Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Тарасов, Максимальность некоторых коммутативных подалгебр в алгебрах Пуассона полупростых алгебр Ли, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 5, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm567>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 14:00:20

МАКСИМАЛЬНОСТЬ НЕКОТОРЫХ КОММУТАТИВНЫХ ПОДАЛГЕБР В АЛГЕБРАХ ПУАССОНА ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

А. А. ТАРАСОВ

Пусть $\mathfrak{g}$ – полупростая комплексная алгебра Ли, $S(\mathfrak{g})$ – ее симметрическая алгебра, $P(\mathfrak{g})$ – ее алгебра Пуассона, т.е. алгебра $S(\mathfrak{g})$, снабженная скобкой Пуассона–Ли.

Элементы алгебры $P(\mathfrak{g})$ будем рассматривать как функции на $\mathfrak{g}^*$ или на $\mathfrak{g}$, отождествляя $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ при помощи инвариантного скалярного умножения $(\cdot, \cdot)$. Пусть $\{f_i \in P(\mathfrak{g}) \mid i = 1, \dots, r\}$ есть алгебраически независимая система порождающих центра алгебры $P(\mathfrak{g})$. Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – картановская подалгебра, $h \in \mathfrak{h}$ – регулярный элемент. Тогда элементы $\partial_h^k f_i$ ($i = 1, \dots, r$; $k = 0, 1, \dots, \deg f_i - 1$) алгебры $P(\mathfrak{g})$ попарно коммутируют и алгебраически независимы [1]. Порожденную ими коммутативную подалгебру обозначим через $F(h)$. Она имеет максимальную возможную степень трансцендентности среди коммутативных подалгебр алгебры $P(\mathfrak{g})$. Подалгебры вида $F(h)$ называются подалгебрами Мищенко–Фоменко.

Основным утверждением данной работы является следующая

ТЕОРЕМА 1. *$F(h)$ есть максимальная коммутативная подалгебра алгебры $P(\mathfrak{g})$.*

Пусть $\mathbf{a} = a(t)$ – такой сходящийся (в окрестности нуля) степенной ряд с коэффициентами из алгебры $\mathfrak{h}$, что элемент $a(t)$ регулярен и полупрост при всех достаточно малых $t \neq 0$.

Пусть $F(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))$ (см. [2], [3]). В [3] доказано, что $F(\mathbf{a})$ есть свободная коммутативная подалгебра максимальной степени трансцендентности.

ТЕОРЕМА 2. *$F(\mathbf{a})$ есть максимальная коммутативная подалгебра алгебры $P(\mathfrak{g})$.*

Теорема 1 следует из теоремы 2. При доказательстве будет использоваться основное свойство, которое для подалгебр вида $F(h)$ было доказано в [1], а для предельных подалгебр – в [3].

ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО. Пусть e – сумма всех корневых векторов, отвечающих простым корням относительно $\mathfrak{h}$. Тогда существует набор $\{f_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ однородных свободных порождающих подалгебры $F(\mathbf{a})$ такой, что векторы $\{de f_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ линейно независимы.

Автор глубоко признателен своему научному руководителю Э. Б. Винбергу за постановку задачи, а также за постоянное внимание к работе.

1. ЛЕММА 1. *Пусть A – целостное кольцо, допускающее разложение вида $A = B \oplus I$, где B – подкольцо, I – идеал кольца A . Тогда B алгебраически замкнуто в A .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть это не так, т.е. существует элемент $c \notin B$, алгебраический над B . Пусть в силу разложения $A = B \oplus I$ элемент c представим в виде $c = b + u$, $b \in B$, $u \in I$, причем $u \neq 0$. Тогда элемент $u = c - b$ также алгебраичен над B . Рассмотрим для него минимальный аннулирующий многочлен $b_0 + b_1 u + \dots + b_m u^m = 0$, $b_0, \dots, b_m \in B$. Тогда $b_0 \neq 0$ в силу минимальности многочлена, с другой стороны, $b_1 u + \dots + b_m u^m = u(b_1 + \dots + b_m u^{m-1}) \in I$, откуда $b_0 = 0$. Получаем противоречие.

2. Множество Δ всех корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$ разлагается в объединение $\Delta = \bigcup_{i \neq 0} \Delta_i$, где $\Delta_i = -(\Delta_{-i})$ при $i > 0$ состоит из тех положительных корней, которые разлагаются в сумму ровно i простых корней. Пусть $\mathfrak{g}_i = \langle e_\alpha \mid \alpha \in \Delta_i \rangle$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. Положим $\mathfrak{g}^+ = \sum_{i \geq 1} \mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}^+ \oplus \mathfrak{h}$ и $\mathfrak{q} = \mathfrak{b} \oplus \mathbb{C}e_-$, где $e_- = \sum_{\alpha \in \Delta_{-1}} e_\alpha$. Без ограничения общности будем считать, что $(e, e_-) = 1$. Определим проекцию $Q: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{q}$ следующим образом: $Q|_{\mathfrak{b}} = \text{Id}$, $Q|_{\sum_{i \leq -2} \mathfrak{g}_i} = 0$, $Q(e_\alpha) = \frac{1}{\text{rk } \mathfrak{g}} e_-$ при $e_\alpha \in \mathfrak{g}_{-1}$. Продолжим ее до гомоморфизма $Q: S(\mathfrak{g}) \rightarrow S(\mathfrak{q})$ симметрических алгебр. Ясно, что алгебра $S(\mathfrak{q})$ линейно порождена мономами вида

$$\prod_{i=1}^{s_1} e_{\beta_i} \prod_{j=1}^{s_2} h_{\alpha_j} \cdot e_-^{s_3}, \quad (1)$$

где $\beta_i \in \bigcup_{t \geq 1} \Delta_t$, $\alpha_j \in \Delta_1$, e_{β_i} – корневой вектор, отвечающий корню β_i . Пусть $h_0 \in \mathfrak{h}$ – такой элемент, что $\alpha(h_0) = 1$ для любого корня $\alpha \in \Delta_1$. Пусть $S(\mathfrak{q})^{h_0} = \{x \in S(\mathfrak{q}) \mid \{h_0, x\} = 0\}$. Отметим, что Q перестановочно с действием $\text{ad}(h_0)$.

3. ЛЕММА 2. $Q(P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}) = S(\mathfrak{q})^{h_0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в мономе вида (1) $\beta_i \in \Delta_{p_i}$, $p_i > 0$ при $i = 1, \dots, s_1$. Ясно, что этот моном лежит в $Q(P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}})$ тогда и только тогда, когда $s_3 = \sum_{i=1}^{s_1} p_i$.

Отсюда следует, что $Q(P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}})$ свободно порождается элементами $e_{\beta} e_{-}^s$, $\beta \in \Delta_s$, $s > 0$, и h_{α} , $\alpha \in \Delta_1$. Очевидно, что эти же элементы свободно порождают $S(\mathfrak{q})^{h_0}$. Лемма доказана.

4. Пусть $\pi: S(\mathfrak{q})^{h_0} \rightarrow S(\mathfrak{b})$ – изоморфизм, который определен на порождающих алгебры $S(\mathfrak{q})^{h_0}$ следующим образом: $\pi(e_{\beta} e_{-}^s) = e_{\beta}$, $\beta \in \Delta_s$, $s > 0$; $\pi(h_{\alpha}) = h_{\alpha}$, $\alpha \in \Delta_1$.

ЛЕММА 3. Пусть $y \in S^p(\mathfrak{q})^{h_0}$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда $\pi(y) \equiv d_e y \pmod{S(\sum_{j=0}^{p-2} \mathfrak{g}_j)}$, причем $d_e y \in \mathfrak{g}_{p-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $p = 1$ утверждение очевидно. При $p \geq 2$ пусть mon – произвольный моном из разложения y по базисным мономам вида (1). Пусть корневой вектор e_{β} , $\beta \in \Delta_t$, входит в разложение (1) монома mon . Тогда в силу соотношения $s_3 = \sum_{i=1}^{s_1} p_i$ и единственности разложения β по элементам из Δ_1 ясно, что $\deg \text{mon} \geq t + 1$, поскольку mon содержит как минимум еще t компонент вида e_{-} . Отсюда получаем, что в силу условия $\deg y = p$, во-первых, в разложении (1) для mon нет ни одного корневого вектора из $\sum_{i \geq p} \mathfrak{g}_i$. Во-вторых, если в разложении (1) для mon есть корневой вектор из $\mathfrak{g}_{p-1}$, то кроме него в разложении нет больше ни одного корневого вектора из $\mathfrak{g}^{+}$, поскольку все остальные компоненты монома mon в силу соотношения $s_3 = \sum_{i=1}^{s_1} p_i$ определены однозначно и имеют вид e_{-} . Отсюда $\pi(y) = A + B$, где $A \in \mathfrak{g}_{p-1}$, $B \in S(\sum_{i=0}^{p-2} \mathfrak{g}_i)$. Покажем, что $A = d_e y$. Последнее достаточно показать для $y = e_{\beta} e_{-}^{p-1}$, $\beta \in \Delta_{p-1}$, так как $d_e y \neq 0$ только для таких мономов. Осталось заметить, что $\pi(e_{\beta} e_{-}^{p-1}) = e_{\beta} = d_e(e_{\beta} e_{-}^{p-1})$.

5. ЛЕММА 4. Ограничение $Q|_{F(\mathfrak{a})}: F(\mathfrak{a}) \rightarrow S(\mathfrak{q})^{h_0}$ есть изоморфизм алгебр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу основного свойства существует набор свободных порождающих $\{f_{\gamma} \mid \gamma \in \Gamma\}$ подалгебры $F(\mathfrak{a})$ такой, что множество $\{d_e f_{\gamma} \mid \gamma \in \Gamma\}$ является базисом пространства $\mathfrak{b}$, так как его элементы лежат в $\mathfrak{b}$ и линейно независимы. Из леммы 3 следует, что множество $\{\pi(Q(f_{\gamma})) \mid \gamma \in \Gamma\}$ свободно порождает $S(\mathfrak{b})$. Таким образом, $\pi \circ Q|_{F(\mathfrak{a})}$ – изоморфизм. Так как $\pi: S(\mathfrak{q})^{h_0} \rightarrow S(\mathfrak{b})$ является изоморфизмом, то и $Q|_{F(\mathfrak{a})}: F(\mathfrak{a}) \rightarrow S(\mathfrak{q})^{h_0}$ – изоморфизм.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Ясно, что если $w \in P(\mathfrak{g})$ и $\{w, F(\mathfrak{a})\} = 0$, то $w \in P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$. Пусть $I = \{x \in P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} \mid Q(x) = 0\}$. Ясно, что I – идеал алгебры $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$. В силу леммы 4 имеет место разложение $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} = F(\mathfrak{a}) \oplus I$. По лемме 1 подалгебра $F(\mathfrak{a})$ алгебраически замкнута в $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$. Поскольку алгебра $F(\mathfrak{a})$ имеет максимально возможную степень трансцендентности среди коммутативных подалгебр алгебры Ли $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$, то отсюда следует, что $F(\mathfrak{a})$ является максимальной коммутативной подалгеброй.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. № 2. С. 396–415. [2] Э. Б. Винберг // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 1. С. 3–25. [3] В. В. Шувалов. О пределах подалгебр Мищенко–Фоменко в алгебрах Пуассона полупростых алгебр Ли // Функци. анализ и его прил. 2002. Т. 36. № 4 (в печати).