Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мохов, Интегрируемые бигамильтоновы иерархии, порождаемые согласованными метриками постоянной римановой кривизны, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 5, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm563>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 18:21:25

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ БИГАМИЛЬТОНОВЫ ИЕРАРХИИ, ПОРОЖДАЕМЫЕ СОГЛАСОВАННЫМИ МЕТРИКАМИ ПОСТОЯННОЙ РИМАНОВОЙ КРИВИЗНЫ

О. И. Мохов

Построены интегрируемые бигамильтоновы иерархии, порождаемые согласованными метриками постоянной кривизны. Две контравариантные метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ постоянной римановой кривизны K_1 и K_2 соответственно называются *согласованными*, если любая линейная комбинация этих метрик $g^{ij}(u) = \lambda_1 g_1^{ij}(u) + \lambda_2 g_2^{ij}(u)$ является метрикой постоянной римановой кривизны $\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2$, а коэффициенты соответствующих связностей Леви-Чивиты связаны соотношением $\Gamma_k^{ij}(u) = \lambda_1 \Gamma_{1,k}^{ij}(u) + \lambda_2 \Gamma_{2,k}^{ij}(u)$ [1]. Задача описания согласованных метрик постоянной римановой кривизны эквивалентна задаче описания согласованных нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа, порождаемых метриками постоянной римановой кривизны (согласованных гамильтоновых операторов Мохова–Ферапонтова [2]). Как показано в [3], [4] (см. также [1]), согласованные метрики постоянной римановой кривизны описываются совместной нелинейной системой, интегрируемой методом обратной задачи. В данной статье по любому решению этой интегрируемой системы, т.е. для любой пары согласованных метрик постоянной римановой кривизны, построены в явном виде интегрируемые бигамильтоновы системы, обладающие соответствующей парой согласованных гамильтоновых операторов. В плоском случае ($K_1 = K_2 = 0$), для согласованных гамильтоновых операторов Дубровина–Новикова [5], эта задача была рассмотрена и полностью решена в работах автора [6], [7]. В [2] были введены и изучены нелокальные гамильтоновы операторы, имеющие следующий вид (гамильтоновы операторы Мохова–Ферапонтова):

$$P^{ij} = g^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} + b_k^{ij}(u(x)) u_x^k + K u_x^i \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} u_x^j. \quad (1)$$

Если $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$ (такие операторы вида (1) называются *невыврожденными*), то оператор (1) является гамильтоновым тогда и только тогда, когда $g^{ij}(u)$ – произвольная контравариантная метрика постоянной римановой кривизны K , $b_k^{ij}(u) = -g^{is}(u) \Gamma_{sk}^j(u)$, где $\Gamma_{sk}^j(u)$ – связность, порождаемая метрикой $g^{ij}(u)$ (связность Леви-Чивиты) [2]. В задаче об описании произвольной пары согласованных нелокальных гамильтоновых операторов вида (1) один из этих гамильтоновых операторов всегда можно считать локальным (т.е. для него $K = 0$) без ограничения общности. Рассмотрим задачу о согласованности нелокального и локального гамильтоновых операторов вида (1). По теореме Дубровина–Новикова [5] для любого невырожденного локального гамильтонова оператора вида (1) с $K = 0$ всегда существуют локальные координаты $u^1, \dots, u^N$ (плоские координаты соответствующей метрики), в которых этот оператор имеет вид $P_2^{ij} = \eta^{ij}(d/dx)$, где $\eta^{ij} = \eta^{ji}$, $\eta^{ij} = \text{const}$, $\det \eta^{ij} \neq 0$.

ТЕОРЕМА 1. *Произвольный нелокальный гамильтонов оператор P_1^{ij} вида (1) (возможно, вырожденный) согласован с гамильтоновым оператором $P_2^{ij} = \eta^{ij}(d/dx)$ тогда и только тогда, когда он имеет вид*

$$P_1^{ij} = \left[\eta^{is} \frac{\partial H^j}{\partial u^s} + \eta^{js} \frac{\partial H^i}{\partial u^s} - K u^i u^j \right] \frac{d}{dx} + \left[\eta^{is} \frac{\partial^2 H^j}{\partial u^s \partial u^k} - K \delta_k^i u^j \right] u_x^k + K u_x^i \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} u_x^j, \quad (2)$$

где $H^i(u)$, $1 \leq i \leq N$, – гладкие функции, определенные в некоторой области локальных координат.

В плоском случае ($K = 0$) соответствующее утверждение было сформулировано автором в [8], [9] (см. также условия на плоские пучки метрик в [10]).

ТЕОРЕМА 2. *Нелокальный оператор (2) (возможно, вырожденный) является гамильтоновым тогда и только тогда, когда выполнены следующие уравнения:*

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Александра фон Гумбольдта (Германия), а также РФФИ (грант № 02-01-00803) и фонда INTAS (грант № 99-1782).

$$\frac{\partial^2 H^i}{\partial u^k \partial u^s} \eta^{sp} \frac{\partial^2 H^j}{\partial u^p \partial u^l} = \frac{\partial^2 H^j}{\partial u^k \partial u^s} \eta^{sp} \frac{\partial^2 H^i}{\partial u^p \partial u^l}, \quad (3)$$

$$\left(\eta^{ir} \frac{\partial H^s}{\partial u^r} + \eta^{sr} \frac{\partial H^i}{\partial u^r} - K u^i u^s \right) \eta^{jp} \frac{\partial^2 H^k}{\partial u^p \partial u^s} = \left(\eta^{jr} \frac{\partial H^s}{\partial u^r} + \eta^{sr} \frac{\partial H^j}{\partial u^r} - K u^j u^s \right) \eta^{ip} \frac{\partial^2 H^k}{\partial u^p \partial u^s}. \quad (4)$$

В плоском случае ($K = 0$) соответствующая теорема получена автором в [9], где была сформулирована также и гипотеза об интегрируемости системы (3), (4) методом обратной задачи рассеяния, доказанная впоследствии в работах автора [11], [12], [1] (см. также [13], где найдена пара Лакса). Соответствующие общие условия на плоские пучки метрик были указаны в [10].

ТЕОРЕМА 3. Система (3), (4) интегрируется методом обратной задачи.

Рассмотрим оператор рекурсии $R = P_1 (P_2)^{-1}$, задаваемый каноническими согласованными гамильтоновыми операторами $P_2^{ij} = \eta^{ij}(d/dx)$ и $P_1^{ij}(2)$. Любая система из иерархии $u_{t_n}^i = (R^n)_j^i u_x^j$, $n \in \mathbb{Z}$, является мультигамильтоновой интегрируемой системой. В частности, интегрируемой является любая система вида $u_{t_1}^i = R_j^i u_x^j$, т.е. система гидродинамического типа

$$u_{t_1}^i = \left(h^i(u) + \eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial u^s} \eta_{jl} u^l - \frac{K}{2} \eta_{sk} u^i u^s u^k \right)_x, \quad (5)$$

где $h^i(u)$, $1 \leq i \leq N$, — произвольное решение интегрируемой системы (3), (4); $\eta^{is} \eta_{sj} = \delta_j^i$. Эта система гидродинамического типа бигамильтонова с парой канонических согласованных гамильтоновых операторов $P_2^{ij} = \eta^{ij}(d/dx)$ и $P_1^{ij}(2)$:

$$u_{t_1}^i = P_1^{ij} \frac{\delta H_1}{\delta u^j(x)}, \quad H_1 = \frac{1}{2} \int \eta_{jl} u^j(x) u^l(x) dx, \quad (6)$$

$$u_{t_1}^i = P_2^{ij} \frac{\delta H_2}{\delta u^j(x)}, \quad H_2 = \int \left(\eta_{jk} h^k(u(x)) u^j(x) - \frac{K}{8} \eta_{jk} \eta_{sl} u^j(x) u^k(x) u^s(x) u^l(x) \right) dx. \quad (7)$$

Следующей системой в иерархии (при $n = 2$) является интегрируемая система

$$\begin{aligned} u_{t_2}^i = & \left(\left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial u^s} + \eta^{js} \frac{\partial h^i}{\partial u^s} - K u^i u^j \right) \left(\eta_{jl} \frac{\partial h^l}{\partial u^k} + \eta_{rk} \frac{\partial h^r}{\partial u^j} + \eta_{rq} u^q \frac{\partial^2 h^r}{\partial u^j \partial u^k} - K \eta_{jl} \eta_{pk} u^l u^p \right. \right. \\ & - \frac{K}{2} \eta_{jk} \eta_{pl} u^l u^p \Big) + \left(\eta^{is} \frac{\partial^2 h^j}{\partial u^s \partial u^k} - K \delta_k^i u^j \right) \left(\eta_{jl} h^l(u) + \eta_{rq} u^q \frac{\partial h^r}{\partial u^j} \right. \\ & \left. \left. - \frac{K}{2} \eta_{jl} \eta_{pr} u^l u^p u^r \right) + K \delta_k^i \left(\eta_{jl} h^l(u) u^j - \frac{K}{8} \eta_{jl} \eta_{pr} u^j u^l u^p u^r \right) \right) u_x^k. \end{aligned} \quad (8)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. И. Мохов // Функци. анализ и его прил. 2001. Т. 35. № 2. С. 24–36; math.DG/0005051.
 [2] О. И. Мохов, Е. В. Ферапонтов // УМН. 1990. Т. 45. № 3. С. 191–192. [3] О. И. Мохов // math.DG/0201280. [4] О. И. Мохов // УМН. 2002. Т. 57. № 3. С. 155–156. [5] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 4. С. 781–785. [6] О. И. Mokhov // Proceedings of the International Conference “Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems”, Cambridge (England), July 24–30, 2001; math.DG/0201281. [7] О. И. Мохов // УМН. 2002. Т. 57. № 1. С. 157–158. [8] О. И. Мохов // УМН. 1997. Т. 52. № 6. С. 171–172. [9] О. И. Мохов // Труды МИРАН. 1999. Т. 225. С. 284–300. [10] В. Dubrovin // Lecture Notes in Math. 1996. V. 1620. P. 120–348; hep-th/9407018 (1994). [11] О. И. Мохов // ТМФ. 2002. Т. 130. № 2. С. 233–250; math.DG/0005081. [12] О. И. Мохов // УМН. 2001. Т. 56. № 2. С. 221–222. [13] Е. V. Ferapontov // math.DG/0005221.

Центр нелинейных исследований
 при Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
E-mail: mokhov@mi.ras.ru, mokhov@landau.ac.ru

Принято редколлегией
 21.08.2002