Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Суетин, О теореме Дюма в теории непрерывных дробей, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 5, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm566>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 08:38:42

О ТЕОРЕМЕ ДЮМА В ТЕОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

С. П. Суетин

1. В теории непрерывных дробей хорошо известна теорема Дюма [1] (см. также [2]) о поведении чебышевской непрерывной дроби [3] для квадратного корня из полинома четвертой степени с простыми комплексными корнями. Точнее, пусть функция f имеет вид

$$f(z) = \sqrt{(z - e_1) \cdots (z - e_4)} - z^2 + \frac{e_1 + \cdots + e_4}{2}z, \quad (1)$$

где точки $e_1, \dots, e_4 \in \mathbb{C}$ попарно различны и выбрана та ветвь корня, главный член которой в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$ равен z^2 ; тем самым, $f \in \mathcal{H}(\infty)$. Как известно, n -я подходящая дробь C_n есть в точности n -я диагональная аппроксимация Паде $[n/n]_f$ функции f в бесконечно удаленной точке. Напомним, что $[n/n]_f = P_n/Q_n$, где $P_n, Q_n \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P_n, \deg Q_n \leq n$, $Q_n \not\equiv 0$ и $(Q_n f - P_n)(z) = O(z^{-n-1})$, $z \rightarrow \infty$. В соответствии с общей теоремой Шталя [4] о сходимости аппроксимаций Паде для алгебраических функций, для функции вида (1) имеем: *последовательность $[n/n]_f$ сходится к f по (логарифмической) емкости внутри области $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus S$, где S — компакт минимальной емкости [5], [6], соответствующий алгебраической функции $\sqrt{(z - e_1) \cdots (z - e_4)}$: выбранная выше ветвь корня (а вместе с ней и функция f) продолжается из окрестности точки $z = \infty$ в дополнение к S как однозначная аналитическая функция, а из всех компактов, обладающих таким свойством, S имеет наименьшую емкость.*

В [1] Дюма исследовал вопрос о *равномерной* сходимости последовательности подходящих дробей $\{C_n\}$ в предположении, что S состоит в точности из двух (непересекающихся) дуг: $S = S_1 \cup S_2$. В частности, он показал, что если определенные числовые параметры, связанные только с расположением точек $e_1, \dots, e_4$, рационально независимы, то множество полюсов подходящих дробей C_n всюду плотно в $\overline{\mathbb{C}}$, т.е. последовательность $\{C_n\}$ не может равномерно сходиться ни в какой подобласти D . Поскольку $C_n = [n/n]_f$, то результат Дюма о поведении полюсов подходящих дробей есть фактически утверждение об асимптотике знаменателей Q_n . Полиномы Q_n , как известно, ортогональны на $S = S_1 \cup S_2$ с весом $\sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)}$, $\zeta \in S$; если, в частности, все $e_1, \dots, e_4 \in \mathbb{R}$, то S состоит из двух отрезков, а Q_n — полиномы Ахизера [7].

Для функции $\sqrt{z^2 - 1} - z \in \mathcal{H}(\infty)$ знаменатели подходящих дробей — полиномы Чебышёва II-го рода, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весом $\sqrt{1 - x^2}$. Аналогично, разложение функции $1/\sqrt{z^2 - 1}$ в непрерывную дробь приводит к полиномам Чебышёва, ортогональным с весом $1/\sqrt{1 - x^2}$. Наконец, для функции вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\rho(x)}{\sqrt{1 - x^2}} \frac{dx}{z - x}, \quad (2)$$

где $\rho \neq 0$, соответствующие полиномы Q_n ортогональны на $[-1, 1]$ относительно $\rho(x)/\sqrt{1 - x^2}$ (см. [3]). При условии, что ρ удовлетворяет условию Дини–Липшица, “сильная” асимптотика полиномов Q_n была изучена С.Н. Бернштейном (см. [8], а также [9; гл. XII]) с помощью разработанного им параллельно с Г. Сегё аппроксимационного метода.

По аналогии с классической ситуацией мы рассматриваем здесь класс функций вида

$$\widehat{\rho}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_S \frac{\rho(\zeta)}{\sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)}} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad (3)$$

где под $\sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)}$, $\zeta \in S$, понимаются граничные значения на S выбранной в D ветви корня; комплекснозначная функция $\rho(\zeta) \neq 0$ и удовлетворяет условию Дини–Липшица; такую функцию ρ в дальнейшем будем называть *допустимым весом*. Если $\rho \in \mathbb{C}(\zeta)$ и не имеет на S полюсов, то $\widehat{\rho}$ — эллиптическая функция: $\widehat{\rho}(z) = r_1(z) + r_2(z)/\sqrt{(z - e_1) \cdots (z - e_4)}$, где $r_1, r_2 \in \mathbb{C}(z)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00564), Программы поддержки ведущих научных школ России (грант № 00-15-96132) и фонда INTAS (грант № 2000-272).

Оказывается, поведение последовательности диагональных аппроксимаций Паде для функций класса (3) полностью определяется взаимным расположением точек $e_1, \dots, e_4$ и, тем самым, совпадает с поведением непрерывной дроби для конкретной функции (1).

2. Пусть $g(z, \infty)$ – функция Грина для области D с особенностью в точке $z = \infty$, $\tilde{g}(z, \infty)$ – гармонически сопряженная к ней функция, $G(z, \infty) = g(z, \infty) + i\tilde{g}(z, \infty)$ – комплексная функция Грина. Область D – двусвязна, поэтому G – многозначная функция. Все периоды функции G – чисто мнимые, причем лишь два из них независимы. В качестве одного периода можно выбрать величину $2\pi i\omega_1(\infty)$, где $\omega_1(z) = \omega(S_1, z; D)$ – гармоническая мера дуги S_1 в точке $z \in D$ относительно области D , $0 < \omega_1(z) < 1$. Обозначим другой период через $2\pi i\Delta_1(\infty)$, $\Delta_1(\infty) \in \mathbb{R}$. Из [10; формула (26)] вытекает, что два вещественных параметра, введенные Дюма для характеристики расположения точек $e_1, \dots, e_4$, совпадают с $\Delta_1(\infty)$ и $\omega_1(\infty)$.

ТЕОРЕМА. Пусть (как и в теореме Дюма) множество S состоит из двух непересекающихся дуг. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Если величины $\Delta_1(\infty)$, $\omega_1(\infty)$ и 1 рационально независимы, то для любого допустимого веса ρ полюсы аппроксимаций Паде $[n/n]_{\hat{\rho}}$ всюду плотны в $\overline{\mathbb{C}}$, т.е. последовательность $\{[n/n]_{\hat{\rho}}\}$ не может равномерно сходиться ни в какой области $D' \in D$.

2) Если $\Delta_1(\infty), \omega_1(\infty) \in \mathbb{Q}$, то для любого допустимого веса ρ существует конечное множество точек $Z \subset D$ таких, что множество предельных точек полюсов $[n/n]_{\hat{\rho}}$ совпадает с $S \cup Z$, а аппроксимации Паде $[n/n]_{\hat{\rho}}$ сходятся к $\hat{\rho}$ равномерно внутри области $D \setminus Z$.

3) Если величины $\Delta_1(\infty)$, $\omega_1(\infty)$ и 1 рационально зависимы, но хотя бы одна из величин $\Delta_1(\infty)$, $\omega_1(\infty)$ – иррациональна, то для любого допустимого веса ρ существует конечное число непересекающихся открытых дуг $\gamma_1, \dots, \gamma_k \subset D$, концы которых принадлежат S_1 и S_2 , таких, что множество предельных точек полюсов $[n/n]_{\hat{\rho}}$ совпадает с $S \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$, а аппроксимации Паде $[n/n]_{\hat{\rho}}$ сходятся к $\hat{\rho}$ равномерно внутри области $D \setminus \bigcup_{j=1}^k \gamma_j$.

Доказательство этого результата проводится по следующей схеме, впервые реализованной в [10] (см. также [11]) для случая гиперэллиптических функций: 1) существует обладающее специальными свойствами решение проблемы Якоби обращения абелевых интегралов $\Rightarrow$ 2) существует решение определенной краевой задачи Римана $\Rightarrow$ 3) выполняется сингулярное интегральное уравнение на ортогональные полиномы $\Rightarrow$ 4) существует формула для сильной асимптотики ортогональных полиномов $\Rightarrow$ 5) имеет место равномерная сходимость диагональных аппроксимаций Паде.

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Для допустимых весов естественным образом [10] вводятся классы эквивалентности. Множество Z в 2) и набор дуг $\{\gamma_j\}$ в 3) зависят лишь от этих классов.

II. Приведенные результаты остаются справедливыми: 1) для более общего случая ортогональности с весом $\rho(\zeta)P(\zeta)/\sqrt{(\zeta - e_1)\dots(\zeta - e_4)}$, где $P \in \mathbb{C}[z]$ и делит полином $(z - e_1) \times \dots (z - e_4)$; 2) для функций вида $\hat{\rho} + r$, где $r \in \mathbb{C}(z) \cap \mathcal{H}(S)$, $r(\infty) = 0$; в последнем случае равномерная сходимость аппроксимаций Паде подразумевается в сферической метрике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Dumas. Sur le développement des fonctions elliptiques en fractions continues. Thesis. Zürich, 1908. [2] H. Stahl // Ann. Fac. Sci. Toulouse. Math. (6). Spec. Iss. 1996. P. 121–193. [3] П. Л. Чебышёв // Полное собрание сочинений. Т. II. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1948. С. 103–126; 336–341. [4] H. Stahl // Constr. Approx. 1986. V. 2. P. 225–240; 241–251. [5] J. Nuttall // J. Approx. Theory. 1984. V. 42. P. 299–386. [6] H. Stahl // Complex Variables Theory Appl. 1985. V. 4. P. 311–324; 325–338; 339–354. [7] Н. И. Ахиезер // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134. № 1. С. 9–12. [8] С. Н. Бернштейн. О многочленах, ортогональных в конечном интервале. Харьков: ОНТИ, 1937. [9] Г. Сегё. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. [10] С. П. Суетин // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 9. С. 81–114. [11] С. П. Суетин // УМН. 2002. Т. 57. № 1. С. 45–142.