Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Груйич, Роды Хирцебруха факторпространств по действию конечных групп и χ_y -характеристика симметрических степеней поверхностей, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 5, 151–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm560>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 02:30:05

**РОДЫ ХИРЦЕБРУХА ФАКТОРПРОСТРАНСТВ ПО ДЕЙСТВИЮ
КОНЕЧНЫХ ГРУПП И χ_y -ХАРАКТЕРИСТИКА
СИММЕТРИЧЕСКИХ СТЕПЕНЕЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

В. Груйич

В статье рассматривается подход к определению родов Хирцебруха факторпространств многообразий по действию конечных групп через усреднения по эквивариантным родам. В качестве приложения мы получаем явные формулы в случае χ_y -характеристики симметрических степеней поверхностей.

Пусть $\varphi: \Omega_*^U \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow R$ – род Хирцебруха и $\{\mathcal{E}\}: \Gamma(E_0) \xrightarrow{D_0} \Gamma(E_1) \xrightarrow{D_1} \dots \xrightarrow{D_{q-1}} \Gamma(E_q)$ – эллиптический комплекс, ассоциированный с касательным расслоением замкнутого, ориентированного многообразия M^{2n} , такой, что $\text{ind}(\mathcal{E}) = \varphi[M]$. Из теоремы Атьи–Зингера об индексе [1], [2] следует, что

$$\text{ind}(\mathcal{E}) = \left(\left(\sum_{i=0}^q (-1)^i \text{ch}(E_i) \right) \prod_{j=1}^n \left(\frac{x_j}{1 - e^{-x_j}} \cdot \frac{1}{1 - e^{x_j}} \right) \right) [M]. \quad (1)$$

Если на комплексном многообразии M голоморфно действует группа G так, что индуцированное действие на комплексе $\{\mathcal{E}\}$ согласовано с операторами D_i , то определен эквивариантный φ -род $\varphi(g, M) = \text{ind}(g, M) = \sum_{j=0}^q (-1)^j \text{tr } g_*|_{H^j(\mathcal{E})}$.

Пусть $Y = M_\nu^g$ – одно из неподвижных подмногообразий действия g . Касательное расслоение $TM|_Y$ разлагается в прямую сумму $TM|_Y = \bigoplus_\lambda N_\lambda$ собственных подрасслоений N_λ ранга d_λ , где $N_1 = TY$. Тогда для полного класса Чженя имеем

$$c(TM|_Y) = \prod_\lambda \prod_{j=1}^{d_\lambda} (1 + x_j^{(\lambda)}) = \prod_{j=1}^n (1 + x_j),$$

т.е. каждый класс x_j принадлежит некоторому подрасслоению N_λ . Из эквивариантной теоремы Атьи–Зингера об индексе ([1], [2]) вытекает, что вклад $a(Y)$ компоненты Y в эквивариантный φ -род можно вычислить, заменяя в (1) M на Y , e^{x_j} на $\lambda^{-1}e^{x_j}$ и e^{-x_j} на λe^{-x_j} , если класс x_j соответствует подрасслоению N_λ . Окончательно, $\varphi(g, M) = \sum_\nu a(M_\nu^g)$.

Опираясь на известные формулы для эйлеровой характеристики и сигнатуры [3], мы вводим φ -род факторпространства как

$$\varphi(M/G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g, M).$$

Рассмотрим φ -род симметрической степени $SP^n(M)$:

$$\varphi(SP^n(M)) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \varphi(\sigma, M^n) = \sum_{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n} \frac{\prod_{r=1}^n \varphi(\omega_r, M^r)^{\alpha_r}}{1^{\alpha_1} \dots n^{\alpha_n} \alpha_1! \dots \alpha_n!}.$$

Здесь ω_r обозначает циклическое действие на M^r . Положим $\tau_r = \varphi(\omega_r, M^r)$, тогда

$$\varphi(SP^n(M)) = Z(S_n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n),$$

где Z – циклический индекс симметрической группы [4]. Отсюда получаем порождающую функцию для φ -рода симметрической степени:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(SP^n(M)) t^n = \exp \left(\sum_{r=1}^{\infty} \tau_r \frac{t^r}{r} \right).$$

Неподвижное подмногообразие для циклического действия есть диагональ $(M^r)^{\omega_r} = \Delta \cong M$, и собственные подрасслоения соответствуют собственным значениям $e^{i\lambda_k}$, $\lambda_k = 2\pi k/r$:

$$T(M^r)|_{\Delta} = \bigoplus_{k=0}^{r-1} N_{e^{i\lambda_k}} \cong rTM.$$

Так как $N_{e^{i\lambda_k}} \cong TM$, каждый класс $x_i^{(e^{i\lambda_k})}$ соответствует некоторому классу x_i многообразия M , откуда $c(T(M^r)|_{\Delta}) = \prod_{j=1}^n (1 + x_j)^r$.

Применяя теорему Атьи–Зингера к комплексам Дольбо (p, q) -форм, получаем классическую формулу [2]:

$$\chi_y(M) = \left(\prod_{j=1}^n x_j \frac{1 + ye^{-x_j}}{1 - e^{-x_j}} \right) [M].$$

Из эквивариантной теоремы Атьи–Зингера вытекает

$$\tau_r = \left(\prod_{j=1}^n \left(x_j \frac{1 + ye^{-x_j}}{1 - e^{-x_j}} \prod_{k=1}^{r-1} \frac{1 + ye^{i\lambda_k - x_j}}{1 - e^{i\lambda_k - x_j}} \right) \right) [M].$$

В случае, когда $M = S_g$ – комплексная кривая рода g , имеем

$$\begin{aligned} \chi_y(\omega_r, S_g^r) &= \left(x \cdot \frac{1 + ye^{-x}}{1 - e^{-x}} \cdot \frac{1 + ye^{i\lambda_1 - x}}{1 - e^{i\lambda_1 - x}} \cdots \frac{1 + ye^{i\lambda_{r-1} - x}}{1 - e^{i\lambda_{r-1} - x}} \right) [S_g] \\ &= (2 - 2g) \left(\frac{1 - y}{2} \prod_{j=1}^{r-1} \frac{1 + ye^{i\lambda_j}}{1 - e^{i\lambda_j}} - (1 + y) \sum_{j=1}^{r-1} \left(\frac{(1 + y)e^{i\lambda_j}}{(1 - e^{i\lambda_j})^2} \prod_{i \neq j} \frac{1 + ye^{i\lambda_i}}{1 - e^{i\lambda_i}} \right) \right) \\ &= (2 - 2g) \frac{1 - (-y)^r}{r(1 + y)} \left(\frac{1 - y}{2} - (1 + y) \left(\frac{r-1}{2} + \frac{1}{1 + y} - \frac{r}{1 - (-y)^r} \right) \right), \end{aligned}$$

откуда $\chi_y(\omega_r, S_g^r) = (1 - g)(1 + (-y)^r)$. Таким образом, имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА. *Порождающая функция для χ_y -характеристики симметрических степеней поверхностей есть*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_y(SP^n(S_g)) t^n = \exp \left((1 - g) \sum_{r=1}^{\infty} (1 + (-y)^r) \frac{t^r}{r} \right) = ((1 - t)(1 + yt))^{g-1}.$$

В случае кривой рода $g = 0$ имеем $SP^n(\mathbb{CP}^1) = \mathbb{CP}^n$, откуда получаем хорошо известный результат

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_y(\mathbb{CP}^n) t^n = \frac{1}{(1 - t)(1 + yt)}.$$

При значениях $y = -1, 0, 1$ получаем порождающие функции для эйлеровой характеристики, рода Тодда и сигнатуры [3], [5]–[7]. Автор выражает благодарность к.ф.-м.н. Т. Панову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. F. Atiyah, I. M. Singer // Ann. of Math. (2). 1968. V. 87. P. 546–604. [2] F. Hirzebruch, T. Berger, R. Jung. Manifolds and Modular Forms. Bonn: Max-Planck-Institut, 1994. [3] D. B. Zagier. Equivariant Pontrjagin Classes and Application to Orbit Spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1972. (Lecture Notes in Math. V. 290.) [4] R. Stanley. Enumerative Combinatorics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. (Stud. Adv. Math. № 49.) [5] F. Hirzebruch. Lectures on the Atiyah–Singer Theorem and its Application. Unpublished lecture notes. Berkeley, 1968. [6] I. G. McDonald // Topology. 1962. V. 1. P. 319–343. [7] P. Blagojević, V. Grujić, R. Živaljević. Combinatorics of symmetric powers of surfaces (to appear).