Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Д. Пустыльников, Обобщенные цепные дроби, связанные с преобразованием Гаусса, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 5, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm564>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 03:38:03

ОБОБЩЕННЫЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ, СВЯЗАННЫЕ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ГАУССА

Л. Д. ПУСТЫЛЬНИКОВ

Общая конструкция разложения произвольного n -мерного вектора x в обобщенную (A, ω) -цепную дробь $x = [q^{(0)}, q^{(1)}, \dots]_{A, \omega}$, предложенная в [1], [2], зависит от некоторого преобразования A n -мерного линейного пространства и n -мерного вектора ω , принадлежащего n -мерному единичному тору $T_n = \{y_1, \dots, y_n : 0 \leq y_s < 1; s = 1, \dots, n\}$. Если же $n = 1$, $\omega = 0$, а отображение A имеет вид $A = \Gamma: x \rightarrow 1/x$ и проектируется на единичную окружность T_1 в виде отображения Гаусса $\bar{\Gamma}: y \rightarrow 1/y \bmod 1$, то (A, ω) -цепная дробь совпадает с обычной цепной дробью $x = [a_0, a_1, \dots]$ [3], где a_k – неполные частные. В данной работе мы изучаем частный случай общего понятия (A, ω) -цепной дроби, когда $n = 1$, x – число, $A = \Gamma$, а число ω удовлетворяет неравенству $0 \leq \omega < 1$. Такую цепную дробь в случае, если она конечная, мы будем обозначать $x = [a_0, \dots, a_m]_\omega$ и называть конечной ω -цепной дробью, а в случае, если эта дробь бесконечная, мы будем обозначать ее $x = [a_0, a_1, \dots]_\omega$ и называть бесконечной ω -цепной дробью. Разложения в ω -цепную дробь мы будем применять только для иррациональных чисел x . Опишем формальное построение ω -цепных дробей. Пусть x – иррациональное число, а ω – произвольное число, удовлетворяющее неравенству $0 \leq \omega < 1$.

Пусть $a_0 = [x]$ – целая часть x . Полагаем $x = x_0 = a_0 + \delta_0$. Если $\delta_0 = \omega$, то процесс построения ω -цепной дроби числа x на этом заканчивается, эта дробь конечная и $x = [a_0]_\omega$. Если же $\delta_0 \neq \omega$, то в силу того, что число x – иррациональное, имеем неравенство $\delta_0 \neq 0$ и полагаем $x_1 = 1/\delta_0$. Предположим теперь, что при некотором целом $k \geq 0$ построены целые числа $a_0, a_1, \dots, a_k$ и числа $x_0, \dots, x_{k+1}$ такие, что $x_s = a_s + \delta_s$ и $\delta_s \neq \omega$ при $s = 0, \dots, k$. Пусть $a_{k+1} = [x_{k+1}]$, и полагаем $x_{k+1} = a_{k+1} + \delta_{k+1}$. Если $\delta_{k+1} = \omega$, то процесс построения ω -цепной дроби числа x заканчивается, эта дробь конечная и $x = [a_0, \dots, a_{k+1}]_\omega$. Если же $\delta_{k+1} \neq \omega$, то в силу того, что число x – иррациональное, $\delta_{k+1} \neq 0$, и поэтому полагаем $x_{k+2} = 1/\delta_{k+1}$. Если при всех целых k выполнено неравенство $\delta_k \neq \omega$, то полагаем $x = [a_0, a_1, \dots]_\omega$ и ω -цепная дробь числа x – бесконечная. Представление x в виде ω -цепной дроби описано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\omega = 0$, то ω -цепная дробь совпадает с обычной цепной дробью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для любой бесконечной ω -цепной дроби $x = [a_0, a_1, \dots]_\omega$ числа x и любого целого числа $n \geq 0$ определим ω -подходящую дробь $\mathcal{S}_\omega^{(n)}$ следующим образом: $\mathcal{S}_\omega^{(n)} = [a_0, \dots, a_n]_\omega$.

Далее будем обозначать подходящую дробь для обычной цепной дроби числа x в виде $p_n/q_n = [a_0, \dots, a_n]$, где p_n, q_n ($n \geq 0$) – целые числа, связанные между собой с помощью равенств $p_n = p_{n-1}a_n + p_{n-2}$, $q_n = q_{n-1}a_n + q_{n-2}$, где $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$ и $p_0 = [x]$, $q_0 = 1$.

ЛЕММА. Пусть $\mathcal{S}_\omega^{(n)} = [a_0, \dots, a_n]_\omega$ – конечная ω -цепная дробь, а $p_k/q_k = [a_0, \dots, a_k]$ ($k \leq n$) – обычные конечные цепные дроби. Тогда при $n \geq 2$ выполнено равенство $\mathcal{S}_\omega^{(n)} = p_\omega^{(n)}/q_\omega^{(n)}$, где $p_\omega^{(n)} = p_n + p_{n-1}\omega$, $q_\omega^{(n)} = q_n + q_{n-1}\omega$.

ТЕОРЕМА 1. Два различных иррациональных числа имеют различные разложения в ω -цепную дробь.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n \geq 1$, $\beta = (1 - \omega^2)/\omega$. Тогда:

- 1) если $a_n > \beta$, то знак $\text{sign}(\mathcal{S}_\omega^{(n)} - \mathcal{S}_\omega^{(n-1)}) = (-1)^n$, а если $a_n < \beta$, то знак $\text{sign}(\mathcal{S}_\omega^{(n)} - \mathcal{S}_\omega^{(n-1)}) = (-1)^{n+1}$;
- 2) выполняется неравенство $|\mathcal{S}_\omega^{(n)} - \mathcal{S}_\omega^{(n-1)}| \leq |a_n - \beta| \omega / (q_\omega^{(n)} q_\omega^{(n-1)})$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $n \geq 2$, $\gamma = \omega a_n a_{n-1} + \omega^2 a_{n-1}$. Если $a_n > \gamma$, то знак $\text{sign}(\mathcal{S}_\omega^{(n)} - \mathcal{S}_\omega^{(n-2)}) = (-1)^n$, а если $a_n < \gamma$, то знак $\text{sign}(\mathcal{S}_\omega^{(n)} - \mathcal{S}_\omega^{(n-2)}) = (-1)^{n-1}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $x = [a_0, a_1, \dots]_\omega$. Тогда при $n \geq 2$ имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} p_\omega^{(n)} &= a_n p_\omega^{(n-1)} + p_\omega^{(n-2)} + (a_n - a_{n-1}) \sum_{k=-1}^{n-2} (-\omega)^{n-k-1} p_\omega^{(k)}, \\ q_\omega^{(n)} &= a_n q_\omega^{(n-1)} + q_\omega^{(n-2)} + (a_n - a_{n-1}) \sum_{k=0}^{n-2} (-\omega)^{n-k-1} q_\omega^{(k)}, \end{aligned}$$

где $p_\omega^{(-1)} = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. При всех ω , для которых выполнено равенство $a_n = a_{n-1}$, соотношения, выражающие числитель и знаменатель ω -подходящей дроби $\mathcal{S}_\omega^{(n)}$ через числители и знаменатели ω -подходящих дробей $\mathcal{S}_\omega^{(k)}$ при $k < n$, совпадают с классическими соотношениями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если $x = [a_0, \dots, a_n]_\omega$ — конечная ω -цепная дробь, а s — натуральное число, удовлетворяющее условию $1 \leq s \leq n$, то ω -остаток $r_\omega^{(s)}$ есть конечная ω -цепная дробь $r_\omega^{(s)} = [a_s, \dots, a_n]_\omega$, а если $x = [a_0, a_1, \dots]_\omega$ — бесконечная ω -цепная дробь, то ω -остаток $r_\omega^{(s)}$ есть бесконечная ω -цепная дробь $r_\omega^{(s)} = [a_s, a_{s+1}, \dots]_\omega$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $1 \leq s \leq n$. Тогда справедливо равенство

$$[a_0, \dots, a_n]_\omega = \frac{p_\omega^{(s-1)} r_\omega^{(s)} + (1 - \omega r_\omega^{(s)}) \sum_{k=-1}^{s-2} (-\omega)^{s-2-k} p_\omega^{(k)}}{q_\omega^{(s-1)} r_\omega^{(s)} + (1 - \omega r_\omega^{(s)}) \sum_{k=0}^{s-2} (-\omega)^{s-2-k} q_\omega^{(k)}},$$

где $p_\omega^{(-1)} = 1$, $p_\omega^{(k)} / q_\omega^{(k)} = [a_0, \dots, a_k]_\omega$, $r_\omega^{(s)} = [a_s, a_{s+1}, \dots, a_n]_\omega$.

ТЕОРЕМА 6. Иррациональное число x является квадратичной иррациональностью тогда и только тогда, когда значения ω на полуинтервале $0 \leq \omega < 1$, для которых ω -цепная дробь числа x — конечная, образуют конечное множество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Для данного иррационального числа x введем множество Ω_x на полуинтервале $[0, 1)$, состоящее из всех таких чисел $\omega \in [0, 1)$, для которых ω -цепная дробь числа x — конечная.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если число x не является квадратичной иррациональностью, то множество Ω_x — счетное и состоит из попарно различных чисел, обратных всем остаткам в разложении числа x в обычную цепную дробь.

Будем считать Ω_x упорядоченной последовательностью, а его элементы обозначать через $\omega_n^{(x)} = 1/r_n$ ($n = 0, 1, \dots$), где $x = [a_0, a_1, \dots]$, $r_n = [a_n, a_{n+1}, \dots]$.

ТЕОРЕМА 7. Число x есть алгебраическое число степени n тогда и только тогда, когда множество Ω_x состоит только из алгебраических чисел степени n , принадлежащих расширению поля рациональных чисел, полученного присоединением числа x .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Д. Пустыльников // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 6. С. 144–148. [2] L. D. Pustyl'nikov // J. Math. Sci. 1999. V. 95. № 5. P. 2552–2563. [3] А. Я. Хинчин. Цепные дроби. М.: Физматлит, 1961.