Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Шорина, $\wp$ -функции и гамильтоновы системы, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 5, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm568>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 13:34:29

ϕ-ФУНКЦИИ И ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ

С. Ю. ШОРИНА

Мы будем работать с ϕ -функциями Клейна на якобиане гиперэллиптической кривой $\Gamma = \{(\eta, \xi) \in \mathbb{C}^{2g} \mid \eta^2 = 4\xi^{2g+1} + \lambda_1 \xi^{2g-1} + \dots + \lambda_{2g}\}$ (см. [1]). В пространстве $\mathbb{C}^{2g}$ в явном виде будут построены g гамильтоновых систем и предъявлено их совместное решение в терминах ϕ -функций. Показано, что это решение задает решение g -го стационарного уравнения KdV. Таким образом, получено эффективное описание образа якобиана кривой, проходящего через данную точку в $\mathbb{C}^{2g}$. Отметим, что в [2] соответствующие образы якобианов описаны как пересечение линий уровня интегралов аналогичных систем в $\mathbb{C}^{2g}$. Мы следуем обозначениям, принятым в работе [1], а также используем результаты о функциях Клейна, полученные в [1].

Введем производящие функции $\mu(z) = \mu_{-1}z^{-1} + \mu_0 + \mu_1 z + \dots + \mu_g z^g$, $q(z) = q_1 z + \dots + q_g z^g$, $p(z) = p_1 z + \dots + p_g z^g$, где μ_i , p_i , q_i алгебраически независимые переменные. Далее будем считать μ_i константами, а q_i и p_i — функциями от переменной x . Положим

$$H(z) = \frac{1}{2}p(z)^2 \left(1 - \frac{1}{2}q(z)\right) - \frac{\mu(z)q(z)}{1 - \frac{1}{2}q(z)}. \quad (1)$$

Разложим функцию $H(z)$ по степеням z : $H(z) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k z^{k+1}$. В пространстве $\mathbb{C}^{2g}$ с координатами $\{q_1, q_2, \dots, q_g, p_1, p_2, \dots, p_g\}$ рассмотрим гамильтонову систему с гамильтонианом H_g и симплектической формой $\omega_g = q_g \wedge p_1 + q_{g-1} \wedge p_2 + \dots + q_1 \wedge p_g$:

$$q'_i = \partial H_g / \partial p_{g-i+1}, \quad p'_i = -\partial H_g / \partial q_{g-i+1}. \quad (2)$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование по x . Обозначим i -й коэффициент разложения по степеням z произвольной функции $f(z)$ через $[f(z)]_i$, а сумму $\sum_{i \leq k} [f(z)]_i$ через $[f(z)]_{\leq k}$. Тогда векторное поле, заданное уравнениями (2), можно записать в виде

$$q'_i = \left[p(z) \left(1 - \frac{1}{2}q(z)\right) \right]_i, \quad p'_i = \left[\frac{4\mu(z)}{(2 - q(z))^2} + \frac{1}{4}p(z)^2 \right]_i. \quad (3)$$

Функции q'_i и q''_i с помощью формул (3) выражаются через q_j , p_j и μ_j . Очевидно, что $p_i = \left[\frac{2q'(z)}{2 - q(z)} \right]_i$. Для начальных данных $(q_1(0), \dots, q_g(0), p_1(0), \dots, p_g(0)) \in \mathbb{C}^{2g}$ положим

$$\lambda(z) = 4z^{-1} + \lambda_1 z + \dots + \lambda_{2g} z^{2g} = \frac{1}{4}(q'(z)^2 + 2q''(z)(2 - q(z)) + 4(z^{-1} + q_1)(2 - q(z))^2). \quad (4)$$

Из уравнений (3) следует, что $\lambda_i = \mu_i$ для $i = 1, \dots, g$, а $\lambda_{g+1}, \dots, \lambda_{2g}$ могут быть выражены через $q_i(0)$, $p_i(0)$ и μ_i . Пусть $z_1, \dots, z_g$ — нули полинома $2 - q(z)$. Тогда $q'(z_i)^2 = 4\lambda(z_i)$, и $(\xi_i = z_i^{-1}, \eta_i = q'(z_i)/2z_i^g) \in \Gamma$. Отображение Абеля переводит набор точек (ξ_i, η_i) в точку $(\bar{u}) = (u_1, \dots, u_g)$ на якобиане $\text{Jас}(\Gamma)$. В [1] показано, что при отображении Абеля прообразом точки $\bar{u} \in \text{Jас}(\Gamma)$ является набор $\{(\xi_i, \eta_i)\} \in \text{Sym}^g(\Gamma)$, где ξ_i — корни полинома $\mathcal{P}(\xi; \bar{u}) = \xi^g - \xi^{g-1}\wp_{g,g}(\bar{u}) - \dots - \wp_{g,1}(\bar{u})$. Следовательно, $q_i(0) = 2\wp_{g,g-i+1}(\bar{u})$, $q'_i(0) = 2\wp_{g,g-i+1}(\bar{u})$. Положим $q_i(x) = 2\wp_{g,g-i+1}(u_1, \dots, u_g + x)$. Для функций $p_i(x)$ получаем

$$p_1(x) = 2\wp_{g,g}(u_1, \dots, u_g + x), \\ p_{i+1}(x) = 2\wp_{g,g-i+1}(u_1, \dots, u_g + x) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} q_j(x) p_{i-j}(x), \quad i \leq g. \quad (5)$$

Из [1] следует, что для определенных таким образом функций $q_i(x)$ и $p_i(x)$ значения λ_i являются константами.

ТЕОРЕМА 1. Построенный выше набор функций $q_i(x)$ и $p_i(x)$ является решением гамильтоновой системы (2).

Доказательство вытекает непосредственно из соотношений для ϕ -функций (см. [1]).

Иерархия Кортевега–де-Фриза определяется как последовательность уравнений $u_{t_k} = \mathcal{X}_k(u)$, если $\mathcal{X}_0 = u_{t_0}$, $\mathcal{X}_{k+1} = \mathcal{R} \mathcal{X}_k$, где $\mathcal{R}$ — оператор Ленарда: $\mathcal{R} = \frac{1}{4} \partial_{t_0}^2 - u - \frac{1}{2} u_{t_0} \partial_{t_0}^{-1}$.

Функция u является решением g -го стационарного уравнения KdV, если $\mathcal{X}_g(u) \equiv 0$. Это соотношение выполняется для функции $u = 2\wp_{gg}$ (см. [1]).

ТЕОРЕМА 2. Набор функций q_i, p_i является решением системы (2) тогда и только тогда, когда верны равенства $q'_{i+1} = \mathcal{R}q'_i$ и $\mathcal{R}q'_g = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $p'_i = -\partial H_g / \partial q_{g-i+1}$ следует, что

$$\left[-\frac{4\mu(z)}{(2-q(z))^2} - \frac{1}{4}p(z)^2 \right]_i = \left[\frac{2q''(1-2q(z)) + 2q'(z)^2}{(2-q(z))^2} \right]_i.$$

Умножая эти равенства на $(2-q(z))^2$ и дифференцируя по x , получаем $(2-q(z))(q'''(z) + 2q'_1(2-q(z)) - 4(x^{-1} + q_1)q'(z) + O(z^{g+1})) = 0$. Поскольку z — формальный параметр, имеем $4q'_{i+1} = q'''_i - 2q'_1q_i - 4q_1q'_i = 4\mathcal{R}(q'_i)$ при $i < g$ и $q'''_g - 2q'_1q_g - 4q_1q'_g = 0$. В обратную сторону теорема доказывается с помощью этих же выкладок в обратном порядке, μ_i возникают как константы интегрирования.

СЛЕДСТВИЕ. Стационарное решение высших KdV может быть записано в виде $q_1(x) = 2\wp_{gg}(u_1, u_2, \dots, u_g + x)$, причем коэффициенты кривой Γ и точка $\bar{u} \in \text{Jas}(\Gamma)$ полностью определяются начальными данными.

Выразив $\wp$ -функцию через θ -функцию (см. [1]), мы получаем решение KdV в форме Матвеева–Итса (см. [2], [3]), причем все константы, зависящие от поверхности Γ , могут быть выражены явно.

Далее будем рассматривать функции q_i, p_i как функции g переменных, а именно, положим $q_i(x_1, \dots, x_g) = 2\wp_{g, g-i+1}(u_1 + x_g, \dots, u_g + x_1)$, а p_i определим рекуррентной формулой аналогично (5). Функции q_i и p_i , заданные таким образом, определяют отображение тора $\text{Jas}(\Gamma)$ в пространство $\mathbb{C}^{2g}$. Уравнения движения вдоль канонических координат на образе якобиана могут быть записаны в виде гамильтоновой системы. Введем новый ряд $r(z) = \sum_{i=1}^g r_i z^i$, где $r_i = p_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} p_j q_{i-j}$. Если q_i, p_i задают решение системы (2), то $r(z) = q'(z)$. Обозначим $q_k(z) = q_1 z + \dots + q_k z^k$. Положим $H_g^k = \left[\frac{2-q_k(z)}{2-q(z)} \left(\frac{1}{2}r(z)^2 - 2\mu(z) \right) z^{-k} + 2\mu(z)z^{-k} \right]_{g+1}$.

При $k = 0$ функция H_g^0 совпадает с $(g+1)$ -м коэффициентом разложения функции H , определенной по формуле (1). Рассмотрим систему уравнений

$$\partial q_i / \partial x_k = \partial H_g^k / \partial p_{g-i+1}, \quad \partial p_i / \partial x_k = -\partial H_g^k / \partial q_{g-i+1}. \quad (6)$$

ТЕОРЕМА 3. Определенные выше функции $q_i(x_1, \dots, x_g)$ и $p_i(x_1, \dots, x_g)$ задают решение гамильтоновой системы (6).

Гамильтонианы $H_g^0, \dots, H_g^{g-1}$ независимы и находятся в инволюции. Более того, на образе якобиана гиперэллиптической кривой Γ функция H_g^k принимает значение $2\lambda_{g+k}$. Производные q'_j и q''_j могут быть выражены через q_i и p_j , поэтому определено вложение $\mathbb{C}^{2g} \rightarrow \mathbb{C}^{3g}$, $(\bar{q}, \bar{p}) \rightarrow (\bar{q}, \bar{q}', \bar{q}'')$, при этом система, определенная соотношением (6), переходит в динамическую систему в $\mathbb{C}^{3g}$, описанную в работе [1].

Для последовательности функций $H^k(z)$ выпишем производящую функцию: $\mathbf{H}(z, y) = \sum_{k=0}^{\infty} H^k(z) y^k = \frac{1}{2} \frac{z}{z-y} \frac{2-q(y)}{2-q(z)} r(z)^2 + \frac{q(z)-q(y)}{z-y} \frac{z}{2-q(z)} \cdot 2\mu(z)$.

Автор благодарит В. М. Бухштабера за постановку задачи, полезные обсуждения и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leykin // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1997. V. 179. P. 1–33. [2] Б. А. Дубровин, В. М. Матвеев, С. П. Новиков // УМН. 1976. Т. 31. № 1. С. 51–136. [3] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.