Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Ю. Кокарев, О компактности множества решений квазилинейно возмущенного уравнения гармонических отображений, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 5, 155–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm562>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 12:34:43

О КОМПАКТНОСТИ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Г. Ю. КОКАРЕВ

1. Основные обозначения. Пусть (M, g) и (M', g') – замкнутые римановы многообразия. Римановы метрики на M и M' естественным образом задают метрику в расслоении $J^1(M, M')$ над пространством $M \times M'$. Для отображений $u: M \rightarrow M'$ рассмотрим функционал энергии

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_M \|du(x)\|^2 d\text{Vol}_M(x).$$

Обозначим через $-\tau(u)$ оператор Эйлера–Лагранжа для функционала E . Решения уравнения $\tau(u) = 0$ класса C^2 называются гармоническими отображениями M в M' , а сам оператор $\tau(u)$ – оператором гармонических отображений.

Пусть $u: M \rightarrow M'$ принадлежит некоторому фиксированному гомотопическому классу отображений $[v]$. Рассмотрим на таких отображениях u квазилинейное эллиптическое дифференциальное уравнение, см. [1],

$$\tau(u)(x) = G(x, u(x)) \cdot du(x) + g(x, u(x)), \quad x \in M. \quad (1)$$

Здесь $G(x, u)$ обозначает морфизм векторных расслоений $J^1(M, M')$ и $(\Pi')^*TM'$, где $\Pi': M \times M' \rightarrow M'$ – естественная проекция, и $g(x, u)$ – неавтономное векторное поле на M' . Выберем некоторое целое $s \geq 2$. Ниже мы предполагаем, что $G(x, u)$ и $g(x, u)$ являются C^s -гладкими по $x \in M$ и $u \in M'$. Обозначим через $\mathcal{F}_G$ и $\mathcal{F}_g$ векторные пространства, образованные морфизмами $G(x, u)$ и векторными полями $g(x, u)$ соответственно. В силу свойства эллиптической регулярности любое C^2 -гладкое решение уравнения (1) с $G \in \mathcal{F}_G$ и $g \in \mathcal{F}_g$ является C^{s+1} -гладким.

Пусть $\mathcal{U}$ – некоторая область пространства $\mathcal{F}_G \times \mathcal{F}_g$. Рассмотрим пространство

$$\mathfrak{M}_{[v]} = \{(u, G, g) : u - \text{решение (1) класса } C^2, u \in [v] \text{ и } G \in \mathcal{F}_G, g \in \mathcal{F}_g\},$$

являющееся подпространством $C^{s+1}(M, M') \times \mathcal{F}_G \times \mathcal{F}_g$. Через π обозначается естественная проекция

$$\pi: \mathfrak{M}_{[v]} \rightarrow \mathcal{F}_G \times \mathcal{F}_g, \quad (u, G, g) \mapsto (G, g).$$

Напомним, что непрерывное отображение топологических пространств называется собственным, если прообраз любого компактного множества компактен. Ниже $\|G(x, u)\|$ обозначает естественную норму линейного оператора $G(x, u): \mathcal{L}(T_x M, T_u M') \rightarrow T_u M'$ относительно римановых метрик на M и M' . Основным результатом работы [2] является следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть M' – риманово многообразие неположительной секционной кривизны. Тогда для любого гомотопического класса $[v]$ отображений M в M' существует такая константа $C_{[v]} > 0$, что отображение $\pi|_{\pi^{-1}(\mathcal{U})}$, где

$$\mathcal{U} = \{(G, g) \in \mathcal{F}_G \times \mathcal{F}_g : \|G(x, u)\| < C_{[v]} \text{ для любых } x \in M, u \in M'\},$$

является собственным.

В частности, теорема 1 влечет компактность множества решений уравнения (1) гомотопического класса $[v]$ в C^{s+1} -топологии. В случае $\dim M \leq 3$ эта теорема доказана в [3]. Для замкнутых римановых многообразий M' отрицательной секционной кривизны, в силу результатов [4], константа $C_{[v]}$ в теореме 1 может быть выбрана независимо от гомотопического класса $[v]$.

Простые примеры, приведенные в [1], показывают, что свойство собственности проекции π теряется, если опустить одно из следующих предположений: квазилинейность правой части (1), малость линейной части G или неположительность секционной кривизны M' .

Доказательство теоремы 1 основано на априорной оценке нормы дифференциала решения уравнения (1). Ключевой частью для этого анализа является аналог неравенства монотонности. Кроме того, для доказательства ограниченности энергии на решениях (1) мы используем оценку энергии и версию неравенства Пуанкаре для отображений многообразий из [3].

2. Априорная оценка нормы дифференциала. Для неавтономного векторного поля g на M' и морфизма G векторных расслоений $J^1(M, M')$ и $(\Pi')^*TM'$ через $\|g\|_{C^0}$ и $\|G\|_{C^0}$ обозначаются нормы

$$\|g\|_{C^0} = \max_{\substack{x \in M \\ u \in M'}} \|g(x, u)\|_{g'}, \quad \|G\|_{C^0} = \max_{\substack{x \in M \\ u \in M'}} \|G(x, u)\|.$$

Аналогично, используя связности Леви-Чивита на M и M' , можно определить C^1 -нормы g и G . Пусть C_g и C_G – такие неотрицательные константы, что для G и g в уравнении (1) имеют место неравенства

$$\|g\|_{C^1} \leq C_g \quad \text{и} \quad \|G\|_{C^1} \leq C_G. \quad (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гармоническое отображение $v: \mathbb{R}^n \rightarrow M'$ ($n \geq 3$) называется n -препятствием для риманова многообразия M' , если $\|dv(x)\| \leq \|dv(0)\| \neq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и существует такая константа $E > 0$, что

$$R^{2-n} \int_{B_R} \|dv(x)\|^2 dx \leq E \quad \text{для любого} \quad R > 0,$$

где $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n = \dim M \geq 3$ и риманово многообразие M' не допускает n -препятствий. Тогда для любого $C_E > 0$ найдется такое $C > 0$, зависящее от констант C_E , C_g , C_G и геометрии многообразий M и M' , что для любого решения u задачи (1)–(2) с энергией $E(u) \leq C_E$ выполнено неравенство

$$\max_{x \in M} \|du(x)\| \leq C. \quad (3)$$

В случае $\dim M = 2$ оценка (3) имеет место, если предположить, что M' не допускает нетривиальных гармонических 2-сфер. Это утверждение следует из конформной инвариантности энергии и теоремы об устранении особенностей гармонических отображений [5] (см., например, доказательство теоремы 1 для случая $\dim M = 2$, приведенное в [1]).

ПРИМЕР. Пусть M' – риманово многообразие неположительной секционной кривизны. Тогда для любого $n \geq 3$ многообразие M' не допускает n -препятствий.

Автор признателен С. Б. Куксину за прочтение препринта [2] и критические замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Ю. Кокарев, С. Б. Куксин. Квазилинейные эллиптические дифференциальные уравнения на отображениях многообразий, 1 // Препринт. М.: МГУ, 2002. [2] Г. Ю. Кокарев. О компактности множества решений квазилинейно возмущенного уравнения гармонических отображений // Препринт. М.: МГУ, 2002. [3] Т. Kappeler, S. Kuksin, V. Schroeder. Perturbations of the harmonic map equation // Preprint. Zürich: Institute of Mathematics, University of Zürich, 2001. [4] Т. Kappeler, S. Kuksin, V. Schroeder. Poincaré inequality for maps into closed manifolds of negative sectional curvature // Preprint. Zürich: Institute of Mathematics, University of Zürich, 2002. [5] J. Sacks, K. Uhlenbeck // Ann. of Math. (2). 1981. V. 113. № 1. P. 1–24.