6-го конкурса-экспертизы научных проектов молодых ученых РАН.

Пусть, кроме того, $r_2 = -1/2 - 1/\sqrt{6}$. Нетрудно проверить, что если $x, z \in C$ и $(x, z) \leq r_2$, то не существует такого вектора $y \in C$ ($y \neq x$), что $(y, z) < t_2$. Это дает неравенство

$$2 \sum_{-1 \leq t \leq r_2} \alpha(t) + \sum_{r_2 < t < t_2} \alpha(t) \leq 2. \quad (3)$$

Зафиксируем N и рассмотрим задачу нахождения супремума (на самом деле, максимума) τ_d^* функционала $1 + \sum_{t \leq 1/2} \alpha(t)$ при условиях $\alpha(t) \geq 0$ для всех $t \in [-1, 1/2]$ и неравенствах (1) для $k = 1, \dots, N$, (2) для $m = 1$ и (3). Ясно, что $\tau_d \leq \tau_d^*$. Перейдем к двойственной задаче. Учитывая, что τ_d^* не превосходит любого допустимого решения двойственной задачи, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть числа $f_1, \dots, f_{N+2}$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} f_i &\geq 0 \quad \text{для всех } i = 1, \dots, N+2, \\ \sum_{k=1}^N f_k \Phi_{k,d}(t) - f_{N+1} - 2f_{N+2} &\leq -1 \quad \text{для всех } t \in [-1, -1/2 - 1/\sqrt{6}], \\ \sum_{k=1}^N f_k \Phi_{k,d}(t) - f_{N+1} - f_{N+2} &\leq -1 \quad \text{для всех } t \in (-1/2 - 1/\sqrt{6}, -\sqrt{3}/2), \\ \sum_{k=1}^N f_k \Phi_{k,d}(t) - f_{N+2} &\leq -1 \quad \text{для всех } t \in [-\sqrt{3}/2, -\sqrt{2/3}), \\ \sum_{k=1}^N f_k \Phi_{k,d}(t) &\leq -1 \quad \text{для всех } t \in [-\sqrt{2/3}, 1/2]. \end{aligned}$$

Тогда

$$\tau_d \leq 1 + \sum_{k=1}^N f_k + f_{N+1} + 2f_{N+2}.$$

В теореме 2 возьмем $d = 9$, $N = 11$, $f_1 = 7.42800555$, $f_2 = 26.33181283$, $f_3 = 58.58939087$, $f_4 = 89.15779666$, $f_5 = 94.043798$, $f_6 = 65.60173825$, $f_7 = 23.05455021$, $f_8 = f_9 = 0$, $f_{10} = 7.69458782$, $f_{11} = 6.41689233$, $f_{12} = 0.24656738$, $f_{13} = 0.19223383$. Получим $\tau_9 \leq 379.95$. Учитывая, что контактное число целое, имеем $\tau_9 \leq 379$, что доказывает теорему 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. Конвей, Н. Слоэн. Упаковки шаров, решетки и группы. М.: Мир, 1990.
- [2] A. M. Odlyzko, N. J. A. Sloane // J. Combin. Theory Ser. A. 1979. V. 26. P. 210–214.
- [3] P. G. Boyvalenkov // Atti. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. 1994. V. 42. №1. P. 159–163.
- [4] Г. А. Кабатянский, В. И. Левенштейн // Проблемы передачи информации. 1978. Т. 14. №1. С. 3–25.

Принято редколлегией
21.08.2002