Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Н. Рэй, Универсальный эквивариантный род и формула Кричевера, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 1, 195–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm5695>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 17:24:22

Универсальный эквивариантный род и формула Кричевера

В. М. Бухштабер, Н. Рэй

Мы будем рассматривать гладкие $2n$ -мерные многообразия M с гладким действием θ окружности S^1 на них. Скажем, что M обладает структурой *нормально комплексного S^1 -многообразия* (M, θ, c_ν) , если задано эквивариантное вложение $i: M \rightarrow \mathbb{C}^k$ вместе с фиксированной эквивариантной комплексной структурой c_ν на нормальном расслоении $\nu(i)$. Используя стандартное действие S^1 на сфере $S^{2m+1} \subset \mathbb{C}^{m+1}$, введем $2(m+n)$ -мерное гладкое многообразие $W_m = S^{2m+1} \times_{S^1} M$ и k -мерное комплексное векторное расслоение $q_m: E_m \rightarrow \mathbb{C}P^m$, где $E_m = S^{2m+1} \times_{S^1} \mathbb{C}^k$. Тогда вложение i продолжается до вложения $i': W_m \rightarrow E_m$, так что комплексная структура c_ν продолжается до комплексной структуры c' на нормальном расслоении $\nu(i')$.

Отображение $p_m: W_m \xrightarrow{i'} E_m \xrightarrow{q_m} \mathbb{C}P^m$ является комплексно ориентированным (см. [1]) и задает класс комплексных кобордизмов $\Phi_m(M, \theta, c_\nu) \in U^{-2n}(\mathbb{C}P^m)$. Ясно, что $\iota_m^* \Phi_{m+1} = \Phi_m$, где $\iota_m: \mathbb{C}P^m \rightarrow \mathbb{C}P^{m+1}$ – стандартное вложение. Обратная последовательность $(\Phi_m(M, \theta, c_\nu) : m \geq 0)$ задает элемент $\Phi(M, \theta, c_\nu)$ из $\varprojlim U^{-2n}(\mathbb{C}P^m) \simeq U^{-2n}(\mathbb{C}P^\infty)$, который называется *универсальным S^1 -эквивариантным родом* структуры (M, θ, c_ν) . Фундаментальные результаты о родах Хирцебруха многообразий с действием S^1 на его основе были получены в [2], [3]. Аналог рода Φ в случае компактной группы Ли G изучается рядом авторов с 60-х годов (см. [4], [1]).

Имеет место изоморфизм $U^*(\mathbb{C}P^\infty) \cong \Omega^*[[u]]$, где $\Omega^* = U^*(pt)$ и u – класс кобордизмов обратной последовательности $(\iota_m : m \geq 0)$. Задача – описать стабильно комплексные многообразия $G_j(M)$ размерности $2(n+j)$ такие, что $\Phi(M, \theta, c_\nu) = \sum_{j=0}^\infty [G_j(M)] u^j$. Ясно, что G_0 есть M со структурой c_ν .

Рассмотрим $(S^3)^j = \{(y_1, z_1; \dots; y_j, z_j) \in \mathbb{C}^{2j} : |y_i|^2 + |z_i|^2 = 1, 1 \leq i \leq j\}$ с действием тора T^j по формуле: $t \cdot (y_1, z_1; \dots; y_j, z_j) = (t_1 y_1, t_1^{-1} z_1; \dots; t_j y_j, t_j^{-1} z_j)$, где $t = (t_1, \dots, t_j)$. Фактормногообразие $B_j = (S^3)^j / T^j$ является j -й башней S^2 -расслоений над $B_0 = pt$, на которой имеются комплексные линейные расслоения $\eta_1, \dots, \eta_j$ такие, что $E(\eta_i) = (S^3)^j \times_{T^j} \mathbb{C}$ относительно действия $t \cdot z = t_i^{-1} z$ для $z \in \mathbb{C}$. При $j > 0$ изоморфизм $\tau(B_j) \oplus \mathbb{C}^j \cong (\bar{\eta}_1 \oplus \eta_1) \oplus \dots \oplus (\bar{\eta}_j \oplus \eta_{j-1} \eta_j)$ определяет стабильную комплексную структуру c_j^∂ такую, что $B_j = \partial D_j$, где D_j – пространство ассоциированного расслоения со слоем 3-мерный диск, т.е. $[B_j] = 0, j > 0$.

ТЕОРЕМА 1. *Фактормногообразие $(S^3)^j \times_{T^j} M$, где T^j действует на M по формуле $t \cdot x = \theta(t_j) \cdot x$, задает многообразие $G_j(M)$ для всех $j \geq 0$. Стабильно комплексная структура $c(j)$ на $G_j(M)$ индуцирована расслоением $M \rightarrow G_j(M) \rightarrow B_j$.*

Доказательство использует [1; 1.7] и тот факт, что классифицирующие отображения векторных расслоений $\eta_j \rightarrow B_j$ дают базис в $U_*(\mathbb{C}P^\infty)$, двойственный базису $u^k, k = 0, 1, 2, \dots$, в $U^*(\mathbb{C}P^\infty)$ [5; утверждение 2.2].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Очевидно, что наши $G_j(M^{2n})$ комплексно бордантны несвязным многообразиям $\gamma^j(M^{2n})$ из [6; теорема 6.3]. Таким образом, мы показали, что на геометрических классах гомоморфизм пополнения кольца гомотопических бордизмов $MU_*^{S^1}$ по идеалу аугментации (см. [7; гл. 27]) совпадает с Φ . Более того, $G_j(M^{2n})$ диффеоморфны многообразиям $M^{2(n+j)}$ из [8] и тем самым индуцируют на них стабильно комплексную структуру.

Скажем, что M обладает структурой *тангенциально стабильно комплексного S^1 -многообразия* (M, θ, c_τ) , если заданы некоторое комплексное расслоение $\xi \rightarrow M$ и изоморфизм

$$c_\tau: \tau(M) \oplus \mathbb{C}^{l-n} \rightarrow \xi, \quad (1)$$

где $\tau(M)$ – касательное расслоение, такие, что композиция

$$\rho(t): \xi \xrightarrow{c_\tau^{-1}} \tau(M) \oplus \mathbb{C}^{l-n} \xrightarrow{d\theta(t) \oplus I} \tau(M) \oplus \mathbb{C}^{l-n} \xrightarrow{c_\tau} \xi, \quad t \in S^1, \quad (2)$$

является комплексным преобразованием для каждого $t \in S^1$, где $d\theta(t)$ – дифференциал преобразования $\theta(t)$. Таким образом, (2) задает представление $\rho: S^1 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\xi, \xi)$. С точностью до естественной эквивалентности, структура (M, θ, c_τ) определяет структуру (M, θ, c_ν) , и поэтому можно ввести $\Phi(M, \theta, c_\tau)$ как $\Phi(M, \theta, c_\nu)$ для соответствующей структуры c_ν . С другой стороны, c_ν не всегда определяет эквивариантную c_τ [7; гл. 28].

Пусть $x \in M$ – изолированная неподвижная точка действия θ . Тогда ассоциированное представление $\rho_x: S^1 \rightarrow GL(l, \mathbb{C})$ разлагает слой $\xi_x \cong \mathbb{C}^l$ в сумму $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{l-n}$, где ρ_x действует (без неподвижных точек) как $\rho_{x,1} \oplus \dots \oplus \rho_{x,n}$ на $\mathbb{C}^n$ и тривиально на $\mathbb{C}^{l-n}$. Здесь $\rho_{x,j}$ – одномерное представление веса $\omega_{x,j}$, т.е. $\rho_{x,j}(t)v = t^{\omega_{x,j}}v$. Таким образом, каждой изолированной неподвижной точке x сопоставляется набор весов $\omega_x = (\omega_{x,1}, \dots, \omega_{x,n})$. Более того, изоморфизм $c_{x,\tau}$ (см. (1)) индуцирует ориентацию в касательном пространстве τ_x , используя которую мы вводим $\sigma(x)$ как знак детерминанта линейного отображения

$$\tau_x(M) \xrightarrow{I \oplus 0} \tau_x(M) \oplus \mathbb{C}^{l-n} \xrightarrow{c_{\tau,x}} \xi_x \cong \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{l-n} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^n,$$

где π – проекция на первое слагаемое. Знак важен в торической топологии [9].

ПРИМЕР 3. S^1 -многообразие $(B_1 = S^2, \theta, c_1^\partial)$, где $\theta(t)[z_1 : z_2] = [tz_1 : z_2]$ имеет неподвижные точки $x_1 = [1, 0]$ и $x_2 = [0, 1]$ с весами $\omega_{x_1,1} = \omega_{x_2,1} = 1$ и знаками $\sigma(x_1) = -\sigma(x_2) = 1$.

Пусть $\{[q](u) \in \Omega^*[[u]] : q \in \mathbb{Z}\}$ – степенная система формальной группы $f(u, v)$ в комплексных кобордизмах (см. [10]). Ряд $[q](u) = qu \bmod(u^2)$ однозначно задается соотношениями $[0](u) = 0$ и $[q](u) = f(u, [q-1](u))$ для всех $q \in \mathbb{Z}$.

ТЕОРЕМА 4. Если множество X неподвижных точек действия θ конечно, то в $U^{-2n}(CP^\infty)$ имеет место формула

$$\Phi(M, \theta, c_\tau) = \sum_{x \in X} \sigma(x) \prod_{i=1}^n \frac{1}{[\omega_{x,i}](u)}. \quad (3)$$

Доказательство использует утверждение 3.8 из [1] и построение $\sigma(x)$, см. выше.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Для почти комплексного S^1 -многообразия M мы можем положить $l = n$ в (1). Тогда $\sigma(x) = 1$ для всех $x \in X$ и формула (3) переходит в формулу Кричевера, [2; (2.7)].

Теоремы 1 и 4 очевидным образом переформулируются для случая эффективного действия тора T^k на $2n$ -мерном многообразии, $k \leq n$.

Список литературы

- [1] D. Quillen, *Adv. Math.*, **7**:1 (1971), 29–56. [2] И. М. Кричевер, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **38**:6 (1974), 1289–1304. [3] И. М. Кричевер, *Матем. заметки*, **47**:2 (1990), 34–45, 158. [4] T. tom Dieck, *Topology*, **9**:4 (1970), 345–358. [5] N. Ray, *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2), **29**:3 (1986), 413–422. [6] D. P. Sinha, *Amer. J. Math.*, **123**:4 (2001), 577–605. [7] J. P. May (ed.), *Equivariant homotopy and cohomology theory*, CBMS Reg. Conf. Ser. Math., **91**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996. [8] П. Коннер, Э. Флойд, *Гладкие периодические отображения*, Мир, М., 1969. [9] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, N. Ray, *Mosc. Math. J.*, **7**:2 (2007). [10] С. П. Новиков, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **31**:4 (1967), 855–951.

В. М. Бухштабер (V. M. Buchstaber)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: buchstab@mi.ras.ru

Представлено С. П. Новиковым

Принято редколлегией

07.12.2006

Н. Рэй (N. Ray)

School of Mathematics, University of Manchester, England

E-mail: nige@ma.man.ac.uk