Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Пушкарь, О предельных циклах, рождающихся при возмущении гамильтоновых систем, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 5, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm565>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 13:00:31

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ, РОЖДАЮЩИХСЯ ПРИ ВОЗМУЩЕНИИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

И. А. ПУШКАРЬ

Сколько замкнутых траекторий общего положения гамильтоновой системы на плоскости, гамильтониан которой – полином степени n , можно превратить в предельные циклы при помощи малого возмущения системы полиномиальным векторным полем степени m (ср. [1]–[4])?

Результаты настоящей заметки возникли при попытке ответить на этот вопрос. В пп. 2 и 3 формулируются теоремы об абелевых интегралах в комплексной и вещественной областях, справедливые в любой размерности k . В п. 4 эти теоремы в случае $k = 2$ применяются к поставленному выше вопросу.

Я благодарна Ю. С. Ильяшенко и А. Г. Хованскому за полезные обсуждения.

1. Полиномы с невырожденной старшей однородной частью. Скажем, что полином H степени n в $\mathbb{C}^k$ имеет *невырожденную старшую однородную часть* h , если гиперповерхность, заданная однородным уравнением $h = 0$, имеет единственную особую точку – начало координат. Множество $A_H \subset \mathbb{C}$ критических значений полинома H конечно. Пусть $U = \mathbb{C}^k \setminus H^{-1}(A_H)$ – объединение всех неособых поверхностей уровня полинома H . Известно, что *ограничение полинома H с невырожденной старшей однородной частью на множество U задает локально тривиальное расслоение $H: U \rightarrow \mathbb{C} \setminus A_H$, каждый слой которого имеет гомологический тип букета $(n-1)^k$ сфер размерности $(k-1)$* (ср. [5]).

С некритическим значением a полинома H свяжем универсальную накрывающую $\pi: Y_{H,a} \rightarrow \mathbb{C} \setminus A_H$. Точку c универсальной накрывающей $Y_{H,a}$ можно отождествлять с классом гомотопически эквивалентных кривых в $\mathbb{C} \setminus A_H$ с закрепленными концами a и $\pi(c)$. Поэтому с точкой $c \in Y_{H,a}$ связан изоморфизм $\tau_c: H^{k-1}(F_{\pi(c)}) \rightarrow H^{k-1}(F_a)$ пространств $(k-1)$ -мерных когомологий слоев расслоения $H: U \rightarrow \mathbb{C} \setminus A_H$. Мы построим две функции, определенные на $Y_{H,a}$ и принимающие значения в пространстве $(k-1)$ -мерных когомологий слоя F_a .

Функция Φ_{ω_k} строится по любой голоморфной k -форме ω_k в $\mathbb{C}^k$. Именно, $\Phi_{\omega_k}(c)$ определяется как образ при изоморфизме τ_c класса $(k-1)$ -мерных когомологий слоя $F_{\pi(c)}$, определенного на поверхности $H = \pi(c)$ формой ω_k/dH .

Функция $\Psi_{\alpha_{k-1}}$ строится по любой голоморфной $(k-1)$ -форме α_{k-1} в $\mathbb{C}^k$. Именно, $\Psi_{\alpha_{k-1}}(c)$ определяется как образ при изоморфизме τ_c класса $(k-1)$ -мерных когомологий слоя $F_{\pi(c)}$, определенного на поверхности $H = \pi(c)$ формой α_{k-1} .

2. Комплексные теоремы. Для $j = 0, 1, \dots$ рассмотрим в k -мерном пространстве $\mathbb{R}^k$ куб $K_j(n, k)$, определенный неравенствами $nj \leq x_1 \leq nj + n - 2$; $0 \leq x_i \leq n - 2$, $i = 2, \dots, k$. Обозначим через $K(n, m)$ объединение всех кубов $K_j(n, k)$. По определению число $M(n, m, k)$ равно количеству целых точек множества $K(n, k)$, удовлетворяющих неравенству $\sum_{i=1}^k x_i \leq m$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Omega_{k,m}$ – пространство дифференциальных k -форм ω_k в $\mathbb{C}^k$ вида $\omega_k = P dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$, где P – полином степени меньше или равной m . Тогда для полинома H степени n с невырожденной старшей однородной частью размерность линейного пространства функций Φ_{ω_k} , где $\omega_k \in \Omega_{k,m}$, равняется $M(n, m, k)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Omega_{k-1,m+1}$ – пространство дифференциальных $(k-1)$ -форм α_{k-1} в $\mathbb{C}^k$ вида $\alpha_{k-1} = P_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_k + \dots + P_k dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1}$, где $P_1, \dots, P_k$ – полиномы степени меньше или равной $m+1$. Тогда для полинома H степени n с невырожденной старшей однородной частью размерность линейного пространства функций $\Psi_{\alpha_{k-1}}$, где $\alpha_{k-1} \in \Omega_{k-1,m+1}$, равняется $M(n, m, k)$.

С каждым циклом $\gamma \in H_{k-1}(F_a)$ и голоморфной $(k-1)$ -формой α_{k-1} в $\mathbb{C}^k$ свяжем комплекснозначную функцию $\Phi_{\alpha_{k-1}}(\gamma)$ на универсальной накрывающей $Y_{H,a}$, сопоставляющую точке $c \in Y_{H,a}$ число, равное значению класса когомологий $\Psi_{\alpha_{k-1}}(c)$ на цикле γ .

ТЕОРЕМА 3. Пусть H – ультраморсовский полином (т.е. H имеет невырожденную

старшую однородную часть и морсовские критические точки с различными критическими значениями) степени n . Пусть цикл $\gamma \in H_{k-1}(F_a)$ не лежит в ядре формы пересечения слоя F_a . Тогда размерность пространства функций $\Psi_{\alpha_{k-1}}(\gamma)$, где $\alpha_{k-1} \in \Omega_{k-1, m+1}$, равняется $M(n, t, k)$.

3. Вещественные теоремы. Неособая компонента связности поверхности уровня $H = c$ в $\mathbb{R}^k$ вещественного полинома H ориентирована как граница области $H \leq c$. С вещественным полиномом H в $\mathbb{R}^k$ свяжем множество Γ_H всех компактных неособых компонент связности всевозможных поверхностей уровня этого полинома, наделенных описанной выше ориентацией. Множество Γ_H имеет естественную структуру вещественно аналитической кривой.

С дифференциальной $(k-1)$ -формой α_{k-1} на $\mathbb{R}^k$ свяжем функцию $I_{\alpha_{k-1}}$ на Γ_H . Значение $I_{\alpha_{k-1}}$ в точке a — это $\int_{\gamma_a} \alpha_{k-1}$, где γ_a — цикл в $\mathbb{R}^k$, соответствующий a .

Обозначим через $\mathbb{R}\Omega_{k-1, m+1}$ пространство вещественных дифференциальных $(k-1)$ -форм в $\mathbb{R}^k$ вида $\alpha_{k-1} = P_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_k + \dots + P_k dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1}$, где $P_1, \dots, P_k$ — вещественные полиномы степени меньше или равной $m+1$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть полином H имеет степень меньше или равную n . Тогда размерность пространства функций $I_{\alpha_{k-1}}$, соответствующих формам $\alpha_{k-1} \in \mathbb{R}\Omega_{k-1, m+1}$, меньше или равна $M(n, t, k)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть полином H степени $n > k$ является ультраморсовским и множество Γ_H непусто. Тогда размерность пространства функций $I_{\alpha_{k-1}}$, соответствующих формам $\alpha_{k-1} \in \mathbb{R}\Omega_{k-1, m+1}$, равна $M(n, t, k)$. При этом если функция $I_{\alpha_{k-1}}$ тождественно равна нулю на одной из компонент связности кривой Γ_H , то она тождественно равна нулю на всей кривой.

4. Приложения. Пусть H — полином от двух переменных. Набор из r точек Γ_H назовем t -хорошим, если существует $\alpha_1 \in \mathbb{R}\Omega_{1, t}$, для которой I_{α_1} имеет в точках набора некратные нули. Набор из компактных неособых компонент связности линий уровня H на плоскости назовем t -хорошим, если соответствующий ему набор точек на Γ_H является t -хорошим.

Рассмотрим негамильтоново возмущение $v = v_H + \delta j(\alpha_1)$ гамильтонова векторного поля v_H с гамильтонианом H на плоскости со стандартной симплектической структурой, где j — изоморфизм кокасательного и касательного пространств, соответствующий симплектической структуре, δ — вещественное число и α_1 — 1-форма, фигурирующая в определении t -хорошего набора $\gamma_1, \dots, \gamma_r$. Согласно критерию Пуанкаре–Понтрягина (см. [1]) при малом δ негамильтоново векторное поле v имеет предельные циклы, расположенные вблизи кривых $\gamma_1, \dots, \gamma_r$. Поэтому вопрос, сформулированный в начале заметки, приводит к основной задаче: для полинома H от двух переменных и для натурального числа t найти наибольшее натуральное число $q(H, t)$ такое, что в пространстве наборов из $r = q(H, t)$ точек кривой Γ_H всюду плотны t -хорошие наборы.

ТЕОРЕМА 6. Для любого полинома H от двух переменных степени не выше n в пространстве наборов из $M(n, t-1, 2)$ точек кривой Γ_H t -хорошие наборы нигде не плотны.

ТЕОРЕМА 7. В пространстве полиномов H степени n , для которого $\Gamma_H \neq \emptyset$, открытое всюду плотное множество составляют ультраморсовские полиномы. Для каждого такого ультраморсовского полинома H справедливо равенство $q(H, t) = M(n, t-1, 2) - 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. С. Понтрягин // ЖЭТФ. 1934. Т. 4. № 8. С. 234–238. [2] Ю. С. Ильяшенко // Матем. сб. 1969. Т. 80. № 3. С. 388–404. [3] И. А. Пушкарь // Функции, анализ и его прил. 1997. Т. 31. № 2. С. 34–44. [4] L. Gavrilov // Bull. Sci. Math. 1998. V. 122. № 8. P. 571–584. [5] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде. Особенности дифференцируемых отображений. 2. М.: Наука, 1984.