Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Иншаков, Поверхности с дефектными многообразиями оскулирующих порядка 2, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 5, 153–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm561>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 15:35:12

ПОВЕРХНОСТИ С ДЕФЕКТНЫМИ МНОГООБРАЗИЯМИ ОСКУЛИРУЮЩИХ ПОРЯДКА 2

А. В. Иншаков

В работе рассматриваются комплексные проективные поверхности и описываются условия, при которых пространство секущих многообразия оскулирующих порядка 2 к ним имеет размерность меньше ожидаемой.

Если $L \subset \mathbb{P}^N$ – линейное подпространство, то $\text{Cone}_L(Y)$ – конус с вершиной в L над многообразием Y , $\pi_L: \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^{N-\dim L-1}$ – проекция из L . Кроме того, $v_n: \mathbb{P}^l \rightarrow \mathbb{P}^{\binom{l+n}{n}-1}$ – отображение Веронезе, задаваемое всеми мономами степени n .

Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ – невырожденное (т.е. не лежащее ни в какой гиперплоскости) проективное многообразие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многообразие $S^h(X) = \overline{\bigcup_{x_0, \dots, x_h \in X, x_i \neq x_j \text{ при } i \neq j} \langle x_0, \dots, x_h \rangle}$ называется h -м многообразием секущих многообразия X .

Простой подсчет размерностей показывает, что если N достаточно велико, то ожидаемая размерность для $S^h(X)$ есть $\dim X \cdot (h+1) + h$. Откуда для произвольного N ожидаемая размерность многообразия $S^h(X)$ есть $\min\{N, \dim X \cdot (h+1) + h\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число $\delta_h(X) = \min\{N, \dim X(h+1) + h\} - \dim S^h(X)$ называется h -м дефектом многообразия $X \subset \mathbb{P}^N$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $x \in X$ – общая точка, $\dim X = n$ и $F: U_0 \rightarrow X$, $F(0) = x$, – локальная параметризация ($U_0 \subset \mathbb{C}^n$ – некоторая окрестность 0; u_i ($1 \leq i \leq n$) – координаты в $\mathbb{C}^n$). Тогда линейное подпространство $T_x^k X = \langle F(0), F_{u_1}(0), \dots, F_{u_n}(0), \dots, \underbrace{F_{u_1 \dots u_1 u_1}}_k(0), \dots,$

$\underbrace{F_{u_1 \dots u_1 u_n}}_k(0), \dots, \underbrace{F_{u_n \dots u_n}}_k(0) \rangle \subset \mathbb{P}^N$ называется оскулирующим порядком k в точке x .

Многообразие $T^k X = \bigcup_{x \in X} T_x^k X \subset \mathbb{P}^N$ (объединение берется по общим точкам $x \in X$) называется многообразием оскулирующих порядка k к X .

Более строгие определения и свойства оскулирующих см. в [1]. Приведем некоторые примеры поверхностей с дефектными многообразиями оскулирующих.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. 1) Если $X \subset \mathbb{P}^N$ – невырожденная поверхность, лежащая в конусе $\text{Cone}_L(T^a C)$, где C – (невырожденная) кривая, $\dim L \leq (h+1)(\dim_k X - a - k) + h - 1$, $N \geq \dim L + (h+1)(a+k+2) + 1$, причем $\pi_L(X) \not\subset T^b K$ для любой кривой K и $b < a$ и $X \not\subset T^a K$ для любой кривой $K \subset \text{Cone}_L(C)$, то $\delta_h(T^k X) > 0$ и

$$\delta_h(T^k X) \geq \min\{(h+1)(\dim_k X - a - k) + h - \dim L_{\min}, \\ N - \dim L_{\min} - (h+1)(a+k+2)\}, \quad (*)$$

если $\dim L_{\min} \geq \dim_k X - a - k$;

$$\delta_h(T^k X) = \min\{h \cdot (\dim_k X - a - k), N - \dim L_{\min} - (h+1)(a+k+2)\},$$

если $\dim L_{\min} = \dim_k X - a - k - 1$,

где $L_{\min}$ – такое линейное подпространство минимально возможной размерности. При $k \leq 2$ в (*) верно равенство.

2) Если $X \subset \mathbb{P}^N$ – невырожденная поверхность, лежащая в конусе $\text{Cone}_L(v_{k+2}(\mathbb{P}^2))$, где $L \subset \mathbb{P}^N$ – (возможно, пустое) линейное подпространство, $\dim L \leq (k^2 - k - 2)/2$ ($N \leq k^2 + 3k + 5$), причем $\pi_L(X) = v_{k+2}(\mathbb{P}^2)$, то $\delta_1(T^k X) > 0$; если же $\dim L \leq 0$, то $\delta_1(T^k X) = 1$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00803) и фонда INTAS (грант № 00-259).

3) Если $l \subset \mathbb{P}^2$ – некоторая прямая, $p \in \mathbb{P}^2$ – точка, $p \notin l$, $Y = v_5(\mathbb{P}^2)$ – поверхность Веронезе, $L = T_{v_5(p)}^4 Y \cap \langle \bigcup_{x \in v_5(l)} T_x Y \rangle$ – линейное подпространство, а $X = \pi_L(Y) \subset \mathbb{P}^{15}$, то $\delta_1(T^2 X) = 1$.

4) Если $X \subset \mathbb{P}^N$ – невырожденная поверхность, лежащая в конусе $\text{Cone}_L(Y)$, где $L \subset \mathbb{P}^N$ – линейное подпространство (возможно, пустое), Y – поверхность, $\dim_2 Y = 4$, $\dim L \leq h - 1$, $\delta_h(T^2 Y) = 0$, $N \geq 7h + 8 + \dim L$ и $\dim_2 X = 5$, то $\delta_h(T^2 X) = \min\{N - 7h - 7 - \dim L_{\min}, h - \dim L_{\min}\} > 0$, где $L_{\min}$ – такое линейное подпространство минимально возможной размерности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для фиксированного k описанные в предложении 1 классы поверхностей (при различных a в п. 1)) не пересекаются.

ТЕОРЕМА 1. Если $X \subset \mathbb{P}^N$ – невырожденная поверхность, то $\delta_h(T^2 X) > 0$ тогда и только тогда, когда X – одна из поверхностей, описанных в предложении 1 (для $k = 2$).

В доказательстве основной теоремы 1 важную роль играет

ТЕОРЕМА 2. Если $\delta_h(T^2 X) > 0$, то выполняется одно из следующих условий:

- 1) для общих точек $x_0, \dots, x_h \in X$, $p_0, \dots, p_h \in T^2 X$, $p_i \in T_{x_i}^2 X$ ($0 \leq i \leq h$) и $q \in \langle p_0, \dots, p_h \rangle$ многообразие $K = \overline{\{y \in X \mid y \text{ – общая, } T_y^3 X \subset T_q S^h(T^2 X)\}} \subset X$ является кривой и $x_i \in K$ ($0 \leq i \leq h$)
(в частности, $T_q S^h(T^2 X) = \langle T_{p_0} T^2 X, \dots, T_{p_h} T^2 X \rangle = \langle T_{x_0}^3 X, \dots, T_{x_h}^3 X \rangle$);
- 2) $\dim_2 X = 5$ и найдется линейное подпространство $L \subset \mathbb{P}^N$, $\dim L \leq h - 1$, такое, что $\dim_2(\pi_L(X)) = 4$ и $\delta_h(T^2 \pi_L(X)) = 0$.

Пусть выполняется условие 1) теоремы 2. В случае $h = 1$ обозначим через $\mathcal{L}$ семейство неприводимых компонент кривых, получаемых при варьировании точек $x_0, x_1 \in X$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. $\dim \mathcal{L} \leq 2$. Если $\dim \mathcal{L} = 2$, то X – одна из поверхностей, описанных в предложении 1) в пп. 2 (для $k = 2$) и 3). Если $\dim \mathcal{L} = 1$, то X – одна из поверхностей, описанных в предложении 1 в п. 1) (для $k = 2$).

Для $h > 1$ воспользуемся индукцией по h .

ЛЕММА 1 (частный случай [1; предложение 1]). Предположим, что многообразие $Y \subset \mathbb{P}^N$ невырождено, $q \in Y$ – общая точка и π – проекция из $T_q Y$. Тогда если $\delta_1(Y) = 0$ и $S^1(Y) \neq \mathbb{P}^N$, то $\dim \pi(Y) = \dim Y$ и для любого $k \geq 1$ выполняется $\delta_k(\pi(Y)) = \delta_{k+1}(Y)$.

Таким образом, если $\delta_1(T^2 X) = 0$ и $\delta_h(T^2 X) > 0$, то для общей точки $p \in T^2 X$ имеем $\delta_{h-1}(T^2 \pi_{T_p} T^2 X(X)) > 0$. Следующие две леммы завершают шаг индукции.

ЛЕММА 2. Если $\delta_1(T^2 X) = 0$ и $\delta_h(T^2 X) > 0$, а $p \in T^2 X$ – общая точка, то поверхность $\pi_{T_p} T^2 X(X)$ не может быть ни одной из поверхностей, описанных в предложении 1 в пп. 2) (для $k = 2$) и 3).

ЛЕММА 3. Пусть X – невырожденная поверхность, $\delta_1(T^k X) = 0$, $h \geq 2$ и для общей точки $p \in T^k X$ выполняется условие $\pi_{T_p} T^k X(X) \subset \text{Cone}_L(T^a C) \subset \mathbb{P}^{N_1}$, причем $\dim L \leq h(\dim_k X - a - k) + h - 2$, $N_1 \geq \dim L + h(a + k + 2) + 1$. Тогда $X \subset \text{Cone}_M(T^a K) \subset \mathbb{P}^N$, где K – кривая, M – линейное подпространство размерности не выше $(h + 1)(\dim_k X - a - k) + h - 1$, $N \geq \dim M + (h + 1)(a + k + 2) + 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] A. Inshakov. Surfaces with defective tangential varieties // Matematiche (Catania) (to appear).

Принято редколлегией
21.08.2002