Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Гордиенко, Коразмерности коммутатора длины 4,
УМН, 2007, том 62, выпуск 1, 191–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm5696>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 12:34:21

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Коразмерности коммутатора длины 4

А. С. Гордиенко

В 80-х годах С. А. Амицуrom и А. Регевом были выдвинуты гипотезы об асимптотическом поведении коразмерностей тождеств ассоциативных алгебр. Гипотеза С. А. Амицура была доказана М. В. Зайцевым и А. Джамбруно [1] в 1999 г. В данной работе гипотеза Регева доказывается для соотношения $[x_1, x_2, x_3, x_4] \equiv 0$ (естественного обобщения $[x_1, x_2, x_3] \equiv 0$ – базиса тождеств алгебры Грассмана [2]). Для этого строится такая конечномерная супералгебра, что $[x_1, x_2, x_3, x_4] \equiv 0$ – базис тождеств ее грассмановой оболочки.

Совокупность $\text{Id}(A)$ тождеств всякой алгебры A является T -идеалом в свободной алгебре $F\langle X \rangle$ на счетном множестве $X = \{x_1, x_2, \dots\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обозначим через P_n пространство полилинейных многочленов от некоммутирующих переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, тогда число $c_n(A) \stackrel{\text{def}}{=} \dim \frac{P_n}{P_n \cap \text{Id}(A)}$ называется n -й коразмерностью алгебры A . Говорят, что в алгебре A выполнена гипотеза Регева, если существуют числа $C \in \mathbb{R}$ и $d, q \in \mathbb{Z}$, причем $d \geq 0$, такие, что $c_n(A) \sim Cn^{\frac{q}{2}}d^n$ при $n \rightarrow \infty$. (Здесь $f \sim g$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f}{g} = 1$.) Если $f \in F\langle X \rangle$, а $T(f)$ – T -идеал, порожденный многочленом f , то число $c_n(f) \stackrel{\text{def}}{=} \dim \frac{P_n}{P_n \cap T(f)}$ называется n -й коразмерностью тождества f .

ТЕОРЕМА. Пусть $\text{char } F = 0$, тогда $c_n([x_1, x_2, x_3, x_4]) = 2^{n-1} + 2\binom{n}{3} + 2\binom{n}{4}$, т.е. для коммутатора длины 4 выполнена гипотеза Регева.

ЛЕММА 1. Пусть $\text{char } F \neq 3$, тогда из тождества $[x_1, x_2, x_3, x_4] \equiv 0$ следуют тождества

$$[[x, y], [z, w]] \equiv 0, \quad (1)$$

$$[x, y][z, w, t] \equiv 0, \quad (2)$$

$$[x, y][z, w][r, t] + [x, y][z, t][r, w] \equiv 0. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (1) получается из тождества Якоби.

Пользуясь тем, что $[y, w, zt, x], [xy, z, w, t] \in T([x_1, x_2, x_3, x_4])$, получаем:

$$[x, z][y, w, t] + [x, t][y, w, z] \equiv 0, \quad [x, z][y, w, t] + [y, z][x, w, t] \equiv 0.$$

Тогда (2) следует из того, что

$$[x, y][z, w, t] = [x, y][z, t, w] - [x, y][w, t, z] \equiv -2[x, y][z, w, t].$$

Тождество (3) получается из того, что $[x, y][zr, w, t] \in T([x_1, x_2, x_3, x_4])$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-01-00485).

Отсюда следует

ЛЕММА 2. *Всякий многочлен $f \in P_n$ приводится по модулю $T([x_1, x_2, x_3, x_4])$ к линейной комбинации многочленов вида*

- 1) $x_1 x_2 \cdots x_n$;
- 2) $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} [x_{l_1}, x_{l_2}]$, где $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, $l_1 < l_2$;
- 3) $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} [x_{l_1}, x_{l_2}, x_{l_3}]$, где $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, $l_1 < l_2$, $l_1 < l_3$;
- 4) $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} [x_{l_1}, x_{l_2}] [x_{l_3}, x_{l_4}]$, где $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, $l_1 < l_2$, $l_3 < l_4$, $l_1 < l_3$;
- 5) $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} [x_{j_1}, x_{j_2}] [x_{j_3}, x_{j_4}] [x_{j_5}, x_{j_6}] \cdots [x_{j_{m-1}}, x_{j_m}]$, где $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_m$, $m \geq 6$.

Далее считаем, что $\text{char } F = 0$. Пусть

$$B = \text{alg}_F \{1, a, b, c, d, e \mid a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 0, e^3 = e; ab = -ba, bc = -cb, ca = -ca; ad = -da, cd = dc, bd = db; ae = ea = be = eb = ce = ec = de = ed = 0\}.$$

Заметим, что это супералгебра: $B = B^{(0)} + B^{(1)}$, где $B^{(0)}$ порождена 1, a, b, c, d, e^2 , а $B^{(1)} = Fe$. Пусть $G = G^{(0)} + G^{(1)}$ – алгебра Грассмана с 1. Обозначим через e_j , $j \in \mathbb{N}$, ее порождающие, $e_i e_j = -e_j e_i$, где $i, j \in \mathbb{N}$. Тогда в грассмановой оболочке $G(B) = G^{(0)} \otimes B^{(0)} + G^{(1)} \otimes B^{(1)}$ супералгебры B выполнено тождество $[x_1, x_2, x_3, x_4] \equiv 0$.

ЛЕММА 3. *Многочлены из формулировки леммы 2 линейно независимы по модулю $\text{Id}(G(B)) \supseteq T([x_1, x_2, x_3, x_4])$. В частности, $\text{Id}(G(B)) = T([x_1, x_2, x_3, x_4])$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть линейная комбинация этих многочленов является тождеством, т.е. лежит в $\text{Id}(G(B))$. Покажем, что все коэффициенты при многочленах 1)–5) равны 0. Для этого подставим $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1 \otimes 1$ для слагаемых $x_1 x_2 \cdots x_n$; $x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_k} = 1 \otimes 1$, $x_{l_1} = e_1 \otimes e$, $x_{l_2} = e_2 \otimes e$ для $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} [x_{l_1}, x_{l_2}]$; $x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_k} = 1 \otimes 1$, $x_{l_1} = 1 \otimes d$, $x_{l_2} = 1 \otimes a$, $x_{l_3} = 1 \otimes b$ для $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} [x_{l_1}, x_{l_2}, x_{l_3}]$; $x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_k} = 1 \otimes 1$, $x_{l_1} = 1 \otimes a$, $x_{l_2} = 1 \otimes d$, $x_{l_3} = 1 \otimes b$, $x_{l_4} = 1 \otimes c$ для $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} [x_{l_1}, x_{l_2}] [x_{l_3}, x_{l_4}]$; $x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_k} = 1 \otimes 1$, $x_{j_l} = e_l \otimes e$, где $l = 1, \dots, m$, для $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} [x_{j_1}, x_{j_2}] [x_{j_3}, x_{j_4}] [x_{j_5}, x_{j_6}] \cdots [x_{j_{m-1}}, x_{j_m}]$.

Второе утверждение леммы 3 следует из того, что всякое тождество в случае $\text{char } F = 0$ эквивалентно конечному набору полилинейных тождеств [3], [4], и леммы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. $c_n([x_1, x_2, x_3, x_4])$ равно числу многочленов 1)–5), т.е. $1 + \binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} + 3\binom{n}{4} + \sum_{k=3}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} = 2^{n-1} + 2\binom{n}{3} + 2\binom{n}{4}$.

Список литературы

- [1] A. Giambruno, M. Zaicev, *Adv. Math.*, **142:2** (1999), 221–243. [2] D. Krakowski, A. Regev, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **181** (1973), 429–438. [3] V. Drensky, *Free algebras and PI-algebras: graduate course in algebra*, Springer-Verlag, Singapore, 2000. [4] Ю. А. Бахтурин, *Тождества в алгебрах Ли*, Наука, М., 1985.

А. С. Гордиенко (A. S. Gordienko)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
 E-mail: gordienko_a_s@mail.ru

Представлено А. В. Михалёвым
 Принято редколлегией
 08.12.2006