Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Д. Чуешов, Теория функционалов, однозначно определяющих асимптотическую динамику бесконечномерных диссипативных систем, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 4, 77–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm57>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:09:10

УДК 517.94

ТЕОРИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ, ОДНОЗНАЧНО
ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ АСИМПТОТИЧЕСКУЮ ДИНАМИКУ
БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ

И. Д. ЧУЕШОВ

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	77
§ 1. Понятие множества определяющих функционалов	79
§ 2. Дефект полноты множества функционалов	87
§ 3. Оценки дефекта полноты в соболевских пространствах	93
§ 4. Определяющие функционалы для полулинейных параболических уравнений	101
§ 5. Определяющие функционалы для уравнений второго порядка по вре- мени	112
§ 6. О граничных определяющих функционалах	117
Список литературы	122

Введение

Основными объектами, возникающими при исследовании асимптотического поведения бесконечномерных диссипативных динамических систем, являются аттракторы. Их изучение позволяет ответить на ряд вопросов принципиального характера о свойствах предельных режимов, которые могут возникнуть в рассматриваемой системе. В настоящее время выработаны довольно универсальные подходы и методы, позволяющие доказывать существование и конечномерность глобальных аттракторов для широкого класса динамических систем, порождаемых нелинейными уравнениями в частных производных (см., например, [1]–[5] и ссылки, приведенные в этих работах). Однако детально исследовать структуру аттрактора удастся лишь для весьма ограниченного класса задач. В этой связи важным является вопрос об отыскании минимальных (или близких к минимальным) множеств естественных параметров задачи, которые однозначно определяют асимптотическое поведение системы. Впервые данный вопрос рассматривался для двумерной системы Навье–Стокса в работах [6] и [7], где было показано, что асимптотическое поведение решений полностью определяется динамикой первых N мод Фурье, если N достаточно велико. После этих работ подобные результаты были получены для других параметров и уравнений (см., например,

[8]–[21] и ссылки, приведенные в этих работах, а также в обзоре [4]). Были введены понятия определяющих узлов [8]–[10] и определяющих локальных объемных средних [12], [13]. Обсуждался вопрос о связи проблемы существования конечного числа определяющих параметров с некоторыми задачами теории интерполяции [17]–[21].

В данной статье развивается общая теория определяющих функционалов, позволяющая, во-первых, охватить все указанные выше результаты с единой точки зрения, а во-вторых, предложить достаточно простые условия, при которых множество линейных функционалов на фазовом пространстве однозначно определяет своими значениями на траекториях системы ее асимптотическое поведение. Предлагаемый здесь подход опирается на понятие дефекта полноты множества функционалов и привлекает некоторые идеи и результаты теории аппроксимаций бесконечномерных пространств.

Кратко опишем структуру работы.

В § 1 вводятся и обсуждаются два понятия определяющих функционалов. Они представляют собой далеко идущие расширения понятий определяющих мод, введенных соответственно Фояшем и Проди [6] и Ладыженской [7]. Приведено несколько достаточно простых утверждений общего характера о существовании конечных семейств определяющих функционалов. Утверждения подобного типа, с одной стороны, неявно привлекались ранее при изучении конкретных задач, а с другой, они дают представление о том, какие именно свойства динамической системы гарантируют конечность числа определяющих элементов.

В § 2 вводится понятие дефекта полноты $\varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H)$ системы функционалов $\mathcal{L}$ относительно пары пространств $V \subset H$ и изучаются его свойства. При этом оказалось, что для широкого класса диссипативных систем условие малости дефекта $\varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H)$ является достаточным для того, чтобы множество $\mathcal{L}$ функционалов на V было определяющим. Установлена также связь величины $\varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H)$ с поперечником вложения Колмогорова пространства V в H и предложены довольно простые процедуры, позволяющие эффективно оценивать дефекты полноты. Результаты этого параграфа используются в § 3 для вычисления оценок дефектов полноты для двух, важных с точки зрения приложений, семейств функционалов на соболевских пространствах. Речь идет об обобщенных локальных объемных средних и о наборе δ -функций (узлов). Полученные оценки по числу (N) функционалов имеют тот же порядок, что и соответствующий N -поперечник Колмогорова, и являются неулучшаемыми. Результаты § 3 позволяют, в частности, в последующих разделах установить существование конечных семейств определяющих функционалов для ряда диссипативных систем, порождаемых нелинейными уравнениями в частных производных, а также получить наилучшие (в определенном смысле) оценки числа этих функционалов.

Оставшиеся разделы статьи (§ 4–§ 6) посвящены приложениям. В § 4 рассматриваются полулинейные параболические уравнения. В качестве основных примеров обсуждаются двумерная система Навье–Стокса и система уравнений Ходжкина–Хаксли, описывающая передачу нервных импульсов. Оказалось, что в этих примерах определяющие функционалы можно также задавать и на пространствах, не совпадающих с фазовым (и не содержащих его внутри себя). Кроме того, на примере системы Ходжкина–Хаксли продемонстрирована роль регулярности решений по Жевре при построении двухточечного множества определяющих узлов. Построению определяющих функционалов для нелинейных уравнений второго порядка по времени посвящен § 5. Здесь обсуждается также случай уравнений с запаздыванием. В качестве примера

рассматривается задача о нелинейных колебаниях упругой полой оболочке в потенциальном линейаризованном потоке газа. В заключительном §6 показано, что для некоторых начально-краевых задач с нелинейными граничными условиями определяющие функционалы можно задавать лишь на границе области.

§ 1. Понятие множества определяющих функционалов

Пусть в вещественном рефлексивном банаховом пространстве H задано некоторое неавтономное дифференциальное уравнение:

$$(1.1) \quad \frac{du}{dt} = F(u, t), \quad t > 0, \quad u|_{t=0} = u_0.$$

Предположим, что $\mathcal{W}$ – некоторый класс решений задачи (1.1), определенных на полуоси $\mathbb{R}_+ \equiv \{t : t \geq 0\}$ и таких, что для каждого $u(t) \in \mathcal{W}$ существует момент времени $t_0 > 0$ такой, что

$$(1.2) \quad u(t) \in C(t_0, +\infty; H) \cap L_{\text{loc}}^2(t_0, +\infty; V),$$

где V – некоторое рефлексивное банахово пространство, непрерывно вложенное в H . Здесь и в дальнейшем $C(a, b; X)$ – пространство сильно непрерывных функций на $[a, b]$ со значениями в X , обозначение $L_{\text{loc}}^2(a, b; X)$ имеет аналогичный смысл. Ниже используются также обозначения $\|\cdot\|_H$ и $\|\cdot\|_V$ для норм в пространствах H и V , $\|\cdot\|_H \leq \|\cdot\|_V$.

В основу приведенного ниже определения положено свойство, установленное в [6] для мод Фурье решений двумерной системы Навье–Стокса с периодическими граничными условиями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $\mathcal{L} = \{l_j : j = 1, \dots, N\}$ – множество линейных непрерывных функционалов на V . Тогда $\mathcal{L}$ называется *множеством асимптотически $(V, H, \mathcal{W})$ -определяющих функционалов* (или элементов) задачи (1.1), если для любой пары ее решений $u, v \in \mathcal{W}$ из условия

$$(1.3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+1} |l_j(u(\tau)) - l_j(v(\tau))|^2 d\tau = 0 \quad \text{для } j = 1, \dots, N$$

вытекает, что

$$(1.4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - v(t)\|_H = 0.$$

В основе всех известных к настоящему моменту утверждений о существовании конечных множеств асимптотически определяющих функционалов фактически лежит следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $\mathcal{L} = \{l_j : j = 1, \dots, N\}$ – некоторая совокупность линейных непрерывных функционалов на V . Предположим, что на $H \times \mathbb{R}_+$ существует непрерывная функция $\mathcal{V}(u, t)$ со значениями в $\mathbb{R}_+$, обладающая свойствами:

а) найдутся положительные числа α и σ такие, что

$$(1.5) \quad \mathcal{V}(u, t) \geq \alpha \cdot \|u\|^\sigma \quad \text{для всех } u \in H, \quad t \in \mathbb{R}_+;$$

б) для любой пары решений $u(t), v(t) \in \mathcal{W}$ задачи (1.1) найдутся момент времени $t_0 > 0$, локально интегрируемая на интервале $[t_0, \infty)$ функция $\psi(t)$ со свойствами

$$(1.6) \quad \gamma_\psi^+ \equiv \varliminf_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+a} \psi(\tau) d\tau > 0$$

и

$$(1.7) \quad \Gamma_\psi^+ \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+a} \max\{0, -\psi(\tau)\} d\tau < \infty$$

при некотором $a > 0$ и положительная константа C такие, что для всех $t \geq s \geq t_0$ выполнено соотношение

$$(1.8) \quad \begin{aligned} & \mathcal{V}(u(t) - v(t), t) + \int_s^t \psi(\tau) \cdot \mathcal{V}(u(\tau) - v(\tau), \tau) d\tau \\ & \leq \mathcal{V}(u(s) - v(s), s) + C \cdot \int_s^t \max_{j=1, \dots, N} |l_j(u(\tau)) - l_j(v(\tau))|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Тогда $\mathcal{L}$ является множеством асимптотически $(V, H, \mathcal{W})$ -определяющих функционалов задачи (1.1).

Очевидно, что доказательство этой теоремы вытекает из следующего варианта леммы Гронуолла.

ЛЕММА 1.1. Пусть $\psi(t)$ и $g(t)$ – локально интегрируемые на интервале $[t_0, \infty)$ функции такие, что для $\psi(t)$ выполнены соотношения (1.6) и (1.7), а $g(t)$ неотрицательна и обладает свойством

$$(1.9) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+a} g(\tau) d\tau = 0, \quad a > 0.$$

Предположим, что $w(t)$ – неотрицательная непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству

$$(1.10) \quad w(t) + \int_s^t \psi(\tau) \cdot w(\tau) d\tau \leq w(s) + \int_s^t g(\tau) d\tau$$

для всех $t \geq s \geq t_0$. Тогда $w(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Отметим, что данный вариант леммы Гронуолла использовался многими авторами (см., например, [2], [8], [13], [14], [22]). Приведенная здесь формулировка фактически совпадает с утверждением, содержащимся в [13].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.1. Укажем основные этапы рассуждений (детали см. в [13] или [22]). Из (1.10) вытекает, что

$$(1.11) \quad w(t) \leq w(s) \cdot \exp \left\{ - \int_s^t \psi(\tau) d\tau \right\} + \int_s^t g(\tau) \cdot \exp \left\{ - \int_\tau^t \psi(\sigma) d\sigma \right\} d\tau$$

для всех $t \geq s \geq t_0$. Используя свойства (1.6), (1.7), легко обнаружить, что существуют числа $t^* \geq t_0$, $a_0 > 0$, $b_0 > 0$ такие, что

$$\int_s^t \psi(\tau) d\tau \geq a_0 \cdot (t - s) - b_0, \quad t \geq s \geq t^*.$$

Поэтому из (1.11) вытекает, что

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} w(t) \leq C \cdot \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_s^t g(\tau) \cdot \exp \{ -a_0 \cdot (t - \tau) \} d\tau.$$

Далее, разбивая интеграл в правой части этого неравенства в сумму интегралов по интервалам длины a , как и в [13], [22], можно показать, что

$$(1.12) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} w(t) \leq C \cdot \sup_{\sigma \geq s} \int_\sigma^{\sigma+a} g(\tau) d\tau.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы 1.1.

В том случае, когда задача (1.1) представляет собой задачу Коши для квазилинейного уравнения в частных производных, в качестве функции $\mathcal{V}(u, t)$ при доказательстве существования конечного множества асимптотически определяющих элементов обычно фигурирует некоторая норма фазового пространства H . Например, для параболических задач часто используется следующее утверждение, вытекающее из теоремы 1.1.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть V и H – рефлексивные банаховы пространства, причем V непрерывно вложено в H . Предположим, что для любой пары решений $u(t), v(t) \in \mathcal{W}$ задачи (1.1) найдется момент времени $t_0 > 0$ такой, что для всех $t \geq s \geq t_0$ выполнено соотношение

$$(1.13) \quad \|u(t) - v(t)\|_H^2 + \nu \int_s^t \|u(\tau) - v(\tau)\|_V^2 d\tau \leq \|u(s) - v(s)\|_H^2 + \int_s^t \phi(\tau) \cdot \|u(\tau) - v(\tau)\|_H^2 d\tau.$$

Здесь $\nu > 0$, а положительная локально интегрируемая на интервале $[t_0, \infty)$ функция $\phi(t)$ удовлетворяет условию

$$(1.14) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \int_t^{t+a} \phi(\tau) d\tau \leq R$$

для некоторого $a > 0$, где $R > 0$ – некоторая константа, не зависящая от $u(t)$ и $v(t)$. Пусть $\mathcal{L} = \{l_j : j = 1, \dots, N\}$ – некоторая совокупность линейных непрерывных функционалов на V , обладающая свойством

$$(1.15) \quad \|w\|_H \leq C_{\mathcal{L}} \cdot \max_{j=1, \dots, N} |l_j(w)| + \varepsilon_{\mathcal{L}} \cdot \|w\|_V$$

для любого $w \in V$, где $C_{\mathcal{L}}$ и $\varepsilon_{\mathcal{L}}$ – положительные константы. Тогда $\mathcal{L}$ является множеством асимптотически $(V, H, \mathcal{W})$ -определяющих функционалов задачи (1.1) при условии, что $\varepsilon_{\mathcal{L}} < \sqrt{\nu/R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.15) вытекает, что

$$(1.16) \quad \|w\|_V^2 \geq (1 + \delta)^{-1} \cdot \varepsilon_{\mathcal{L}}^{-2} \cdot \|w\|_H^2 - C_{\mathcal{L}, \delta} \cdot \max_{j=1, \dots, N} |l_j(w)|^2$$

для любого $\delta > 0$. Поэтому из (1.13) имеем, что

$$(1.17) \quad \|u(t) - v(t)\|_H^2 + \int_s^t \psi(\tau) \cdot \|u(\tau) - v(\tau)\|_H^2 d\tau \\ \leq \|u(s) - v(s)\|_H^2 + \nu C_{\mathcal{L}, \delta} \cdot \int_s^t \max_{j=1, \dots, N} |l_j(u(\tau) - v(\tau))|^2 d\tau,$$

где $\psi(t) = \nu(1 + \delta)^{-1} \varepsilon_{\mathcal{L}}^{-2} - \phi(t)$. Используя (1.14) и применяя теорему 1.1 с $\mathcal{V}(u, t) = \|u\|^2$, получаем утверждение следствия 1.1.

Возможны и другие подходы к введению понятия определяющих функционалов. Приведенное ниже определение представляет собой распространение на общую ситуацию установленного О. А. Ладыженской [7] свойства траекторий, лежащих в глобальном аттракторе двумерной системы уравнений Навье–Стокса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть $\overline{\mathcal{W}}$ – класс решений задачи (1.1), определенных на всей вещественной оси $\mathbb{R}$, такой, что $\overline{\mathcal{W}} \subset L_{\text{loc}}^2(-\infty, +\infty; V)$. Совокупность $\mathcal{L} = \{l_j : j = 1, \dots, N\}$ линейных непрерывных функционалов на V называется *множеством $(V, \overline{\mathcal{W}})$ -определяющих функционалов* (или элементов) задачи (1.1), если для любой пары ее решений $u, v \in \overline{\mathcal{W}}$ из условия

$$(1.18) \quad l_j(u(t)) = l_j(v(t)) \text{ для почти всех } t \in \mathbb{R} \text{ и } j = 1, \dots, N$$

вытекает, что $u(t) \equiv v(t)$.

Легко может быть установлен следующий аналог теоремы 1.1.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $\mathcal{L} = \{l_j : j = 1, \dots, N\}$ – некоторая совокупность линейных непрерывных функционалов на V . Пусть $\overline{\mathcal{W}}$ – класс решений задачи (1.1), определенных на всей вещественной оси $\mathbb{R}$, такой, что

$$(1.19) \quad \overline{\mathcal{W}} \subset C(-\infty, +\infty; H) \cap L_{\text{loc}}^2(-\infty, +\infty; V).$$

Предположим, что на $H \times \mathbb{R}$ существует непрерывная функция $\mathcal{V}(u, t)$ со значениями в $\mathbb{R}$, обладающая свойствами:

а) найдутся положительные числа α и σ такие, что

$$(1.20) \quad \mathcal{V}(u, t) \geq \alpha \cdot \|u\|^\sigma \text{ для всех } u \in H, \quad t \in \mathbb{R};$$

б) для любых $u(t), v(t) \in \overline{\mathcal{W}}$ выполнено соотношение

$$(1.21) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{V}(u(t) - v(t), t) < \infty;$$

в) для любой пары решений $u(t), v(t) \in \overline{\mathcal{W}}$ задачи (1.1) найдутся локально интегрируемая на оси $\mathbb{R}$ функция $\psi(t)$ со свойствами

$$(1.22) \quad \gamma_{\psi}^{-} \equiv \varliminf_{t \rightarrow -\infty} \int_t^{t+a} \psi(\tau) d\tau > 0,$$

$$(1.23) \quad \Gamma_{\psi}^{-} \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow -\infty} \int_t^{t+a} \max\{0, -\psi(\tau)\} d\tau < \infty$$

при некотором $a > 0$ и положительная константа C такие, что для всех $t \geq s$ выполнено соотношение (1.8).

Тогда $\mathcal{L}$ является множеством $(V, \overline{\mathcal{W}})$ -определяющих функционалов задачи (1.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.18), (1.8) и (1.11) вытекает, что функция $w(t) = \mathcal{V}(u(t) - v(t), t)$ удовлетворяет неравенству

$$(1.24) \quad w(t) \leq w(s) \cdot \exp\left\{-\int_s^t \psi(\tau) d\tau\right\}$$

для всех $t \geq s$. Используя свойства (1.22), (1.23), легко обнаружить, что существуют числа $s^*, a_0 > 0, b_0 > 0$ такие, что

$$\int_{s_1}^{s_2} \psi(\tau) d\tau \geq a_0 \cdot (s_2 - s_1) - b_0, \quad s_1 \leq s_2 \leq s^*.$$

Это соотношение и свойство ограниченности (1.21) позволяют при фиксированном t совершить в (1.24) предельный переход $s \rightarrow -\infty$ и получить искомое утверждение.

Так же, как и ранее, выбирая в теореме 1.2 $\mathcal{V}(u, t) = \|u\|^2$, получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Пусть V и H – рефлексивные банаховы пространства, причем V непрерывно вложено в H , и пусть $\overline{\mathcal{W}}$ – класс решений задачи (1.1), определенных на всей вещественной оси $\mathbb{R}$, обладающий свойством (1.19) и такой, что

$$(1.25) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t)\|_H < \infty \quad \text{для всех} \quad u(t) \in \overline{\mathcal{W}}.$$

Предположим, что для любых $u(t), v(t) \in \overline{\mathcal{W}}$ и для всех вещественных $t \geq s$ выполняется соотношение (1.13), где $\nu > 0$, а положительная локально интегрируемая на оси $\mathbb{R}$ функция $\phi(t)$ удовлетворяет условию

$$(1.26) \quad \overline{\lim}_{s \rightarrow -\infty} \frac{1}{a} \int_s^{s+a} \phi(\tau) d\tau \leq R$$

для некоторого $a > 0$, где $R > 0$ – некоторая константа, не зависящая от $u(t)$ и $v(t)$. Пусть $\mathcal{L} = \{l_j : j = 1, \dots, N\}$ – некоторая совокупность линейных непрерывных функционалов на V , обладающая свойством (1.15) с $\varepsilon_{\mathcal{L}} < \sqrt{\nu/R}$. Тогда $\mathcal{L}$ является множеством $(V, \overline{\mathcal{W}})$ -определяющих функционалов задачи (1.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как и при доказательстве следствия 1.1, используя (1.16), получаем (1.17) для всех $t \geq s$. Условие (1.26) позволяет убедиться в том, что для функции $\psi(t) = \nu(1 + \delta)^{-1} \varepsilon_{\mathcal{L}}^{-2} - \phi(t)$ выполнены соотношения (1.22) и (1.23) при условии, что $\varepsilon_{\mathcal{L}} < \sqrt{\nu/R}$, а $\delta > 0$ – достаточно мало. Поэтому теорема 1.2 дает искомое утверждение.

Применение следствий 1.1 и 1.2 для доказательства конечности множества $\mathcal{L}$ определяющих элементов требует выполнения неравенств (1.13), (1.14) или (1.25), (1.26), а также соотношения (1.15) с достаточно малой константой $\varepsilon_{\mathcal{L}}$. Как показывает анализ конкретных примеров (см. [6]–[21]), выполнение оценок (1.13), (1.14), (1.25), (1.26) связано, в основном, со свойствами диссипативности системы. Методы их получения достаточно хорошо разработаны (см. [1]–[3]), соответствующие константы ν и R во многих случаях либо близки к оптимальным, либо явно оцениваются через параметры, входящие в уравнения. Поэтому вопрос об описании конечных наборов функционалов, однозначно определяющих асимптотическую динамику процесса, сводится к изучению множеств функционалов, для которых оценка (1.15) справедлива при достаточно малых $\varepsilon_{\mathcal{L}}$. Это изучение удобно провести, опираясь на понятие дефекта полноты системы функционалов относительно пары пространств (см. §2 данной статьи).

Другой класс утверждений о существовании определяющих элементов получается для задач, обладающих асимптотически полными инерциальными многообразиями (ИМ) (о понятии и свойствах инерциальных многообразий см., например, [2], [4], [23]–[26] и ссылки, содержащиеся в этих работах). Приведенное ниже определение ИМ несколько отличается от стандартного. Это сделано для того, чтобы охватить максимально широкий класс уравнений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Пусть $\mathcal{M}_t$ – конечномерная поверхность в пространстве $V \times \mathbb{R}$ вида

$$(1.27) \quad \mathcal{M}_t = \{p + \Phi(p, t) : p \in PV, \Phi: PV \times \mathbb{R} \rightarrow (I - P)V\},$$

где P – конечномерный проектор в V , а $\Phi(\cdot, \cdot)$ – непрерывное отображение, удовлетворяющее условию Липшица

$$(1.28) \quad \|\Phi(p_1, t) - \Phi(p_2, t)\|_V \leq L \cdot \|p_1 - p_2\|_V$$

для всех $p_j \in PV$ и $t \in \mathbb{R}$, где L – положительная константа. Пусть $\mathcal{W}$ – некоторый класс решений задачи (1.1), определенных на полуоси $\mathbb{R}_+$ и обладающих тем свойством, что для каждого $u(t) \in \mathcal{W}$ существует момент t_0 такой, что

$$(1.29) \quad u(t) \in C(t_0, +\infty; V).$$

Тогда $\mathcal{M}_t$ называется *асимптотически полным инерциальным многообразием* задачи (1.1) в классе решений $\mathcal{W}$, если

- а) поверхность $\mathcal{M}_t$ является инвариантной, т.е. для любого $u \in \mathcal{W}$ из условия $u(s) \in \mathcal{M}_s$ вытекает, что $u(t) \in \mathcal{M}_t$ для всех $t \geq s$;
- б) выполнено условие асимптотической полноты, т.е. для любого $u \in \mathcal{W}$ существует решение $u^* \in \mathcal{W}$ такое, что $u^*(t) \in \mathcal{M}_t$ для всех $t > 0$ и

$$(1.30) \quad \|u(t) - u^*(t)\|_V \leq C \cdot e^{-\gamma t}$$

при $t \geq t_0$, где C, γ и t_0 – некоторые положительные константы.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть V и H – рефлексивные банаховы пространства, причем V непрерывно вложено в H , и пусть $\mathcal{W}$ – класс решений задачи (1.1), обладающих свойством (1.29). Предположим, что задача (1.1) в классе $\mathcal{W}$ имеет асимптотически полное инерциальное многообразие $\mathcal{M}_t$, причем проектор P , фигурирующий в определении $\mathcal{M}_t$, продолжается по непрерывности до отображения из H в V , т.е. существует константа $\Lambda = \Lambda(P) > 0$ такая, что

$$(1.31) \quad \|Pv\|_V \leq \Lambda \cdot \|v\|_H, \quad v \in V.$$

Тогда если $\mathcal{L} = \{l_j : j = 1, \dots, N\}$ – множество линейных непрерывных функционалов на V , обладающее свойством (1.15) с константой $\varepsilon_{\mathcal{L}}$, удовлетворяющей условию

$$(1.32) \quad \varepsilon_{\mathcal{L}} < (1 + L)^{-1} \Lambda^{-1},$$

то отображение $r_{\mathcal{L}}$, действующее из V в $\mathbb{R}^N$ по формуле $r_{\mathcal{L}}u = \{l_j(u)\}_{j=1}^N$, является липшицевым гомеоморфизмом из $\mathcal{M}_t$ в $\mathbb{R}^N$ при каждом $t \in \mathbb{R}$. При этом множество функционалов $\mathcal{L}$ для задачи (1.1) является асимптотически определяющим в следующем смысле: для любой пары решений $u_1, u_2 \in \mathcal{W}$ из условия

$$(1.33) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |l_j(u_1(t)) - l_j(u_2(t))| = 0 \quad \text{для } j = 1, \dots, N$$

вытекает, что

$$(1.34) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|u_1(t) - u_2(t)\|_V = 0.$$

Отметим, что утверждение, подобное теореме 1.3, было установлено ранее для уравнения Курамото–Сивапинского

$$u_t + u_{xxxx} + u_{xx} + u \cdot u_x = 0, \quad x \in (0, L), \quad t > 0,$$

с периодическими на $[0, L]$ граничными условиями в работе [12] в том случае, когда $\{l_j\}$ – множество равномерно распределенных на $[0, L]$ узлов, т.е. $l_j(u) = u(jh)$, где $h = L/N$, $j = 1, \dots, N$. Некоторое обсуждение общей ситуации имеется также в [17].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. Пусть $u_1, u_2 \in \mathcal{M}_t$. Тогда

$$u_j = Pu_j + \Phi(Pu_j, t), \quad j = 1, 2.$$

При этом (1.28) дает, что

$$(1.35) \quad \|u_1 - u_2\|_V \leq (1 + L) \cdot \|Pu_1 - Pu_2\|_V, \quad u_1, u_2 \in \mathcal{M}_t.$$

Следовательно, используя (1.15) и (1.31), получаем, что

$$\|u_1 - u_2\|_H \leq C_{\mathcal{L}} \cdot \max_{j=1, \dots, N} |l_j(u_1 - u_2)| + \varepsilon_{\mathcal{L}} \cdot (1 + L) \cdot \Lambda \cdot \|u_1 - u_2\|_H.$$

Отсюда при условии (1.32) получаем, что

$$(1.36) \quad \|u_1 - u_2\|_H \leq C_{\mathcal{L}} \cdot (1 - \varepsilon_{\mathcal{L}} \cdot (1 + L) \cdot \Lambda)^{-1} \cdot \max_{j=1, \dots, N} |l_j(u_1 - u_2)|.$$

С другой стороны, непрерывность функционалов l_j и неравенства (1.35), (1.31) дают, что

$$(1.37) \quad |l_j(u_1 - u_2)| \leq \tilde{C}_{\mathcal{L}} \cdot (1 + L) \cdot \Lambda \cdot \|u_1 - u_2\|_H.$$

Из оценок (1.36) и (1.37) вытекает, что

$$(1.38) \quad c_{1, \mathcal{L}} \cdot \|u_1 - u_2\|_H \leq \max_{j=1, \dots, N} |l_j(u_1 - u_2)| \leq c_{2, \mathcal{L}} \cdot \|u_1 - u_2\|_H.$$

Кроме того, (1.31) и (1.35) дают, что

$$c_3 \cdot \|u_1 - u_2\|_V \leq \|u_1 - u_2\|_H \leq c_4 \cdot \|u_1 - u_2\|_V, \quad u_1, u_2 \in \mathcal{M}_t.$$

Поэтому соотношение (1.38) означает, что отображение $r_{\mathcal{L}}$ является липшицевым гомеоморфизмом из $\mathcal{M}_t$ в $\mathbb{R}^N$ при каждом $t \in \mathbb{R}$.

Докажем теперь второе утверждение теоремы 1.3. Пусть $u_1(t), u_2(t) \in \mathcal{W}$. С помощью (1.35) легко убедиться в том, что

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq (1 + L) \cdot \|Pu_1(t) - Pu_2(t)\|_V + \sum_{j=1, 2} \|(1 - P)u_j(t) - \Phi(Pu_j(t), t)\|_V.$$

Из свойства асимптотической полноты (1.30) вытекает, что

$$\|(1 - P)u_j(t) - \Phi(Pu_j(t), t)\|_V \leq C \cdot e^{-\gamma t}, \quad t > t_0.$$

Поэтому (1.31) приводит к оценке

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq (1 + L) \cdot \Lambda \|u_1(t) - u_2(t)\|_H + C \cdot e^{-\gamma t}, \quad t > t_0.$$

Следовательно, при условии (1.32) соотношение (1.15) дает, что

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq A_{\mathcal{L}} \cdot \max_{j=1, \dots, N} |l_j(u_1(t) - u_2(t))| + B_{\mathcal{L}} \cdot e^{-\gamma t}, \quad t > t_0,$$

где $A_{\mathcal{L}}$ и $B_{\mathcal{L}}$ – положительные числа. Значит, условие (1.33) влечет (1.34). Теорема 1.3 доказана.

Отметим, что, так же, как и при доказательстве следствий 1.1 и 1.2, соотношение (1.15) с достаточно малой константой $\varepsilon_{\mathcal{L}}$ играет важную роль в теореме 1.3 при описании функционалов, однозначно определяющих динамику системы. Анализ ситуаций, для которых оценка (1.15) возможна при достаточно малых $\varepsilon_{\mathcal{L}}$, посвящены следующие два параграфа. Представленные там подходы позволяют, в частности, получать оценки снизу числа функционалов, для которых справедливо неравенство вида (1.15) при фиксированном $\varepsilon_{\mathcal{L}} > 0$.

§ 2. Дефект полноты множества функционалов

Для характеристики множеств определяющих элементов будем использовать следующее понятие дефекта полноты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть V и H – рефлексивные банаховы пространства, V непрерывно и плотно вложено в H . *Дефектом полноты* множества $\mathcal{L}$ линейных функционалов на V относительно H называется величина

$$(2.1) \quad \varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H) = \sup\{\|w\|_H : w \in V, l(w) = 0, l \in \mathcal{L}, \|w\|_V \leq 1\}.$$

Отметим, что конечномерность линейной оболочки $\text{Lin } \mathcal{L}$ множества $\mathcal{L}$ пока не предполагается. Очевидно также, что $\varepsilon_{\mathcal{L}_1}(V, H) \geq \varepsilon_{\mathcal{L}_2}(V, H)$ при условии $\text{Lin } \mathcal{L}_1 \subset \text{Lin } \mathcal{L}_2$. Кроме того, $\varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H) = 0$ тогда и только тогда, когда система функционалов $\mathcal{L}$ полна на V , т.е. из условия $l(w) = 0$ для всех $l \in \mathcal{L}$ вытекает, что $w = 0$.

Следующее утверждение устанавливает связь дефекта полноты и оценки (1.15), играющей важную роль в теории определяющих функционалов. Оно означает, что предположение малости параметра $\varepsilon_{\mathcal{L}}$ в условиях следствий 1.1, 1.2 и теоремы 1.3 можно заменить соответствующим требованием относительно дефекта полноты $\varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H)$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\varepsilon_{\mathcal{L}} = \varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H)$ дефект полноты множества $\mathcal{L}$ линейных функционалов на V относительно H . Тогда существует положительная константа $C_{\mathcal{L}}$ такая, что

$$(2.2) \quad \|w\|_H \leq C_{\mathcal{L}} \cdot \sup\{|l(w)| : l \in \overline{\mathcal{L}}, \|l\|_* \leq 1\} + \varepsilon_{\mathcal{L}} \cdot \|w\|_V$$

для любого $w \in V$, где $\overline{\mathcal{L}}$ – замкнутая линейная оболочка множества $\mathcal{L}$ в V^* , $\|\cdot\|_*$ – норма в V^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения (2.1) вытекает, что

$$(2.3) \quad \|w\|_H \leq \varepsilon_{\mathcal{L}} \cdot \|w\|_V \quad \text{для всех } w \in \mathcal{L}^\perp,$$

где $\mathcal{L}^\perp \equiv \{v \in V : l(v) = 0, l \in \mathcal{L}\}$ – аннулятор для $\mathcal{L}$. Так как $l(w) = 0$ для всех $w \in \mathcal{L}^\perp$ и $l \in \widehat{\mathcal{L}}$, то (2.3) означает, что соотношение (2.2) справедливо для $w \in \mathcal{L}^\perp$. Пусть теперь $w \notin \mathcal{L}^\perp$. Тогда существует элемент $u \in \mathcal{L}^\perp$ такой, что $\|w - u\| = \text{dist}_V(w, \mathcal{L}^\perp)$. Из непрерывности вложения V в H и из (2.3) вытекает, что

$$\|w\|_H \leq \|u\|_H + \|w - u\|_H \leq \varepsilon_{\mathcal{L}} \cdot \|u\|_V + C \cdot \|w - u\|_V.$$

Поэтому неравенство $\|u\|_V \leq \|w\|_V + \|w - u\|_V$ дает, что

$$(2.4) \quad \|w\|_H \leq \varepsilon_{\mathcal{L}} \cdot \|w\|_V + C_{\mathcal{L}} \cdot \|w - u\|_V$$

с некоторой константой $C_{\mathcal{L}} > 0$. Далее, с помощью теоремы Хана–Банаха легко построить (см., например, [27]) на пространстве V непрерывный линейный функционал l_0 , обладающий свойствами:

$$l_0(w - u) = \|w - u\|_V, \quad \|l_0\|_* = 1, \quad l_0(v) = 0 \quad \text{для всех } v \in \mathcal{L}^\perp.$$

Очевидно, что $l_0 \in \overline{\mathcal{L}}$. При этом из (2.4) получаем, что

$$\|w\|_H \leq \varepsilon_{\mathcal{L}} \cdot \|w\|_V + C_{\mathcal{L}} \cdot l_0(w).$$

Поэтому имеет место соотношение (2.2). Теорема 2.1 доказана.

Следующее утверждение дает характеристику дефекта полноты в спектральных терминах для случая, когда V и H – гильбертовы пространства.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть V и H – сепарабельные гильбертовы пространства, V компактно и плотно вложено в H . Пусть K – самосопряженный положительный вполне непрерывный оператор в пространстве V , определяемый равенством $(Ku, v)_V = (u, v)_H$ для $u, v \in V$. Тогда дефект полноты $\varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H)$ множества $\mathcal{L}$ линейных функционалов на V может быть вычислен по формуле

$$(2.5) \quad \varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H) = \sqrt{\mu_{\max}(P_{\mathcal{L}} K P_{\mathcal{L}})},$$

где $P_{\mathcal{L}}$ – оператор ортогонального проектирования в пространстве V на аннулятор $\mathcal{L}^{\perp} = \{v \in V : l(v) = 0, l \in \mathcal{L}\}$, $\mu_{\max}(S)$ – максимальное собственное число оператора S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению 2.1 имеем, что

$$\varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H) = \sup \{ \|w\|_H : w \in B_{\mathcal{L}} \},$$

где $B_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}^{\perp} \cap \{v : \|v\|_V \leq 1\}$ – единичный шар в $\mathcal{L}^{\perp}$. Очевидно, что $B_{\mathcal{L}}$ – компакт в H . Поэтому существует элемент $u_0 \in B_{\mathcal{L}}$ такой, что $\|u_0\|_V = 1$ и

$$\varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H)^2 = \|u_0\|_H^2 = (Ku_0, u_0)_V.$$

Этот элемент доставляет максимум функции $(Ku, u)_V$ на множестве $B_{\mathcal{L}}$, и следовательно, для любого $v \in \mathcal{L}^{\perp}$ и любого $s \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$\frac{(K(u_0 + sv), u_0 + sv)_V}{\|u_0 + sv\|_V^2} \leq \mu \equiv (Ku_0, u_0)_V.$$

Поэтому

$$(K(u_0 + sv), u_0 + sv)_V - \mu \|u_0 + sv\|_V^2 \leq 0.$$

Следовательно,

$$s^2 \{ (Kv, v)_V - \mu \|v\|_V^2 \} + 2s \{ (Ku_0, v)_V - \mu (u_0, v)_V \} \leq 0$$

для всех $v \in \mathcal{L}^{\perp}$ и $s \in \mathbb{R}$. Отсюда легко получить, что

$$(Ku_0, v)_V - \mu (u_0, v)_V = 0 \quad \text{для всех } v \in \mathcal{L}^{\perp}.$$

Поэтому $P_{\mathcal{L}} K P_{\mathcal{L}} u_0 = \mu u_0$, т.е. $\mu = (Ku_0, u_0)_V = \|u_0\|_H^2$ является собственным числом оператора $P_{\mathcal{L}} K P_{\mathcal{L}}$. Ясно, что это максимальное собственное число. Таким образом, теорема 2.2 доказана.

Ситуация, описанная в следующем утверждении, часто возникает в приложениях в контексте так называемых определяющих мод (см. [6]–[8] и др.).

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть выполнены условия теоремы 2.2. Обозначим через $\{e_i\}$ ортонормированный базис в пространстве V , состоящий из собственных векторов оператора K :

$$(2.6) \quad Ke_i = \mu_i e_i, \quad (e_i, e_j)_V = \delta_{ij}, \quad \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N = 0.$$

Тогда дефект полноты системы функционалов

$$(2.7) \quad \mathcal{L} = \{l_j \in V^* : l_j(v) = (v, e_j)_V, \quad j = 1, 2, \dots, N\}$$

может быть вычислен по формуле $\varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H) = \sqrt{\mu_{N+1}}$.

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что в данном случае $P_{\mathcal{L}}$ – ортопроектор на замкнутую линейную оболочку элементов $\{e_j : j \geq N+1\}$ и что $P_{\mathcal{L}}$ коммутирует с K .

Следующее утверждение устанавливает связь дефекта полноты с некоторыми понятиями общей теории аппроксимаций (см., например, [28], [29] и приведенные в этих работах ссылки). Оно будет в дальнейшем использоваться для получения оценок сверху величины $\varepsilon_{\mathcal{L}}$.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть выполнены условия теоремы 2.2. Предположим, что $\mathcal{L}$ – некоторое множество линейных функционалов на V и $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$ – семейство линейных ограниченных операторов R , отображающих V в H и таких, что $Rv = 0$ для всех $v \in \mathcal{L}^{\perp}$. Пусть $e_V^H(R)$ – глобальная аппроксимационная ошибка в H , возникающая при приближении элементов $v \in V$ элементами Rv и определяемая равенством:

$$(2.8) \quad e_V^H(R) = \sup\{\|u - Ru\|_H : \|u\|_V \leq 1\}.$$

Тогда

$$(2.9) \quad \varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H) = \min\{e_V^H(R) : R \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}}$. Тогда очевидно, что

$$\|u - Ru\|_H \leq e_V^H(R) \cdot \|u\|_V \quad \text{для всех } u \in V.$$

Поэтому для $u \in \mathcal{L}^{\perp}$ имеем, что $\|u\|_H \leq e_V^H(R) \cdot \|u\|_V$. Отсюда вытекает, что $\varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H) \leq e_V^H(R)$ для всех $R \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}}$. Покажем теперь, что существует оператор $R_0 \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}}$ такой, что $\varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H) = e_V^H(R_0)$. Из (2.5) вытекает, что

$$\varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H) = \|K^{1/2} P_{\mathcal{L}}\|_{L(V, V)} \equiv \sup\{\|K^{1/2} P_{\mathcal{L}} u\|_V : \|u\|_V \leq 1\},$$

где $P_{\mathcal{L}}$ – оператор ортогонального проектирования в пространстве V на аннулятор $\mathcal{L}^{\perp}$, $\|\cdot\|_{L(V, V)}$ – норма в пространстве линейных ограниченных операторов, действующих в V . Поэтому из определения оператора K (см. формулировку теоремы 2.1) вытекает, что

$$(2.10) \quad \varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H) = \sup\{\|P_{\mathcal{L}} u\|_H : \|u\|_V \leq 1\} = e_V^H(I - P_{\mathcal{L}}).$$

Ясно, что $I - P_{\mathcal{L}} \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}}$. Поэтому можно положить $R_0 = I - P_{\mathcal{L}}$. Теорема 2.3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Пусть $\mathcal{L} = \{l_j : j = 1, 2, \dots, N\}$ – конечный набор линейно независимых функционалов на V . Тогда в условиях теорем 2.2 и 2.3 существует набор элементов $\{\phi_k : k = 1, 2, \dots, N\}$ из V такой, что $l_j(\phi_k) = \delta_{jk}$, где $\delta_{jk} = 0$, если $k \neq j$, и $\delta_{jk} = 1$ при $k = j$, а оператор R_0 , фигурирующий в доказательстве теоремы 2.3, имеет вид $R_0 u = \sum_{j=1}^N l_j(u) \phi_j$. Соотношение (2.10) при этом дает, что

$$\|u - R_0 u\|_H \leq \varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H) \cdot \|u\|_V.$$

Таким образом, на пространстве V существует лагранжев $(l_j(\phi_k) = \delta_{jk})$ интерполяционный оператор R_0 с погрешностью интерполяции, определяемой дефектом полноты $\varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H)$.

Для получения оценок снизу дефекта полноты важную роль играет понятие поперечника вложения (см., например, [28], [29], а также монографии [30] и [31], в которых приведены результаты вычисления поперечников для ряда функциональных пространств). Дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть V и H – сепарабельные гильбертовы пространства, V непрерывно и плотно вложено в H . Тогда N -поперечником Колмогорова вложения V в H называется величина

$$(2.11) \quad \kappa_N = \kappa_N(V, H) = \inf \{e_V^H(F) : F \in \mathcal{F}_N\},$$

где $\mathcal{F}_N$ – совокупность всех N -мерных подпространств F пространства V , а $e_V^H(F)$ – глобальная ошибка аппроксимации в H элементов из V элементами подпространства F , определяемая равенством:

$$e_V^H(F) = \sup \{\text{dist}_H(v, F) : \|v\|_V \leq 1\}.$$

Другими словами, N -поперечник Колмогорова κ_N вложения V в H совпадает с минимально возможной глобальной ошибкой аппроксимации в H элементов из V элементами N -мерного подпространства.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть V и H – сепарабельные гильбертовы пространства, причем V плотно и компактно вложено в H . Тогда

$$(2.12) \quad \kappa_N(V, H) = \min \{\varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H) : \mathcal{L} \subset V^*, \dim \text{Lin } \mathcal{L} = N\} = \sqrt{\mu_{N+1}},$$

где $\{\mu_j\}$ – упорядоченные по невозрастанию собственные числа оператора K , определяемого равенством $(Ku, v)_V = (u, v)_H$ для $u, v \in V$.

Эта теорема, дополненная равенством (2.9), по существу представляет собой некоторую удобную для дальнейшего переформулировку известных свойств s -чисел вполне непрерывных операторов (см. [32, гл. 2, § 2]). Однако, ради замкнутости изложения здесь приведено доказательство, не зависящее от [32].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что

$$(2.13) \quad \min\{\varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H) : \mathcal{L} \subset V^*; \dim \operatorname{Lin} \mathcal{L} = N\} = \sqrt{\mu_{N+1}}.$$

Ввиду следствия 2.1 достаточно убедиться в том, что $\varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H) \geq \sqrt{\mu_{N+1}}$ для всех $\mathcal{L} = \{l_j : j = 1, 2, \dots, N\}$, где l_j – линейно независимые функционалы на V . Из определения (2.1) вытекает, что

$$(2.14) \quad [\varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H)]^2 \geq \|u\|_H^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j(u, e_j)_V^2$$

для любых $u \in V$ таких, что $\|u\|_V = 1$ и $l_j(u) = 0, j = 1, 2, \dots, N$. Здесь $\{e_j\}$ – ортонормированный базис в пространстве V , обладающий свойствами (2.6). Возьмем в (2.14) в качестве элемента u вектор $u = \sum_{j=1}^{N+1} c_j e_j$, где числа c_k подобраны так, что $\|u\|_V = 1$ и $l_j(u) = 0, j = 1, 2, \dots, N$. Тогда из (2.14) имеем, что

$$[\varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H)]^2 \geq \sum_{j=1}^{N+1} \mu_j c_j^2 \geq \mu_{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} c_j^2 = \mu_{N+1} \|u\|_V^2 = \mu_{N+1}.$$

Таким образом, соотношение (2.13) доказано.

Проверим теперь, что $\kappa_N(V, H) = \min\{\varepsilon_{\mathcal{L}}\}$. Предположим, что $\mathcal{L} \subset V^*$ и $\dim \operatorname{Lin} \mathcal{L} = N$. Пусть, как и ранее, $P_{\mathcal{L}}$ – оператор ортогонального проектирования в пространстве V на аннулятор $\mathcal{L}^\perp = \{v \in V : l(v) = 0, l \in \mathcal{L}\}$, и пусть $Q_{\mathcal{L}} = I - P_{\mathcal{L}}$. Очевидно, что $Q_{\mathcal{L}}V$ изоморфно $\operatorname{Lin} \mathcal{L}$. Поэтому $\dim Q_{\mathcal{L}}V = N$. Следовательно, (2.10) дает, что

$$(2.15) \quad \varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H) = e_V^H(Q_{\mathcal{L}}) \geq \sup\{\operatorname{dist}_H(u, Q_{\mathcal{L}}V) : \|u\|_V \leq 1\} \geq \kappa_N$$

для всех $\mathcal{L} \subset V^*$ таких, что $\dim \operatorname{Lin} \mathcal{L} = N$. Наоборот, пусть F – некоторое N -мерное подпространство в V , и пусть $\{f_j : j = 1, \dots, N\}$ – его базис, ортонормированный в пространстве H . Положим

$$\mathcal{L}_F = \{l_j \in V^* : l_j(v) = (v, f_j)_H, j = 1, 2, \dots, N\}.$$

Пусть $Q_{H,F}$ – оператор ортогонального проектирования в пространстве H на F . Очевидно, что

$$Q_{H,F}u = \sum_{j=1}^N (u, f_j)_H f_j.$$

Поэтому если $u \in \mathcal{L}_F^\perp$, то $Q_{H,F}u = 0$. Кроме того,

$$\|Q_{H,F}u\|_V \leq \sum_{j=1}^N |(u, f_j)_H| \cdot \|f_j\|_V \leq \left\{ \sum_{j=1}^N \|f_j\|_H \cdot \|f_j\|_V \right\} \cdot \|u\|_H.$$

Отсюда вытекает, что $Q_{H,F}$ – ограниченный оператор в V . Поэтому, применяя теорему 2.3, находим, что

$$\varepsilon_{\mathcal{L}_F}(V, H) \leq e_V^H(Q_{H,F}) = \sup\{\|u - Q_{H,F}u\|_H : \|u\|_V \leq 1\}.$$

Но $\|u - Q_{H,F}u\|_H = \text{dist}_H(u, F)$. Следовательно,

$$(2.16) \quad \min\{\varepsilon_{\mathcal{L}}\} \leq \varepsilon_{\mathcal{L}_F}(V, H) \leq e_V^H(F)$$

для любого N -мерного подпространства F в V . Из (2.15) и (2.16) вытекает, что

$$\kappa_N(V, H) = \min\{\varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H) : \mathcal{L} \subset V^*; \dim \text{Lin } \mathcal{L} = N\}.$$

Вместе с (2.13) это соотношение завершает доказательство теоремы 2.4.

В §3 нам понадобится следующее свойство дефекта полноты.

ЛЕММА 2.1. *Пусть V , W и H – рефлексивные банаховы пространства такие, что $V \subset W \subset H$, причем все вложения непрерывны и плотны. Предположим, что с некоторыми константами $a_\theta > 0$ и $0 < \theta < 1$ справедливо неравенство*

$$(2.17) \quad \|u\|_W \leq a_\theta \|u\|_H^\theta \|u\|_V^{1-\theta}, \quad u \in V.$$

Тогда для любого множества $\mathcal{L}$ линейных функционалов на W имеет место оценка

$$(2.18) \quad [a_\theta^{-1} \varepsilon_{\mathcal{L}}(V, W)]^{\frac{1}{\theta}} \leq \varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H) \leq [a_\theta \varepsilon_{\mathcal{L}}(W, H)]^{\frac{1}{1-\theta}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in \mathcal{L}_W^\perp = \{w \in W : l(w) = 0\}$. Тогда из определения 2.1 и неравенства (2.17) вытекает, что

$$\|u\|_H \leq \varepsilon_{\mathcal{L}}(W, H) \|u\|_W \leq a_\theta \varepsilon_{\mathcal{L}}(W, H) \|u\|_H^\theta \|u\|_V^{1-\theta}$$

для всех $u \in \mathcal{L}_V^\perp = \mathcal{L}_W^\perp \cap V$. Поэтому

$$\|u\|_H \leq [a_\theta \varepsilon_{\mathcal{L}}(W, H)]^{\frac{1}{1-\theta}} \|u\|_V, \quad u \in \mathcal{L}_V^\perp.$$

Точно так же имеем, что

$$\|u\|_W \leq a_\theta \|u\|_H^\theta \|u\|_V^{1-\theta} \leq a_\theta [\varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H)]^\theta \|u\|_V, \quad u \in \mathcal{L}_V^\perp.$$

Из двух последних неравенств нетрудно извлечь оценку (2.18).

§ 3. Оценки дефекта полноты в соболевских пространствах

В этом параграфе приведено несколько важных с точки зрения приложений семейств функционалов на соболевских пространствах и даны оценки соответствующих дефектов полноты.

Предположим, что Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^\nu$, $\nu \geq 1$, $H^s(\Omega)$ – соболевское пространство порядка s на Ω и $H_0^s(\Omega)$ – замыкание в $H^s(\Omega)$ множества бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω . Напомним, что при целых неотрицательных значениях s пространства Соболева описываются соотношением:

$$H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : D^\alpha f \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\},$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$. Здесь и в дальнейшем используются обозначения:

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_\nu^{\alpha_\nu}},$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu), \quad \alpha_k = 0, 1, 2, \dots, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu.$$

Кроме того, мы полагаем:

$$\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_\nu!, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_\nu^{\alpha_\nu}, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_\nu^2}$$

для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu)$ и точки $x = (x_1, \dots, x_\nu) \in \mathbb{R}^\nu$. Что касается пространств $H^s(\Omega)$ для нецелых порядков $s > 0$, то они определяются с помощью интерполяции (см. [31]) между $H^{m_s}(\Omega)$ и $H^{m_s+1}(\Omega)$, где m_s – целая часть s . Пусть $\|\cdot\|_s$ – норма (интерполяционная при нецелых s) в $H^s(\Omega)$, а $\|\cdot\|$ и $(\cdot, \cdot)$ – норма и скалярное произведение в $L^2(\Omega)$.

В дальнейшем используется следующий вариант интегрального представления Соболева.

ЛЕММА 3.1. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^\nu$, и пусть $\lambda(x)$ – функция из $L^\infty(\mathbb{R}^\nu)$ с компактным носителем $\text{supp } \lambda$ такая, что

$$(3.1) \quad \text{supp } \lambda \subseteq \Omega, \quad \int_{\mathbb{R}^\nu} \lambda(x) dx = 1.$$

Предположим, что область Ω является звездной относительно носителя $\text{supp } \lambda$, т.е. вместе с каждой точкой $x \in \Omega$ области Ω принадлежит конус

$$(3.2) \quad V_x = \{z = \tau x + (1 - \tau)y : 0 \leq \tau \leq 1, y \in \text{supp } \lambda\}.$$

Тогда для любой функции $u(x) \in H^m(\Omega)$ справедливо представление

$$(3.3) \quad u(x) = P_{m-1}(x, u) + \sum_{|\alpha|=m} \frac{m}{\alpha!} \int_{V_x} (x-y)^\alpha \cdot K(x, y) \cdot D^\alpha u(y) dy,$$

где $P_{m-1}(x, u)$ – полином переменной x степени $m-1$ вида:

$$(3.4) \quad P_{m-1}(x, u) = \sum_{|\alpha| \leq m-1} \frac{1}{\alpha!} \int_{\Omega} \lambda(y) \cdot (x-y)^\alpha \cdot D^\alpha u(y) dy,$$

а ядро $K(x, y)$ задается формулой

$$(3.5) \quad K(x, y) = \int_0^1 \lambda\left(x + \frac{y-x}{s}\right) \frac{ds}{s^{\nu+1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если формулу Тейлора

$$u(x) = \sum_{|\alpha| \leq m-1} \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!} D^\alpha u(y) + m \sum_{|\alpha|=m} \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 s^{m-1} D^\alpha u(x+s \cdot (y-x)) ds$$

умножить на $\lambda(y)$ и проинтегрировать по y , то после введения новой переменной интегрирования $z = x + s \cdot (y-x)$ получаем утверждение леммы.

Интегральное представление (3.3) позволяет получить следующее обобщение неравенства Пуанкаре.

ЛЕММА 3.2. Пусть для ограниченной области Ω из $\mathbb{R}^\nu$ и функции $\lambda(x)$ из $L^\infty(\mathbb{R}^\nu)$ выполнены предположения леммы 3.1. Тогда для любой функции $u(x) \in H^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$(3.6) \quad \|u - \langle u \rangle_\lambda\| \leq \frac{\sigma_\nu}{\nu} d^{\nu+1} \|\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|,$$

где $\langle u \rangle_\lambda = \int_\Omega \lambda(x) u(x) dx$, σ_ν – площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^\nu$, $d = \text{diam } \Omega \equiv \sup\{|x-y| : x, y \in \Omega\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (3.3) при $m = 1$ дает, что

$$(3.7) \quad u(x) = \langle u \rangle_\lambda + \sum_{j=1}^\nu \int_{V_x} (x_j - y_j) \cdot K(x, y) \cdot \frac{\partial u(y)}{\partial y_j} dy.$$

Очевидно, что $\lambda\left(x + \frac{y-x}{s}\right) = 0$ при $s^{-1}|x-y| \geq d = \text{diam } \Omega$. Поэтому

$$K(x, y) = \int_{d^{-1}|x-y|}^1 \lambda\left(x + \frac{y-x}{s}\right) \frac{ds}{s^{\nu+1}}.$$

Следовательно,

$$(3.8) \quad |K(x, y)| \leq \delta \cdot |x-y|^{-\nu}, \quad \delta = \delta(\lambda, \nu) \equiv \nu^{-1} d^\nu \|\lambda\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Поэтому (3.7) дает, что

$$(3.9) \quad |u(x) - \langle u \rangle_\lambda| \leq \delta \int_\Omega \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{\nu-1}} dy \leq \delta \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u(y)|^2}{|x-y|^{\nu-1}} dy \right)^{1/2} \cdot \left(\int_\Omega \frac{dy}{|x-y|^{\nu-1}} \right)^{1/2}.$$

Пусть $B_r(x) = \{y : |x-y| \leq r\}$ – шар радиуса r с центром в точке x . Тогда очевидно, что

$$(3.10) \quad \int_\Omega \frac{dy}{|x-y|^{\nu-1}} \leq \int_{B_d(x)} \frac{dy}{|x-y|^{\nu-1}} \leq \sigma_\nu d,$$

где σ_ν – площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^\nu$, $d = \text{diam } \Omega$. Поэтому из (3.9) вытекает, что

$$|u(x) - \langle u \rangle_\lambda|^2 \leq \delta^2 \sigma_\nu d \int_\Omega \frac{|\nabla u(y)|^2}{|x-y|^{\nu-1}} dy.$$

После интегрирования по x с помощью (3.10) получаем (3.6). Лемма 3.2 доказана.

ЛЕММА 3.3. *Предположим, что для ограниченной области Ω из $\mathbb{R}^\nu$ и функции $\lambda(x)$ из $L^\infty(\mathbb{R}^\nu)$ выполнены условия леммы 3.1. Пусть $m_\nu = \left[\frac{\nu}{2}\right] + 1$, где $[\cdot]$ – знак целой части числа. Тогда для любой функции $u(x) \in H^{m_\nu}(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$(3.11) \quad \max_{x \in \Omega} |u(x) - P_{m-1}(x, u)| \leq c_\nu \cdot d^{m_\nu + \frac{\nu}{2}} \|\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{|\alpha|=m_\nu} \frac{1}{\alpha!} \cdot \|D^\alpha u\|,$$

где полином $P_{m-1}(x, u)$ определяется формулой (3.4), $d = \text{diam } \Omega$, а константа c_ν имеет вид $c_\nu = \sqrt{\frac{\sigma_\nu}{2m_\nu - \nu}} \cdot \frac{m_\nu}{\nu}$. Здесь σ_ν – площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^\nu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (3.3) и (3.8), находим, что

$$\begin{aligned} |u(x) - P_{m-1}(x, u)| &\leq \sum_{|\alpha|=m_\nu} \frac{m_\nu}{\alpha!} \int_{V_x} |x-y|^{m_\nu} \cdot |K(x, y)| \cdot |D^\alpha u(y)| dy \\ &\leq \sum_{|\alpha|=m_\nu} \frac{\delta m_\nu}{\alpha!} \int_{\Omega} |x-y|^{m_\nu - \nu} \cdot |D^\alpha u(y)| dy \\ &\leq \sum_{|\alpha|=m_\nu} \frac{\delta m_\nu}{\alpha!} \|D^\alpha u\| \left(\int_{\Omega} |x-y|^{2(m_\nu - \nu)} dy \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Как и ранее, находим, что

$$\int_{\Omega} |x-y|^{2(m_\nu - \nu)} dy \leq \sigma_\nu d^{2m_\nu - \nu} (2m_\nu - \nu)^{-1}.$$

Поэтому имеет место (3.11). Лемма 3.3 доказана.

ЛЕММА 3.4. *Предположим, что выполнены условия леммы 3.3. Тогда для любой функции $u(x) \in H^{m_\nu}(\Omega)$ и любой точки $x_* \in \Omega$ справедливо неравенство*

$$(3.12) \quad \|u - u(x_*)\| \equiv \left(\int_{\Omega} |u(x) - u(x_*)|^2 dx \right)^{1/2} \\ \leq c_\nu \cdot d^\nu \cdot \|\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{j=1}^{m_\nu} d^j \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} \cdot \|D^\alpha u\|,$$

где c_ν – константа, зависящая только от ν , $d = \text{diam } \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$(3.13) \quad \|u - u(x_*)\| \leq \|u - \langle u \rangle_\lambda\| + d^{\nu/2} \cdot |\langle u \rangle_\lambda - u(x_*)|,$$

где, как и выше, $\langle u \rangle_\lambda = \int_\Omega \lambda(y)u(y) dy$. Структура полинома $P_{m-1}(x, u)$ дает, что

$$\begin{aligned} |\langle u \rangle_\lambda - u(x)| &\leq |u(x) - P_{m-1}(x, u)| + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m-1} \frac{1}{\alpha!} \int_\Omega |\lambda(y) \cdot (x-y)^\alpha \cdot D^\alpha u(y)| dy \\ &\leq |u(x) - P_{m-1}(x, u)| + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m-1} \frac{d^{|\alpha|+\nu/2}}{\alpha!} \cdot \|\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \|D^\alpha u(y)\| \end{aligned}$$

для всех $x \in \Omega$. Поэтому оценка (3.12) вытекает из лемм 3.2 и 3.3. Лемма 3.4 доказана.

Доказанные выше леммы позволяют оценить дефект полноты для двух важных с точки зрения приложений семейств функционалов на соболевских пространствах $H^s(\Omega)$ в случае сильно липшицевых областей. Напомним (см., например, [33]), что область Ω из $\mathbb{R}^\nu$ называется *сильно липшицевой*, если для каждого $x \in \partial\Omega$ существует окрестность U такая, что в некоторой декартовой системы координат

$$U \cap \Omega = \{x = (x_1, \dots, x_\nu) : x_\nu < f(x_1, \dots, x_{\nu-1})\},$$

где $f(x)$ – функция, удовлетворяющая условию Липшица. Для сильно липшицевых областей пространство $H^s(\Omega)$ состоит из сужений на Ω функций из $H^s(\mathbb{R}^\nu)$, $s > 0$ [31], [33].

Следующее утверждение имеет дело с так называемыми обобщенными локальными объемными средними.

ТЕОРЕМА 3.1. *Предположим, что ограниченная сильно липшицева область Ω из $\mathbb{R}^\nu$ может быть разбита на подобласти $\{\Omega_j : j = 1, 2, \dots, N\}$ так, что*

$$(3.14) \quad \overline{\Omega} = \bigcup \{\overline{\Omega}_j : j = 1, 2, \dots, N\}, \quad \Omega_j \cap \Omega_i = \emptyset, \quad j \neq i,$$

где черта означает замыкание множества. Пусть на каждой из подобластей Ω_j задана функция $\lambda_j(x)$ из $L^\infty(\Omega_j)$ такая, что

$$(3.15) \quad \text{supp } \lambda_j \subseteq \Omega_j, \quad \int_{\Omega_j} \lambda_j(x) dx = 1,$$

причем Ω_j является звездной относительно носителя $\text{supp } \lambda_j$. Определим множество $\mathcal{L}$ обобщенных локальных объемных средних, отвечающих набору $\mathcal{T} = \{(\Omega_j, \lambda_j) : j = 1, 2, \dots, N\}$, как семейство функционалов вида

$$(3.16) \quad \mathcal{L} = \left\{ l_j(u) = \int_{\Omega_j} \lambda_j(x)u(x) dx, \quad j = 1, 2, \dots, N \right\}.$$

Тогда для $\varepsilon_{\mathcal{L}}(s, \sigma) \equiv \varepsilon_{\mathcal{L}}(H^s(\Omega), H^\sigma(\Omega))$ справедлива оценка

$$(3.17) \quad \varepsilon_{\mathcal{L}}(s, \sigma) \leq c(\nu, s, \sigma) \cdot \begin{cases} (\Lambda d)^{s-\sigma}, & s > 1, \quad 0 \leq \sigma \leq s; \\ \Lambda^{1-\sigma/s} \cdot d^{s-\sigma}, & 0 \leq \sigma \leq s \leq 1, \quad s \neq 0. \end{cases}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Lambda &= \max \{ d_j^\nu \cdot \|\lambda_j\|_{L^\infty(\Omega_j)} : j = 1, 2, \dots, N \}; \\ d &= \max_j d_j, \quad d_j = \text{diam } \Omega_j \equiv \sup \{ |x - y| : x, y \in \Omega_j \}, \end{aligned}$$

а $c(\nu, s, \sigma)$ – некоторая константа, зависящая, вообще говоря, от Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим интерполяционный оператор $R_{\mathcal{T}}$, связанный с набором $\mathcal{T}$, формулой

$$(R_{\mathcal{T}}u)(x) = l_j(u) = \int_{\Omega_j} \lambda_j(x)u(x) dx, \quad x \in \Omega_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

Легко проверить, что

$$(3.18) \quad \|u - R_{\mathcal{T}}u\| \leq c_{\nu} \cdot \Lambda \cdot \|u\|, \quad u \in L^2(\Omega).$$

Далее, из леммы 3.2 вытекает, что

$$\|u - l_j(u)\|_{L^2(\Omega_j)} \leq \frac{\sigma_{\nu}}{\nu} d_j^{\nu+1} \|\lambda\|_{L^{\infty}(\Omega_j)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_j)}.$$

Отсюда получаем оценку

$$(3.19) \quad \|u - R_{\mathcal{T}}u\| \leq \frac{\sigma_{\nu}}{\nu} \cdot d \cdot \Lambda \cdot \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Поэтому, используя тот факт, что $H^s(\Omega)$ при $0 < s < 1$ получается интерполяцией между $L^2(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$, из (3.18) и (3.19) находим, что

$$\|u - R_{\mathcal{T}}u\| \leq (c_{\nu} \cdot \Lambda)^{1-s} \cdot \left(\frac{\sigma_{\nu}}{\nu} d \Lambda\right)^s \cdot \|u\|_s$$

для всех $0 \leq s \leq 1$, где, как и ранее, $\|\cdot\|_s$ – норма в пространстве $H^s(\Omega)$. Следовательно, теорема 2.3 дает соотношение

$$(3.20) \quad \varepsilon_{\mathcal{L}}(s, 0) = \varepsilon_{\mathcal{L}}(H^s(\Omega), L^2(\Omega)) \leq c(\nu, s) \cdot \Lambda \cdot d^s, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Так как в случае сильно липшицевых областей существует (см. [31], [33]) непрерывный оператор продолжения из $H^s(\Omega)$ в $H^s(\mathbb{R}^{\nu})$, $s \geq 0$, то можно установить (см., например, [34]) интерполяционные неравенства

$$(3.21) \quad \|u\|_{s_1\theta + s_2(1-\theta)} \leq c(\theta, s_1, s_2) \cdot \|u\|_{s_1}^{\theta} \cdot \|u\|_{s_2}^{1-\theta}, \quad s_1, s_2 \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

где константа $c(\theta, s_1, s_2)$ зависит, вообще говоря, и от области Ω . Эти неравенства позволяют воспользоваться леммой 2.1 и завершить доказательство теоремы.

Проиллюстрируем эту теорему следующим примером.

ПРИМЕР 3.1. Пусть $\Omega = (0, l)^\nu$ – куб в $\mathbb{R}^\nu$ с ребром длины l . Построим набор $\mathcal{T} = \{(\Omega_j, \lambda_j)\}$, задающий локальные объемные средние, следующим образом. Пусть $K = (0, 1)^\nu$ – стандартный единичный куб в $\mathbb{R}^\nu$ и ω – некоторое измеримое множество в K положительной лебеговой меры, $\text{mes } \omega > 0$. Определим функцию $\lambda(\omega, x)$ на K формулой

$$\lambda(\omega, x) = \begin{cases} [\text{mes } \omega]^{-1}, & x \in \omega, \\ 0, & x \in K \setminus \omega. \end{cases}$$

Положим

$$\Omega_j = (j + K) \cdot h \equiv \left\{ x = (x_1, \dots, x_\nu) : j_i < \frac{x_i}{h} < j_i + 1, i = 1, \dots, \nu \right\},$$

$$\lambda_j(x) = \frac{1}{h^\nu} \lambda\left(\omega, \frac{x}{h} - j\right), \quad x \in \Omega_j,$$

для любого мультииндекса $j = (j_1, \dots, j_\nu)$, где $j_i = 0, 1, \dots, N - 1$, $h = l/N$. Ясно, что для набора $\mathcal{T} = \{(\Omega_j, \lambda_j)\}$ выполнены условия теоремы 3.1. При этом

$$\Lambda = \frac{\nu^{\nu/2}}{\text{mes } \omega}, \quad d_j = \text{diam } \Omega_j = \sqrt{\nu} \cdot h,$$

и, следовательно, в данном случае для множества $\mathcal{L}$ вида (3.16) имеем, что

$$(3.22) \quad \varepsilon_{\mathcal{L}}(H^s(\Omega), H^\sigma(\Omega)) \leq c(\nu, s, \sigma, \text{mes } \omega, l) \cdot h^{s-\sigma}, \quad 0 \leq \sigma \leq s, \quad s \neq 0.$$

Отметим, что число функционалов, входящих в $\mathcal{L}$, в данном случае равно $\mathcal{N}_{\mathcal{L}} = N^\nu$. Поэтому оценка (3.22) может быть переписана в виде

$$\varepsilon_{\mathcal{L}}(H^s(\Omega), H^\sigma(\Omega)) \leq c(\nu, s, \sigma, \text{mes } \omega, l) \cdot \left(\frac{1}{\mathcal{N}_{\mathcal{L}}} \right)^{\frac{s-\sigma}{\nu}}, \quad 0 \leq \sigma \leq s, \quad s \neq 0.$$

С другой стороны, если в каждом пространстве $H^s(\Omega)$ рассмотреть подпространство $H_{\text{per}}^s(\Omega)$ l -периодических по каждой переменной x_i функций:

$$H_{\text{per}}^s(\Omega) = \left\{ u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^\nu} u_k e^{2\pi i k x} : \sum_{k \in \mathbb{Z}^\nu} (1 + |k|^2)^s |u_k|^2 < \infty, u_k = \overline{u_{-k}} \right\},$$

то, используя следствие 2.1, теорему 2.4 и явный вид соответствующего оператора K , можно показать (см. также [29]–[31], где представлены аналогичные рассуждения), что $\mathcal{N}_{\mathcal{L}}$ -поперечник Колмогорова вложения $H_{\text{per}}^s(\Omega)$ в $H_{\text{per}}^\sigma(\Omega)$ имеет тот же порядок по $\mathcal{N}_{\mathcal{L}}$, т.е.

$$\kappa_{\mathcal{N}_{\mathcal{L}}}(H_{\text{per}}^s(\Omega), H_{\text{per}}^\sigma(\Omega)) = c_0 \cdot \left(\frac{1}{\mathcal{N}_{\mathcal{L}}} \right)^{\frac{s-\sigma}{\nu}}, \quad 0 \leq \sigma \leq s, \quad s \neq 0.$$

Таким образом, так как

$$\varepsilon_{\mathcal{L}}(H_{\text{per}}^s(\Omega), H_{\text{per}}^\sigma(\Omega)) \leq \varepsilon_{\mathcal{L}}(H^s(\Omega), H^\sigma(\Omega)),$$

то из теоремы 2.4 вытекает, что локальные объемные средние имеют дефект полноты, близкий (при фиксированном числе функционалов) к наилучшему. В рассматриваемом примере это приводит к двойному неравенству

$$(3.23) \quad c_1 \cdot h^{s-\sigma} \leq \varepsilon_{\mathcal{L}}(H^s(\Omega), H^\sigma(\Omega)) \leq c_2 \cdot h^{s-\sigma}, \quad 0 \leq \sigma \leq s, \quad s \neq 0,$$

где c_1 и c_2 – некоторые положительные константы, которые могут зависеть от $s, \sigma, \nu, \text{diam } \Omega, \text{mes } \omega$. Аналогичное соотношение остается в силе и для областей более общего вида (см. оценки поперечников, приведенные в [31]).

Дефект полноты для другого важного класса функционалов оценен в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 3.2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 3.1. Выберем в каждой подобласти Ω_j точку x_j и определим на $H^m(\Omega)$, $m = \left[\frac{\nu}{2}\right] + 1$, множество функционалов (будем называть их узлами):*

$$(3.24) \quad \mathcal{L} = \{l_j(u) = u(x_j) : x_j \in \Omega_j, j = 1, 2, \dots, N\}.$$

Тогда для всех $s \geq m$ и $0 \leq \sigma \leq s$ для дефекта полноты этого множества функционалов справедлива оценка

$$(3.25) \quad \varepsilon_{\mathcal{L}}(s, \sigma) \equiv \varepsilon_{\mathcal{L}}(H^s(\Omega), H^\sigma(\Omega)) \leq c(\nu, s, \sigma) \cdot (\Lambda d)^{s-\sigma},$$

где Λ и d те же величины, что и в теореме 3.1, а $c(\nu, s, \sigma)$ – некоторая константа, зависящая, вообще говоря, от Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in H^m(\Omega)$ и $l_j(u) = u(x_j) = 0, j = 1, 2, \dots, N$. Тогда, используя (3.12) для $\Omega = \Omega_j$ и $x_j = x_*$, получаем, что

$$\|u\|_{L^2(\Omega_j)} \leq c \cdot \Lambda \sum_{l=1}^m d_j^l \sum_{|\alpha|=l} \frac{1}{\alpha!} \cdot \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega_j)}.$$

Здесь и ниже c – некоторая константа, меняющаяся от формулы к формуле. Отсюда вытекает, что

$$\|u\| \leq c \cdot \Lambda \sum_{l=1}^m d^l \cdot \|u\|_l$$

для всех $u \in H^m(\Omega)$ таких, что $l_j(u) = u(x_j) = 0, j = 1, 2, \dots, N$. Пользуясь интерполяционным неравенством (3.21), находим, что

$$(3.26) \quad \|u\| \leq c \cdot \Lambda \sum_{l=1}^m d^l \cdot \|u\|^{1-l/m} \cdot \|u\|_m^{l/m}.$$

Так как

$$\Lambda d^l \cdot \|u\|^{1-l/m} \cdot \|u\|_m^{l/m} \leq \left(1 - \frac{l}{m}\right) \delta^{\frac{m}{m-l}} \|u\| + \frac{l}{m} \delta^{-\frac{m}{l}} \Lambda^{\frac{m}{l}} d^m \|u\|_m$$

для всех $\delta > 0$ и $l = 1, 2, \dots, m-1$, то из (3.26) получаем, что

$$\left(1 - c_\nu \sum_{l=1}^{m-1} \left(1 - \frac{l}{m}\right) \delta^{\frac{m}{m-l}}\right) \|u\| \leq c \left(\Lambda + \sum_{l=1}^{m-1} \frac{l}{m} \left(\frac{\Lambda}{\delta}\right)^{\frac{m}{l}}\right) d^m \|u\|_m.$$

Выбирая подходящим образом $\delta = \delta(\nu, m)$, отсюда находим, что

$$\|u\| \leq c \sum_{l=1}^m \frac{l}{m} \cdot \Lambda^{\frac{m}{l}} \cdot d^m \cdot \|u\|_m$$

для всех $u \in H^m(\Omega)$ таких, что $l_j(u) = u(x_j) = 0$, $j = 1, 2, \dots, N$. Следовательно,

$$\varepsilon_{\mathcal{L}}(H^m(\Omega), L^2(\Omega)) \leq c d^m \sum_{l=1}^m \frac{l}{m} \Lambda^{\frac{m}{l}}.$$

Так как $\Lambda \geq 1$, то отсюда вытекает неравенство (3.25) при $\sigma = 0$ и $s = m = \left[\frac{\nu}{2}\right] + 1$. Дальнейшие рассуждения, как и в случае теоремы 3.1, опираются на лемму 2.1 и интерполяционные неравенства (3.21). Теорема 3.2 доказана.

ПРИМЕР 3.2. Вернемся к ситуации, описанной в примере 3.1. Положим $\omega = K$ и выберем узлы $x_j \in \Omega_j$. Тогда для множества $\mathcal{L}$ функционалов вида (3.24) имеем, что

$$\varepsilon_{\mathcal{L}}(H^s(\Omega), H^\sigma(\Omega)) \leq c(\nu, s, \sigma, l) \cdot h^{s-\sigma}$$

для всех $s \geq \left[\frac{\nu}{2}\right] + 1$, $0 \geq \sigma \geq s$ и любого расположения узлов x_j внутри Ω_j . В рассматриваемом случае сохраняется также двусторонняя оценка вида (3.23).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Соотношения (3.17) и (3.25) верны и для шкалы пространств $H_0^s(\Omega)$. Однако в этом случае нормы в $H_0^s(\Omega)$ можно выбрать так, чтобы константа $c(\nu, s, \sigma)$, фигурирующая в (3.17) и (3.25), не зависела от Ω . Это объясняется тем, что продолжение нулем вне Ω задает ограниченный оператор из $H_0^s(\Omega)$ в $H^s(\mathbb{R}^\nu)$ с оценкой нормы, не зависящей от Ω , и поэтому константа $c(\nu, s, \sigma)$ в интерполяционных неравенствах (3.21) не зависит от Ω . Разумеется, данное замечание остается справедливым во всех случаях, когда удастся построить оператор продолжения из $H^s(\Omega)$ в $H^s(\mathbb{R}^\nu)$ с оценкой нормы, не зависящей от области.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Пусть $\mathcal{L}$ – семейство функционалов, определенное на $H^s(\Omega)$ соотношениями (3.24). Теорема 3.2, а также замечание 2.1 позволяют при каждом допустимом $s > 0$ построить набор функций $\phi_j(x) \in H^s(\Omega)$ так, чтобы оператор $R_{\mathcal{L}}$, действующий в $H^s(\Omega)$ по формуле

$$(R_{\mathcal{L}}u)(x) = \sum_{j=1}^N u(x_j) \phi_j(x),$$

являлся интерполяционным лагранжевым ($\phi_j(x_i) = \delta_{ji}$) оператором с оценкой погрешности интерполяции, совпадающей с соответствующим дефектом полноты. Аналогичное утверждение справедливо и для случая локальных объемных средних, построенных в теореме 3.1. К сожалению (см., замечание 2.1 и доказательство теоремы 2.3), с точки зрения практических вычислений задание функций $\phi_j(x)$ не является явным.

§ 4. Определяющие функционалы для полулинейных параболических уравнений

В этом параграфе рассматривается вопрос о существовании и свойствах определяющих функционалов для задач, порождаемых в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве H уравнением вида

$$(4.1) \quad \frac{du}{dt} + Au = B(u, t), \quad t > 0, \quad u|_{t=0} = u_0 \in H.$$

Здесь A – положительный оператор с дискретным спектром, т.е. существует ортонормированный базис $\{e_i\}$ в пространстве H , состоящий из собственных векторов оператора A :

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \quad (e_i, e_j)_H = \delta_{ij}, \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_N = \infty,$$

а функция $B(u, t)$ при некотором $0 \leq \gamma < 1/2$ является непрерывным отображением из $D(A^{1/2}) \times \mathbb{R}$ в пространство $D(A^{-\gamma})$ и обладает свойством

$$(4.2) \quad \|A^{-\gamma}(B(u_1, t) - B(u_2, t))\| \leq M(\rho) \|A^{1/2}(u_1 - u_2)\|$$

для всех $u_j \in D(A^{1/2})$ таких, что $\|A^{1/2}u_j\| \leq \rho$, где ρ – произвольное положительное число, $M(\rho) > 0$ – некоторая константа, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_H$ – норма в H . Здесь $D(A^{-\gamma})$ – пополнение H по норме $\|A^{-\gamma} \cdot\|$.

Предположим, что задача (4.1) однозначно разрешима в классе функций

$$(4.3) \quad \mathcal{W} = C([0, +\infty); H) \cap C((0, +\infty); D(A^{1/2}))$$

и является точечно диссипативной, т.е. существует $R > 0$ такое, что

$$(4.4) \quad \|A^{1/2}u(t)\| \leq R \quad \text{при} \quad t \geq t_0(u)$$

для всех $u(t) \in \mathcal{W}$. Конкретные примеры задач вида (4.1), для которых выполнены приведенные выше свойства, можно найти, например, в [1]–[5]. Этому классу задач принадлежат, в частности, некоторые уравнения реакции-диффузии, двумерная система Навье–Стокса, двумерные уравнения магнитной гидродинамики.

Результаты, полученные в § 1 и § 2, позволяют установить следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.1. *Предположим, что выполнены условия (4.2) и (4.4). Пусть $\mathcal{L} = \{l_j : j = 1, \dots, N\}$ – множество линейных непрерывных функционалов на пространстве $V = D(A^{1/2})$, снабженном нормой $\|\cdot\|_V = \|A^{1/2} \cdot\|$. Тогда $\mathcal{L}$ является множеством асимптотически $(V, H, \mathcal{W})$ -определяющих функционалов задачи (4.1) при условии, что дефект полноты $\varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H)$ удовлетворяет неравенству*

$$(4.5) \quad \varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H) < \varepsilon_0(\gamma, R) \equiv \sqrt{\frac{1+2\gamma}{1-2\gamma}} \cdot [(1+2\gamma)M(R)]^{-\frac{1}{1-2\gamma}},$$

где $M(\rho)$ и R – величины, фигурирующие в (4.2) и (4.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой пары решений $u(t), v(t) \in \mathcal{W}$ задачи (4.1), используя (4.1) и (4.2), легко обнаружить, что

$$\frac{1}{2}\|w(t)\|^2 + \int_s^t \|A^{1/2}w(\tau)\|^2 d\tau \leq \frac{1}{2}\|w(s)\|^2 + M(R) \int_s^t \|A^{1/2}w(\tau)\| \cdot \|A^\gamma w(\tau)\| d\tau$$

при $t \geq s$, где $s \geq 0$ достаточно велико и $w(t) = u(t) - v(t)$. Отсюда, пользуясь очевидным соотношением $\|A^\gamma w\| \leq \|A^{1/2}w\|^{2\gamma} \cdot \|w\|^{1-2\gamma}$ и неравенством Гёльдера $xy \leq x^p/p + y^q/q$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, с подходящими $p, q > 1$, получаем, что

$$\begin{aligned} M(R)\|A^{1/2}w\| \cdot \|A^\gamma w\| &\leq M(R)\|A^{1/2}w\|^{1+2\gamma} \cdot \|w\|^{1-2\gamma} \\ &\leq \frac{1}{2}\|A^{1/2}w\|^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0(\gamma, R)^{-2}\|w\|^2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|w(t)\|^2 + \int_s^t \|A^{1/2}w(\tau)\|^2 d\tau \leq \|w(s)\|^2 + \varepsilon_0(\gamma, R)^{-2} \int_s^t \|w(\tau)\|^2 d\tau.$$

Теперь утверждение теоремы 4.1 вытекает из следствия 1.1 и теоремы 2.1.

Теоремы 4.1 и 2.4 позволяют легко получить условия существования N определяющих функционалов.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Предположим, что N -поперечник Колмогорова $\kappa_N(V, H)$ вложения пространства $V = D(A^{1/2})$ в H обладает свойством $\kappa_N(V, H) < \varepsilon_0(\gamma, R)$, где $\varepsilon_0(\gamma, R)$ – величина, фигурирующая в (4.5). Тогда существует множество $\mathcal{L}$ асимптотически $(V, H, \mathcal{W})$ -определяющих функционалов задачи (4.1), состоящее из N элементов. В частности, в качестве $\mathcal{L}$ можно взять множество определяющих мод:*

$$\mathcal{L} = \{l_j(v) = (v, e_j), j = 1, 2, \dots, N\}.$$

Здесь $\{e_j\}$ – собственные векторы оператора A , упорядоченные по возрастанию собственных чисел. При этом $\kappa_N(V, H) = \lambda_{N+1}^{-1/2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Используя свойство сглаживания решений для параболических задач вида (4.1) и соотношение (4.4), легко проверить, что в условиях теоремы 4.1 $\mathcal{L}$ является множеством асимптотически $(V, V, \mathcal{W})$ -определяющих функционалов, т.е. сближение траекторий происходит в более сильной норме. Кроме того, оно является также определяющим в следующем смысле (ср. с определением 1.2): для любой пары решений $u_1(t)$ и $u_2(t)$ задачи (4.1), определенных на всей временной оси и таких, что

$$(4.6) \quad \sup\{\|A^{1/2}u_i(t)\| : -\infty < t < \infty\} \leq R, \quad i = 1, 2,$$

из условия $l_j(u_1(t)) = l_j(u_2(t))$ для почти всех $t \in \mathbb{R}$ и $j = 1, \dots, N$ вытекает, что $u_1(t) \equiv u_2(t)$. Доказательство последнего утверждения вытекает из (4.6) и следствия 1.2. Очевидно также, что в том случае, когда условие (4.2) выполняется с константой M , не зависящей от ρ , от требования диссипативности (4.4) в теореме 4.1 можно избавиться.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. При дополнительных условиях (см. [2], [23]–[26]), наиболее ограничительным из которых является требование достаточно быстрого роста величины $\lambda_{N+1} - \lambda_N$ при $N \rightarrow \infty$, задача (4.1) обладает асимптотически полным инерциальным многообразием $\mathcal{M}_t$ вида (1.27), где $V = D(A^\theta)$ при некотором $0 < \theta < 1$, а $P = P_N$ – ортопроектор на первые N собственных векторов оператора A (N достаточно велико). При этом константа Липшица L (см. (1.28)) не зависит от N и выполняются все условия теоремы 1.3 с $\Lambda = \lambda_N^\theta$. Поэтому соотношение вида $\varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H) < c_0 \lambda_N^{-\theta}$ гарантирует выполнение заключений теоремы 1.3 в рассматриваемой здесь ситуации.

ПРИМЕР 4.1 (система Навье–Стокса). Рассмотрим уравнения, описывающие динамику вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей область $\Omega \equiv T^2 = (0, L) \times (0, L)$, с периодическими граничными условиями:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \partial_t u - \nu \Delta u + (u, \nabla)u + \nabla p &= F(x, t), \quad x \in T^2, \quad t > 0, \\ \nabla u &= 0, \quad x \in T^2, \quad u(x, 0) = u_0(x), \end{aligned}$$

где неизвестные вектор скорости $u(x, t) = (u_1(x, t); u_2(x, t))$ и давление $p(x, t)$ являются L -периодическими функциями по пространственным переменным, $\nu > 0$, $F(x, t)$ – внешняя сила.

Введем некоторые определения. Пусть $\mathcal{V}$ – пространство тригонометрических полиномов $v(x)$ периода L со значениями в $\mathbb{R}^2$ таких, что $\operatorname{div} v = 0$ и $\int_{T^2} v(x) dx = 0$. Пусть H – замыкание $\mathcal{V}$ в $\mathbf{L}^2 = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, Π – ортогональный проектор в $\mathbf{L}^2$ на H , $A = -\Pi \Delta u = -\Delta u$, $B(u, v) = \Pi(u, \nabla)v$ для всех u и v из $D(A) = H \cap \mathbf{H}^2$, где $\mathbf{H}^2 = H_{\text{per}}^2(\Omega) \times H_{\text{per}}^2(\Omega)$. Напомним (см. [35], [36]), что A – положительный оператор с дискретным спектром, а билинейный оператор $B(u, v)$ дает непрерывное отображение из $D(A) \times D(A)$ в H и из $D(A^{1/2}) \times D(A^{1/2})$ в $D(A^{-\gamma})$ при любом $\gamma > 0$. Задача (4.7) при этом запишется в виде

$$(4.8) \quad \partial_t u + \nu Au + B(u, u) = \Pi F(t), \quad u|_{t=0} = u_0 \in H.$$

Хорошо известно (см., например, [35], [36]), что если $u_0 \in H$ и $\Pi F(t) \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H)$, то у задачи (4.8) существует единственное решение $u(t)$ такое, что

$$(4.9) \quad u(t) \in \mathcal{W} = C(\mathbb{R}_+; H) \cap C(t_0, +\infty; D(A)), \quad t_0 > 0.$$

Можно показать [8], [36], что оно обладает свойствами

$$(4.10) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|A^{1/2}u(t)\|^2 \leq \frac{F^2}{\nu^2 \lambda_1}$$

и

$$(4.11) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \int_t^{t+a} \|Au(\tau)\|^2 d\tau \leq \frac{F^2}{\nu^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{a\nu\lambda_1}\right)$$

для любого $a > 0$. Здесь $\lambda_1 = (2\pi/L)^2$ – первое собственное число оператора A в H , $F = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\Pi F(t)\|$. При этом рассмотрения, приведенные в [8, с. 177–178], дают, что если $\Pi F(t) \in L^\infty(\mathbb{R}_+; D(A^{1/2}))$, то

$$(4.12) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|Au(t)\|^2 \leq \left(1 + \frac{c_0 F^2}{\nu^4 \lambda_1}\right) \cdot \frac{F^2}{\nu^2} + \frac{2F_1^2}{\nu^2 \lambda_1} \equiv D,$$

где $F_1 = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\nabla \Pi F(t)\|$, c_0 – некоторая абсолютная константа.

Из непрерывности вложений $H^{1-\delta}(\Omega)$ в $L^{2/\delta}(\Omega)$ и $L^{2/(1+\delta)}(\Omega)$ в $H^{-\delta}(\Omega)$ при $0 < \delta < 1$ и неравенства Гёльдера получаем, что

$$\begin{aligned} \|(u, \nabla)v\|_{\mathbf{H}^{-\delta}(\Omega)} &\leq C \|(u, \nabla)v\|_{\mathbf{L}^{2/(1+\delta)}(\Omega)} \\ &\leq C \|u\|_{\mathbf{L}^{2/\delta}(\Omega)} \|\nabla v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\leq C \|u\|_{\mathbf{H}^{1-\delta}(\Omega)} \|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.10) вытекает, что задача (4.8) удовлетворяет условиям теоремы 4.1. Поэтому любое множество $\mathcal{L}$ функционалов на $V = D(A^{1/2}) = H \cap \mathbf{H}^1$ является асимптотически $(V, H, \mathcal{W})$ -определяющим при достаточно малом дефекте $\varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H)$. При этом не трудно обнаружить, что оценка (4.5) в данном случае приобретает вид

$$[\varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H)]^{1-\delta} < C_{\delta} \cdot L^{2-\delta} (\nu G)^{-1},$$

где $G = F \cdot (\lambda \nu^2)^{-1}$ – обобщенное число Грасгофа (оно было введено в [8]), δ – любое число из интервала $(0, 1)$, C_{δ} – константа, зависящая только от δ . А так как для собственных чисел λ_N оператора Стокса $A = -\Pi \Delta$ на торе T^2 выполняется свойство (см., например, [35], [36]):

$$(4.13) \quad \alpha N \lambda_1 \leq \lambda_N \leq \beta N \lambda_1,$$

где $\alpha, \beta > 0$ – некоторые абсолютные константы, то следствие 4.1 дает, что задача (4.7) обладает набором из N определяющих функционалов для каждого N , удовлетворяющего оценке вида $N^{1-\delta} \geq c_{\delta} \cdot ((\nu/L)G)^2$. В частности (см. теорему 3.1 и пример 3.1), если N подчиняется этой оценке, то задача (4.7) имеет N определяющих обобщенных локальных объемных средних. Однако, ввиду того, что $D(A^{1/2}) \not\subset C(\Omega)$, теорема 4.1 не гарантирует существования определяющих узлов в задаче (4.7). В этой связи представляет интерес приведенная ниже теорема 4.2, которая, с одной стороны, позволяет использовать менее гладкие функционалы, а с другой, дает более слабые условия на дефект и число функционалов. Разумеется, эта теорема существенно опирается на структуру задачи (4.7).

ТЕОРЕМА 4.2. 1. *Множество $\mathcal{L} = \{l_j : j = 1, \dots, N\}$ линейно независимых функционалов на $D(A) = \mathbf{H}^2 \cap H$ является асимптотически $(D(A), D(A^{1/2}), \mathcal{W})$ -определяющим для задачи (4.8), где $\mathcal{W}$ определяется равенством (4.9), если $\varepsilon_{\mathcal{L}}(D(A), H) < c_1 \nu^2 F^{-1} \equiv c_1 (\lambda_1 G)^{-1}$, где c_1 – абсолютная константа, $G = F \cdot (\lambda \nu^2)^{-1}$ – обобщенное число Грасгофа.*

2. Пусть $\mathcal{L} = \{l_j : j = 1, \dots, N\}$ – множество линейных функционалов на $H^2(\Omega)$, и пусть p_m – естественная проекция вектора скорости на направление $m = (m_1; m_2)$: $p_m(u_1; u_2) = (m, u) \equiv m_1 u_1 + m_2 u_2$, вектор m не зависит от x , $m_1^2 + m_2^2 = 1$. Определим множество $p_m^* \mathcal{L}$ функционалов на $D(A)$ формулой

$$p_m^* \mathcal{L} = \{l_j^m(u) = l_j(p_m u) : l_j \in \mathcal{L}, u \in D(A), j = 1, \dots, N\}.$$

Предположим, что $\Pi F(t) \in L^\infty(\mathbb{R}_+; D(A^{1/2}))$. Пусть $\hat{H}$ – подпространство в $L^2(\Omega)$, состоящее из функций, обладающих свойством $\int_{\Omega} v dx = 0$, и $\hat{H}^2 = H_{\text{per}}^2(\Omega) \cap \hat{H}$, причем $\hat{H}^2$ снабжено нормой $\|\Delta \cdot\|$. Тогда если

$$(4.14) \quad \hat{\varepsilon}_{\mathcal{L}} \equiv \varepsilon_{\mathcal{L}}(\hat{H}^2, \hat{H}) < c_2 \nu^2 L^{-2} D^{-1},$$

где c_2 – некоторая абсолютная константа, а величина D определена в (4.12), то для каждого орта $m = (m_1; m_2)$ множество $p_m^* \mathcal{L}$ является асимптотически $(D(A), D(A^{1/2}), \mathcal{W})$ -определяющим для задачи (4.8).

Доказательство первого утверждения этой теоремы опирается на лемму 1.1 и соотношение (4.11). Фактически оно хорошо известно (см. [6], [8], [10], [13], [14], где рассмотрены конкретные семейства определяющих функционалов и приведены различные оценки их числа, а также [17], [20], где анализируется случай функционалов общего вида).

Заметим, что соотношение (4.13) и теорема 2.4 о связи дефекта полноты и поперечника Колмогорова позволяют из первого утверждения теоремы 4.2 извлечь существование у задачи (4.7) конечного набора определяющих мод с числом элементов порядка G . Благодаря теоремам 3.1 и 3.2 система (4.7) обладает конечными определяющими семействами обобщенных локальных объемных средних и узлов с числом элементов того же порядка G (см. также [14]). Этот результат согласуется с эвристическими оценками, полученными ранее на основе физических соображений (см. обсуждение в [8], [14] и ссылки, приведенные в этих работах). Следует отметить, что для двумерной системы Навье–Стокса на торе обобщенное число Грасгофа G играет роль, аналогичную числу Рейнольдса, и является естественным параметром, характеризующим сложность динамики (см., например, [8], [14], [36]).

Что касается второго утверждения теоремы 4.2, то его доказательство использует следующую лемму.

ЛЕММА 4.1. Пусть $u, v \in D(A)$ и $w = u - v$. Тогда для любого постоянного вектора $m = (m_1; m_2)$ такого, что $m_1^2 + m_2^2 = 1$, справедлива оценка

$$(4.15) \quad |(B(u, u) - B(v, v), Aw)| \leq cL \|\nabla(m, w)\| \|Aw\| \|Au\|,$$

где $(m, w) = m_1 w_1 + m_2 w_2$ – проекция вектора w на направление m , c – некоторая абсолютная константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя тождество (см. [36])

$$(B(u, w), Aw) + (B(w, u), Aw) + (B(w, w), Au) = 0,$$

справедливое для любых $u, w \in D(A)$, легко обнаружить, что

$$(B(u, u) - B(v, v), Aw) = -(B(w, w), Au),$$

где $u, v \in D(A)$, $w = u - v$. Поэтому достаточно оценить норму $\|B(w, w)\|$. Условие несжимаемости $\nabla w = 0$ и простые вычисления дают, что

$$\begin{aligned} |(w(x), \nabla) w(x)|^2 &= (m, w(x))^2 |\nabla w(x)|^2 + |w(x)|^2 |\nabla(m, w(x))|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} (\partial_2 [(m, w(x))^2] \partial_2 |w(x)|^2 + \partial_1 [(m, w(x))^2] \partial_1 |w(x)|^2). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$|(w(x), \nabla) w(x)|^2 \leq 2(m, w(x))^2 |\nabla w(x)|^2 + 2|w(x)|^2 |\nabla(m, w(x))|^2.$$

Следовательно,

$$\|(w, \nabla)w\|^2 \leq 2(\|(m, w)\nabla w\|^2 + \|w\nabla(m, w)\|^2).$$

Поэтому

$$\|(w, \nabla)w\| \leq \sqrt{2}(\|(m, w)\|_{L^4}\|\nabla w\|_{L^4} + \|w\|_{L^\infty}\|\nabla(m, w)\|).$$

Следовательно, оценка (4.15) вытекает из неравенств

$$\|v\|_{L^4} \leq c_1 L^{1/2} \|\nabla v\|, \quad \|v\|_{L^\infty} \leq c_2 L \|\Delta v\|,$$

справедливых в рассматриваемом классе функций (см. [35], [36], а также работу [8], содержащую явные выражения для c_1 и c_2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО П. 2 ТЕОРЕМЫ 4.2. Пусть $u(t)$ и $v(t)$ – решения задачи (4.8), обладающие свойством (4.9). Тогда из (4.8) и (4.15) для $w = u - v$ имеем, что

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla w\|^2 + \nu \|\Delta w\|^2 \leq cL \|\nabla(m, w)\| \|Aw\| \|Au\|.$$

Отсюда и из (4.12) вытекает, что

$$(4.16) \quad \frac{d}{dt} \|\nabla w\|^2 + \nu \|\Delta w\|^2 \leq cDL^2\nu^{-1} \|\nabla(m, w)\|^2$$

для достаточно больших t . Теорема 2.1 дает оценку

$$\|\phi\| \leq C\eta(\phi) + \widehat{\varepsilon}_{\mathcal{L}} \|\Delta\phi\|, \quad \eta(\phi) = \max_j |l_j(\phi)|, \quad \phi \in \widehat{H}^2.$$

Поэтому неравенство

$$\|\nabla(m, w)\|^2 \leq \|(m, w)\| \cdot \|\Delta(m, w)\|$$

позволяет получить соотношение

$$\|\nabla(m, w)\|^2 \leq C_{\delta, \mathcal{L}} \eta((m, w))^2 + (1 + \delta) \widehat{\varepsilon}_{\mathcal{L}} \cdot \|\Delta(m, w)\|^2$$

для каждого $\delta > 0$. Кроме того, очевидно, что

$$\|\Delta w\|^2 = \|\Delta(m, w)\|^2 + \|\Delta(m^\perp, w)\|^2,$$

где $m^\perp = (m_2; -m_1)$. Поэтому из (4.16) вытекает, что

$$\frac{d}{dt} \|\nabla w(t)\|^2 + [\nu - c(1 + \delta) \widehat{\varepsilon}_{\mathcal{L}} DL^2 \nu^{-1}] \cdot \|\Delta w\|^2 \leq C_{\delta} \eta((m, w))^2$$

для достаточно больших t . Следовательно, условие (4.14) с подходящей константой c_2 дает возможность воспользоваться теоремой 1.1 и получить второе утверждение теоремы 4.2.

Теорема 4.2, в частности, означает, что только один компонент вектора скорости является существенным для однозначного определения асимптотического поведения решений задачи (4.7). Однако, условие (4.14) на дефект полноты приводит к необходимости рассматривать в данной ситуации значительно большее число функционалов по сравнению со случаем утверждения 1 теоремы 4.2. Поэтому этот результат следует рассматривать, в основном, как утверждение качественного характера, свидетельствующее о том, что некоторые компоненты вектора состояний могут оказываться не существенными с точки зрения асимптотического поведения. Более подробно данный эффект обсуждается в работе [20] (см. также [19]). В статье [20] для систем уравнений реакции-диффузии общего вида приведены условия, при которых удается выделять несущественные для асимптотической динамики компоненты вектора решений. Эти условия выполняются для довольно широкого класса систем. Например, справедливо следующее утверждение, относящееся к задаче (4.1).

ТЕОРЕМА 4.3. 1. *Предположим, что задача (4.1) разрешима в классе функций $\mathcal{W}$ вида (4.3) и является точечно диссипативной (см. (4.4)). Пусть Γ_0 и Γ_1 – гильбертовы пространства с нормами $\|\cdot\|_{\Gamma_0}$ и $\|\cdot\|_{\Gamma_1}$ такие, что $\Gamma_1 \subset \Gamma_0$. Предположим, что существует линейный оператор $J: V = D(A^{1/2}) \mapsto \Gamma_1$ такой, что $\|Ju\|_{\Gamma_1} \leq K \cdot \|u\|_V$ и (вместо (4.2)) выполняется неравенство*

$$\frac{1}{2}\|A^{1/2}(u_1 - u_2)\|^2 - (B(u_1, t) - B(u_2, t), u_1 - u_2) \geq -C(R)\|J(u_1 - u_2)\|_{\Gamma_0}^2$$

для всех $u_j \in D(A^{1/2})$, обладающих свойством $\|A^{1/2}u_j\| \leq R$, где $R > 0$ – константа из (4.4), $C(R)$ – некоторое положительное число. Здесь $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в H . Пусть $\mathcal{L} = \{l_i : i = 1, \dots, N\}$ – множество линейных непрерывных функционалов на Γ_1 . Тогда

$$J^*\mathcal{L} = \{l_i^J(w) = l_i(Jw) : l_i \in \mathcal{L}\}$$

является асимптотически $(V, H, \mathcal{W})$ -определяющим множеством для задачи (4.1) при условии, что $\varepsilon_{\mathcal{L}}(\Gamma_1, \Gamma_0) < (2C(R)K^2)^{-1/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко обнаружить, что

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|^2 + (Aw(t), w(t)) = (B(u_1(t), t) - B(u_2(t), t), w(t))$$

для разности $w(t) = u_1(t) - u_2(t)$ двух решений $u_1(t)$ и $u_2(t)$ из $\mathcal{W}$. Следовательно, условия теоремы дают, что

$$\frac{d}{dt} \|w(t)\|^2 + \|A^{1/2}w(t)\|^2 \leq 2C(R)\|Jw(t)\|_{\Gamma_0}^2$$

для достаточно больших t . Поэтому из теоремы 2.1 вытекает, что

$$\frac{d}{dt} \|w(t)\|^2 + \omega \cdot \|A^{1/2}w(t)\|^2 \leq C_{\mathcal{L}, \eta} \cdot \max_i |l_i(Jw(t))|^2$$

для достаточно больших t , где $\omega = 1 - 2(1 + \eta)\varepsilon_{\mathcal{L}}^2(\Gamma_1, \Gamma_0)C(R)K^2$ с произвольным $\eta > 0$. Отсюда вытекает утверждение теоремы 4.3.

В качестве приложения теоремы 4.3 рассмотрим задачу о передаче нервных импульсов (о других ее применениях см. §6).

ПРИМЕР 4.2. Рассматривается следующая система уравнений, предложенная Ходжкиным и Хаксли для описания механизма передачи нервных импульсов:

$$(4.17) \quad \partial_t u - d_0 \partial_x^2 u + g(u, v_1, v_2, v_3) = 0, \quad x \in (0, L), \quad t > 0,$$

$$(4.18) \quad \partial_t v_j - d_j \partial_x^2 v_j + k_j(u) \cdot (v_j - h_j(u)) = 0, \quad x \in (0, L), \quad t > 0.$$

Здесь $d_0 > 0$, $d_j \geq 0$, $j = 1, 2, 3$, и

$$g(u, v_1, v_2, v_3) = -\gamma_1 v_1^3 v_2 (\delta_1 - u) - \gamma_2 v_3^4 (\delta_2 - u) - \gamma_3 (\delta_3 - u),$$

где $\gamma_j > 0$ и $\delta_1 > \delta_3 > 0 > \delta_2$. Предполагается, что $k_j(u)$ и $h_j(u)$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции такие, что $k_j(u) > 0$ и $0 < h_j(u) < 1$, $j = 1, 2, 3$. В этой модели u имеет смысл электрического потенциала в нерве, а v_j являются концентрациями химических веществ и могут изменяться между 0 и 1. При различных граничных условиях задача (4.17), (4.18) изучалась многими авторами (см., например, [2], [37]–[39] и литературу, цитируемую в этих работах). Результаты численного моделирования, представленные в [37], показывают, что асимптотическое поведение решений этой задачи может быть довольно сложным. Ниже показано, что асимптотическое поведение концентраций v_j однозначно определяется множествами функционалов, заданными лишь на электрическом потенциале u . Таким образом, в определенном смысле компонент u вектора состояния (u, v_1, v_2, v_3) является главным.

Дополним уравнения (4.17) и (4.18) начальными данными

$$(4.19) \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad v_j|_{t=0} = v_{j0}(x), \quad j = 1, 2, 3,$$

и рассмотрим для определенности случай периодических граничных условий:

$$(4.20) \quad u(x + L, t) - u(x, t) = d_j \cdot (v_j(x + L, t) - v_j(x, t)) = 0,$$

где $j = 1, 2, 3$, $x \in \mathbb{R}^1$, $t > 0$. Таким образом, для функции $v_j(x, t)$ не ставится каких-либо граничных условий в том случае, когда соответствующий коэффициент диффузии d_j равен нулю, $j = 1, 2, 3$.

Опишем теперь некоторые свойства решений задачи (4.17)–(4.20). Прежде всего, отметим (см. [39]), что параллелепипед

$$D = \{U \equiv (u, v_1, v_2, v_3) : \delta_2 \leq u \leq \delta_1, 0 \leq v_j \leq 1, j = 1, 2, 3\} \subset \mathbb{R}^4$$

является положительно инвариантной областью задачи (4.17)–(4.20). Это означает, что если начальные данные $U_0(x) = (u_0(x), v_{10}(x), v_{20}(x), v_{30}(x))$ принадлежат D для почти всех $x \in [0, L]$, то

$$U(t) \equiv (u(x, t), v_1(x, t), v_2(x, t), v_3(x, t)) \in D$$

для $x \in [0, L]$ и всех $t > 0$, для которых решение существует.

Пусть $\mathbf{H}_s \equiv [V_s]^4 \equiv [H_{\text{per}}^s(0, L)]^4$ – пространство, состоящее из вектор-функций $U(x) \equiv (u, v_1, v_2, v_3)$, где $u, v_j \in H_{\text{per}}^s(0, L)$, $j = 1, 2, 3$. Снабдим его стандартной нормой. Здесь и ниже $V_s = H_{\text{per}}^s(0, L)$ – подпространства соболевского пространства порядка s на $(0, L)$, отвечающие граничным условиям (4.20). Для нормы и скалярного произведения в $V_0 \equiv L^2(0, L)$ используются обозначения $\|\cdot\|$ и $(\cdot, \cdot)$. Пусть

$$\mathbf{H}_0(D) = \{U(x) \in \mathbf{H}_0 : U(x) \in D \text{ для почти всех } x \in (0, L)\}.$$

Предположим, что $d_j > 0$ для всех $j = 1, 2, 3$. Тогда для каждого вектора $U_0 \in \mathbf{H}_0(D) \cap \mathbf{H}_1$ задача (4.17)–(4.20) имеет единственное решение $U(t)$, определенное для всех t (см., например, [2], [38]). Это решение лежит в

$$(4.21) \quad C(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_0(D) \cap \mathbf{H}_1) \cap L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_2).$$

Если же $d_1 = d_2 = d_3 = 0$, то применение общих методов, представленных в [38] (см. также [40]), позволяет показать, что для каждого вектора $U_0 \in \mathbf{H}_0(D) \cap \mathbf{H}_1$ задача (4.17)–(4.20) имеет единственное решение в пространстве

$$(4.22) \quad C(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_0(D) \cap \mathbf{H}_1) \cap L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; H_{\text{per}}^2(0, L) \times (H_{\text{per}}^1(0, L))^3).$$

Следующее утверждение является непосредственным следствием теоремы 4.3, если переопределить нормы (и соответственно, скалярные произведения) в пространствах $\mathbf{H}_s$ с помощью формул

$$\|U\|_{\mathbf{H}_s}^2 = \|\partial_x^s u\|_{L^2(0, L)}^2 + \sum_{j=0}^3 \theta_j^{(s)} \cdot \|\partial_x^s v_j\|_{L^2(0, L)}^2, \quad s = 0, 1,$$

с подходящим выбором констант $\theta_j^{(s)} > 0$. Здесь $U = (u, v_1, v_2, v_3)$. Некоторые детали рассуждений для более сложного случая можно найти ниже в доказательстве теоремы 4.5.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $\mathcal{L} = \{l_j : j = 1, \dots, N\}$ – конечное множество функционалов на пространстве V_1 . Предположим, что

$$(4.23) \quad \varepsilon_{\mathcal{L}} \equiv \varepsilon_{\mathcal{L}}(V_1, V_0) < \sqrt{\frac{d_0}{d_0 + K}},$$

где

$$(4.24) \quad K = (\delta_1 - \delta_2) \cdot \sum_{j=1}^3 \frac{\beta_j(A_j + B_j)}{k_j^*}$$

с $\beta_1 = 3\gamma_1, \beta_2 = \gamma_1, \beta_3 = 4\gamma_2$ и

$$\begin{aligned} A_j &= \max\{|\partial_u k_j(u)| : \delta_2 \leq u \leq \delta_1\}, \\ B_j &= \max\{|\partial_u(k_j h_j)(u)| : \delta_2 \leq u \leq \delta_1\}, \\ k_j^* &= \min\{k_j(u) : \delta_2 \leq u \leq \delta_1\}. \end{aligned}$$

Пусть P – оператор в $\mathbf{H}_0$, который вектору $U_0 \in \mathbf{H}_0$ ставит в соответствие его первый компонент u . Тогда множество $P^*\mathcal{L}$ функционалов вида $l_j^P(U) = l_j(PU)$, где $l_j \in \mathcal{L}$, $j = 1, \dots, N$, является асимптотически $(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_0, \mathcal{W})$ -определяющим множеством для задачи (4.17)–(4.20). Здесь $\mathcal{W}$ либо имеет вид (4.21) при $d_j > 0$, либо совпадает с (4.22), если $d_j = 0$, $j = 1, 2, 3$.

Используя эту теорему и результаты §2 и §3, можно, в частности, показать, что множество узлов

$$\mathcal{L} = \left\{ l_j : l_j(w) = w(x_j), x_j = jh, h = \frac{L}{N}, j = 1, \dots, N_h \right\}$$

является асимптотически определяющим, если $N > N_0 \equiv c_0 L \cdot \sqrt{1 + \frac{K}{d_0}}$, где c_0 – некоторая абсолютная константа. Подобные оценки справедливы для мод и обобщенных локальных объемных средних. Таким образом, для того чтобы асимптотическая

динамика системы определялась небольшим числом функционалов, приходится требовать малость параметра N_0 . Однако, используя имеющиеся результаты (см. [41]) об аналитичности решений задачи (4.17)–(4.20), можно показать (см. приведенную ниже теорему 4.5), что значения всех компонентов вектора состояния $U = (u, v_1, v_2, v_3)$ в двух достаточно близких узлах однозначно определяют асимптотическую динамику рассматриваемой системы независимо от величины параметра N_0 . При этом необходимы некоторые условия регулярности коэффициентов уравнений (4.17) и (4.18).

Предположим, что $d_j > 0$ для всех j , а функции $k_j(u)$ и $h_j(u)$ являются полиномами такими, что $k_j(u) > 0$ и $0 \leq h_j(u) \leq 1$ при $u \in [\delta_2, \delta_1]$. В этом случае (см. [41]) любое решение

$$U(t) = (u(x, t), v_1(x, t), v_2(x, t), v_3(x, t))$$

обладает следующим *свойством регулярности Жевре*: существует $t_* > 0$ такое, что

$$(4.25) \quad \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(|F_l(u(t))|^2 + \sum_{j=1}^3 |F_l(v_j(t))|^2 \right) \cdot e^{\tau|l|} \leq C$$

для некоторого $\tau > 0$ и всех $t \geq t_*$. Здесь $F_l(w)$ – коэффициенты Фурье функции $w(x)$:

$$F_l(w) = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L w(x) \cdot \exp \left\{ i \frac{2\pi l}{L} x \right\} dx, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

В частности, свойство (4.25) означает, что все решения задачи (4.17)–(4.20) становятся вещественно-аналитическими функциями, начиная с некоторого момента времени. Это свойство позволяет доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть $d_j > 0$ для всех j , а $k_j(u)$ и $h_j(u)$ – полиномы, обладающие свойствами $k_j(u) > 0$ и $0 \leq h_j(u) \leq 1$ при $u \in [\delta_2, \delta_1]$. Пусть x_1 и x_2 – два узла такие, что $0 \leq x_1 < x_2 \leq L$ и $x_2 - x_1 < \sqrt{2d_0/K}$, где K определяется формулой (4.24). Тогда множество функционалов

$$\mathcal{L} = \{l_{0n}(U) = u(x_n), l_{jn}(U) = v_j(x_n) : n = 1, 2; j = 1, 2, 3\}$$

является асимптотически $(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_0, \mathcal{W})$ -определяющим множеством для задачи (4.17)–(4.20). Здесь $\mathcal{W}$ имеет вид (4.21).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $W = (w, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$ – разность двух решений, лежащих в классе (4.21). Введем обозначения:

$$\Delta = \{x : x_1 \leq x \leq x_2\}, \quad |\Delta| = x_2 - x_1 \quad \text{и} \quad \|w\|_{\Delta}^2 = \int_{x_1}^{x_2} |w(x)|^2 dx.$$

Пусть

$$m(t, \Delta) = \max_{n=1,2} \left\{ |w(x_n, t)| + \sum_{j=1}^3 |\psi_j(x_n, t)| \right\}.$$

Обычное интегрирование по частям дает, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \|w\|_{\Delta}^2 + d_0 \|\partial_x w\|_{\Delta}^2 + \gamma_3 \|w\|_{\Delta}^2 \\ \leq \sum_{n=1,2} |w(x_n, t) \cdot \partial_x w(x_n, t)| + (\delta_1 - \delta_2) \sum_{j=1}^3 \beta_j \|\psi_j\|_{\Delta} \cdot \|w\|_{\Delta} \end{aligned}$$

и

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \|\psi_j\|_{\Delta}^2 + k_j^* \|\psi_j\|_{\Delta}^2 \leq \sum_{l=1,2} |\psi_j(x_l, t) \cdot \partial_x \psi_j(x_l, t)| + (A_j + B_j) \|\psi_j\|_{\Delta} \cdot \|w\|_{\Delta}.$$

Из (4.25) вытекает, что

$$\sup_{t > t_*} \max_{x \in [0, L]} \left\{ |\partial_x w(x, t)| + \sum_{j=1}^3 |\partial_x \psi_j(x, t)| \right\} < \infty.$$

Поэтому для любого $0 < \varepsilon < 1$ и $\theta_j = (\delta_1 - \delta_2) \beta_j \cdot (A_j + B_j)^{-1}$, $j = 1, 2, 3$, имеем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left(\|w(t)\|_{\Delta}^2 + \sum_{j=1}^3 \theta_j \|\psi_j\|_{\Delta}^2 \right) + d_0 \|\partial_x w\|_{\Delta}^2 + \gamma_3 \|w\|_{\Delta}^2 + \varepsilon \sum_{j=1}^3 k_j^* \theta_j \|\psi_j\|_{\Delta}^2 \\ \leq K \cdot (1 - \varepsilon)^{-1} \cdot \|w\|_{\Delta}^2 + Cm(t, \Delta) \end{aligned}$$

при $t > t_*$, где K определяется формулой (4.24), C – некоторая положительная константа. Простое вычисление дает, что

$$\|w\|_{\Delta}^2 \leq (1 + \eta) \frac{|\Delta|^2}{2} \cdot \int_{x_1}^{x_2} |\partial_x w(x)|^2 dx + C_{\eta} \cdot |\Delta| \cdot |w(x_1)|^2$$

для любого $\eta > 0$. Следовательно, если $|\Delta|^2 < 2d_0/K$, то существуют $0 < \varepsilon < 1$ и $\eta > 0$ такие, что

$$\frac{d}{dt} \left(\|w\|_{\Delta}^2 + \sum_{j=1}^3 \theta_j \|\psi_j\|_{\Delta}^2 \right) + \omega \cdot \left(\|w\|_{\Delta}^2 + \sum_{j=1}^3 \theta_j \|\psi_j\|_{\Delta}^2 \right) \leq C \cdot m(t, \Delta),$$

где ω – положительная константа. Отсюда (см. лемму 1.1) заключаем, что из условия $m(t, \Delta) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, вытекает соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\|w\|_{\Delta}^2 + \sum_{j=1}^3 \theta_j \|\psi_j\|_{\Delta}^2 \right) = 0.$$

Используя теперь тот факт, что все решения стремятся к глобальному аттрактору, состоящему из вещественно-аналитических функций, и рассуждая так же, как и в [15], [42], можно завершить доказательство теоремы.

Отметим, что впервые внимание на связь между свойством регулярности Жевре и существованием малого числа определяющих узлов было обращено в работе [15], посвященной уравнению Гинзбурга–Ландау (см. также [16], [42]). Интересно, что в случае уравнения Курамото–Сивашинского число определяющих узлов оказалось равным четырем [16].

**§ 5. Определяющие функционалы
для уравнений второго порядка по времени**

В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассмотрим задачу вида

$$(5.1) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + \gamma \frac{du}{dt} + Au + G(u, t) = 0, \quad t > 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = u_1.$$

Здесь, как и ранее (см. § 4), A – положительный оператор с дискретным спектром, γ – положительная константа. Предполагается, что функция $G(u, t)$ является непрерывным отображением из $D(A^{1/2}) \times \mathbb{R}$ в пространство H , обладающим при некотором $0 \leq \theta < 1/2$ свойством

$$(5.2) \quad \|G(u_1, t) - G(u_2, t)\| \leq M(\rho) \|A^\theta(u_1 - u_2)\|$$

для всех $u_j \in D(A^{1/2})$ таких, что $\|A^{1/2}u_j\| \leq \rho$, где ρ – произвольное положительное число, $M(\rho) > 0$ – некоторая константа, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_H$ и $(\cdot, \cdot)$ – норма и скалярное произведение в H . Предположим, что задача (5.1) однозначно разрешима в классе функций

$$(5.3) \quad \mathcal{W} = C^1([0, +\infty); H) \cap C([0, +\infty); D(A^{1/2}))$$

и является точечно диссипативной в следующем смысле: существует $R > 0$ такое, что

$$(5.4) \quad \|\partial_t u(t)\|^2 + \|A^{1/2}u(t)\|^2 \leq R^2 \quad \text{при } t \geq t_0(u)$$

для всех $u(t) \in \mathcal{W}$. Примеры задач вида (5.1), для которых выполнены приведенные выше свойства, можно найти, например, в [1] и [2] (см. также [4]). Этому классу задач принадлежит, в частности, нелинейное волновое уравнение вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u) &= 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = u_1(x). \end{aligned}$$

Здесь Ω – гладкая ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, $f(u)$ – подходящая непрерывно дифференцируемая функция, γ – положительный параметр.

В этом параграфе приведено (вместе с примерами) несколько утверждений о существовании определяющих функционалов для задачи (5.1) и ее запаздывающих возмущений. Основную роль здесь играет теорема 1.1. Соответствующая функция $V(u, t)$, хотя и является квадратичной, имеет более сложную структуру по сравнению с параболическим (см. § 4) случаем.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\mathcal{L} = \{l_j : j = 1, \dots, N\}$ – множество линейных непрерывных функционалов на пространстве $V = D(A^{1/2})$, снабженном нормой $\|\cdot\|_V = \|A^{1/2}\cdot\|$. Предположим, что дефект полноты $\varepsilon = \varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H)$ удовлетворяет неравенству

$$(5.5) \quad 32\gamma^{-2}M(R)^2\varepsilon_{\mathcal{L}}^{2-4\theta} + \gamma^2\varepsilon_{\mathcal{L}}^2 < 8,$$

где $M(\rho)$, R и γ — величины, фигурирующие в (5.1), (5.2) и (5.4). Тогда $\mathcal{L}$ является множеством асимптотически $(V, V \times H, \mathcal{W})$ -определяющих функционалов задачи (5.1) в следующем смысле: для любой пары ее решений $u_1, u_2 \in \mathcal{W}$ из условия

$$(5.6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+1} |l_j(u_1(\tau)) - l_j(u_2(\tau))|^2 d\tau = 0 \quad \text{для } j = 1, \dots, N$$

вытекает, что

$$(5.7) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \{ \|A^{1/2}(u_1(t) - u_2(t))\|^2 + \|\partial_t u_1(t) - \partial_t u_2(t)\|^2 \} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u_1(t), u_2(t) \in \mathcal{W}$ — решения задачи (5.1) и $w(t) = u_1(t) - u_2(t)$. Используя (5.1) и (5.2), легко обнаружить, что

$$(5.8) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\partial_t w(t)\|^2 + \|A^{1/2} w(t)\|^2) + \frac{3}{4} \gamma \|\partial_t w(t)\|^2 \leq \frac{M(R)^2}{\gamma} \|A^\theta w(t)\|^2$$

для достаточно больших t . Далее, простая проверка показывает, что

$$(5.9) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left((w(t), \partial_t w(t)) + \frac{\gamma}{2} \|w(t)\|^2 \right) \\ & \leq \|\partial_t w(t)\|^2 - \|A^{1/2} w(t)\|^2 + \frac{2M(R)^2}{\gamma^2} \|A^\theta w(t)\|^2 + \frac{\gamma^2}{8} \|w(t)\|^2 \end{aligned}$$

для достаточно больших t . Рассмотрим теперь функцию

$$(5.10) \quad \begin{aligned} V(t) & \equiv V(w(t), \partial_t w(t)) \\ & = \frac{1}{2} (\|\partial_t w(t)\|^2 + \|A^{1/2} w(t)\|^2) + \frac{\gamma}{2} \cdot \left((w(t), \partial_t w(t)) + \frac{\gamma}{2} \|w(t)\|^2 \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$(5.11) \quad \frac{1}{4} (\|\partial_t w(t)\|^2 + \|A^{1/2} w(t)\|^2) \leq V(t) \leq \frac{3}{4} \|\partial_t w(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|A^{1/2} w(t)\|^2 + \frac{\gamma^2}{2} \|w(t)\|^2.$$

Поэтому из (5.8)–(5.10) вытекает, что для всех $\beta \in (0, \gamma/3]$:

$$\frac{d}{dt} V(t) + \beta V(t) \leq -\frac{\gamma - \beta}{2} \|A^{1/2} w(t)\|^2 + \frac{2M(R)^2}{\gamma} \|A^\theta w(t)\|^2 + \frac{\gamma^2}{16} (\gamma + 8\beta) \|w(t)\|^2.$$

Пользуясь неравенством $\|A^\theta w\| \leq \|A^{1/2} w\|^{2\theta} \cdot \|w\|^{1-2\theta}$ при $0 \leq \theta < 1/2$ и леммой 2.1, получаем, что

$$(5.12) \quad \varepsilon_{\mathcal{L}}(D(A^{1/2}), D(A^\theta)) \leq \varepsilon_{\mathcal{L}}(D(A^{1/2}), H)^{1-2\theta} \equiv \varepsilon_{\mathcal{L}}^{1-2\theta}.$$

Поэтому с помощью теоремы 2.1 находим, что

$$\frac{d}{dt} V(t) + \beta V(t) \leq -\frac{\omega}{16} \|A^{1/2} w(t)\|^2 + C_{\mathcal{L}, \delta} \max_j |l_j(w(t))|^2,$$

где

$$\omega = 8(\gamma - \beta) - 32\gamma^{-1} M(R)^2 \varepsilon_{\mathcal{L}}^{2-4\theta} - \gamma^2 (\gamma + 8\beta) \varepsilon_{\mathcal{L}}^2 - \delta$$

с любым достаточно малым $\delta > 0$. Используя это соотношение, легко показать, что при условии (5.5) в окрестности нуля существуют $\delta > 0$ и $\beta > 0$ такие, что $\omega > 0$. Поэтому в силу теоремы 1.1 из (5.6) вытекает (5.7). Теорема 5.1 доказана.

ПРИМЕР 5.1. При изучении динамики упругой пологой оболочки в сверхзвуковом потоке газа часто используется следующая система уравнений Кармана (см., например, [4], [43], [44] и ссылки, приведенные в этих работах):

$$(5.13) \quad (1 - \alpha \cdot \Delta) \partial_t^2 u + \gamma(1 - \alpha \cdot \Delta) \partial_t u + \Delta^2 u - [u + f, v + \psi] + \beta \partial_{x_1} u = p(x), \quad x \in \Omega, \quad t > 0,$$

$$(5.14) \quad u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad \partial_t u|_{t=0} = u_1(x).$$

Величина $v = v(u)$ определяется как решение задачи

$$(5.15) \quad \Delta^2 v + [u + 2f, u] = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Здесь Ω – гладкая ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, Δ – оператор Лапласа и

$$[u, v] = \partial_{x_1}^2 u \cdot \partial_{x_2}^2 v + \partial_{x_2}^2 u \cdot \partial_{x_1}^2 v - 2 \cdot \partial_{x_1 x_2}^2 u \cdot \partial_{x_1 x_2}^2 v.$$

Неизвестная функция $u = u(x, t)$ описывает поперечное отклонение оболочки в точке x в момент t ; $\psi(x) \in H^4(\Omega)$, $f(x) \in H^2(\Omega)$ и $p(x) \in L^2(\Omega)$ – заданные функции, определяемые механическими нагрузками и исходной формой оболочки. Параметр $\alpha > 0$ учитывает инерцию вращения элементов оболочки. Число $\beta > 0$ определяется скоростью набегающего вдоль оси x_1 потока газа. Величина $\gamma > 0$ описывает сопротивление среды. Задача (5.13)–(5.15) может быть записана как уравнение вида (5.1) в пространстве $H_0^1(\Omega)$. Все условия, предъявляемые выше к задаче (5.1), выполняются (см. [43]) и для (5.13)–(5.15). При этом θ – любое число из интервала $(1/4, 1/2)$, а величина $M(\rho)$ имеет вид

$$M(\rho) = c_0(\beta + \|f\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|\psi\|_{H^4(\Omega)} + \rho^2),$$

где c_0 – некоторая константа, зависящая от размеров области Ω . Решения рассматриваются в классе

$$\mathcal{W} = C^1([0, +\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C([0, +\infty); H_0^2(\Omega)).$$

Применение теоремы 5.1 дает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $\mathcal{L} = \{l_j : j = 1, \dots, N\}$ – множество линейных непрерывных функционалов на пространстве $H_0^2(\Omega)$. Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$, зависящее от параметров уравнения (5.13), такое, что из условия $\varepsilon_{\mathcal{L}}(H_0^2(\Omega), H_0^1(\Omega)) < \varepsilon_0$ вытекает, что $\mathcal{L}$ является множеством асимптотически $(H_0^2(\Omega), H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega), \mathcal{W})$ -определяющих функционалов задачи (5.13)–(5.15), т.е. для любых двух решений $u_1, u_2 \in \mathcal{W}$ из условия (5.6) вытекает, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{ \|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|\partial_t u_1(t) - \partial_t u_2(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \} = 0.$$

Аналогичное утверждение может быть установлено и для задачи (5.13)–(5.15) в случае, когда $\alpha = 0$ (см. [18] и [21]). Соответствующая функция $V(t)$ (см. (5.10)) имеет более сложный вид. Отметим также, что результаты §3 гарантируют для задачи (5.13)–(5.15) существование конечных наборов асимптотически определяющих узлов и локальных объемных средних. Однако получить эффективные оценки величины ε_0 , фигурирующей в теореме 5.2, а также соответствующего числа N определяющих функционалов через параметры задачи удастся лишь в нескольких частных случаях. Это связано с тем, что имеющееся доказательство (см. [43]) диссипативности задачи (5.13)–(5.15) не является конструктивным.

Другой интересный класс примеров возникает, если рассмотреть запаздывающие возмущения задачи (5.1):

$$(5.16) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + \gamma \frac{du}{dt} + Au + G(u, t) = Q(u_t, t), \quad t > 0,$$

$$(5.17) \quad u|_{t=+0} = u_0, \quad \frac{du}{dt}\bigg|_{t=+0} = u_1, \quad u|_{t \in (-r, 0)} = \phi(t) \in L^2(-r, 0; H).$$

Здесь, как обычно (см. [45]), использовано обозначение u_t для элемента из $L^2(-r, 0; H)$, определяемого равенством $u_t(s) = u(t + s)$, $s \in (-r, 0)$. Параметр $r > 0$ имеет смысл величины запаздывания. Предполагается, что $G(u, t)$ обладает свойством (5.2), а $Q(\cdot, t)$ – непрерывное линейное отображение $L^2(-r, 0; D(A^{1/2}))$ в H , обладающее для некоторого $\theta^* \in [0, 1/2)$ свойством

$$(5.18) \quad \|Q(u, t)\|^2 \leq q_0 \int_{t-r}^t \|A^{\theta^*} u(\tau)\|^2 d\tau,$$

где q_0 – некоторая константа. Предположим также, что задача (5.16)–(5.17) однозначно разрешима в классе функций

$$(5.19) \quad \mathcal{W} = C^1([0, +\infty); H) \cap C([0, +\infty); D(A^{1/2})) \cap L^2_{\text{loc}}([-r, +\infty); D(A^{1/2}))$$

и является точечно диссипативной, т.е. существует $R > 0$ такое, что выполнено (5.4) для всех $u(t) \in \mathcal{W}$. Отметим, что все эти свойства выполняются для ситуации, рассмотренной в приведенном ниже примере 5.2. Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть $\mathcal{L} = \{l_j : j = 1, \dots, N\}$ – множество линейных непрерывных функционалов на пространстве $V = D(A^{1/2})$, снабженном нормой $\|\cdot\|_V = \|A^{1/2} \cdot\|$. Предположим, что дефект полноты $\varepsilon = \varepsilon_{\mathcal{L}}(V, H)$ удовлетворяет неравенствам

$$(5.20) \quad 16\gamma^{-2}M(R)^2\varepsilon_{\mathcal{L}}^{2-4\theta} + \gamma^2\varepsilon_{\mathcal{L}}^2 < 2, \quad 12rq_0\gamma^{-2}\varepsilon_{\mathcal{L}}^{2-4\theta^*} < 1,$$

где $M(\rho)$, R , γ , θ , θ^* , r , q_0 – величины, фигурирующие в (5.2), (5.4) и (5.16)–(5.18). Тогда $\mathcal{L}$ является множеством асимптотически $(V, V \times H, \mathcal{W})$ -определяющих функционалов задачи (5.16)–(5.17), т.е. из (5.6) вытекает (5.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u_1(t), u_2(t) \in \mathcal{W}$ – решения задачи (5.16)–(5.17) и $w(t) = u_1(t) - u_2(t)$. Рассмотрим функцию $V(t)$, определяемую равенством (5.10). Так же, как и при доказательстве теоремы 5.1, легко проверить (см. (5.8) и (5.9)), что

$$(5.21) \quad \frac{d}{dt}V(t) \leq -\frac{\gamma}{8}\|\partial_t w(t)\|^2 - \frac{\gamma}{2}\|A^{1/2}w(t)\|^2 + \frac{2M(R)^2}{\gamma}\|A^\theta w(t)\|^2 + \frac{\gamma^3}{8}\|w(t)\|^2 + \frac{3}{\gamma}\|Q(w_t, t)\|^2$$

для достаточно больших $t > 0$. Рассмотрим теперь функцию

$$(5.22) \quad W(t) = V(t) + \mu \int_0^r ds \int_{t-s}^t \|A^{1/2}w(\tau)\|^2 d\tau.$$

Параметр $\mu > 0$ будет выбран ниже. Из (5.11) вытекает, что

$$(5.23) \quad W(t) \leq \frac{3}{4}\|\partial_t w(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|A^{1/2}w(t)\|^2 + \frac{\gamma^2}{2}\|w(t)\|^2 + \mu r \int_{t-r}^t \|A^{1/2}w(\tau)\|^2 d\tau.$$

Кроме того, очевидно, что

$$(5.24) \quad \frac{d}{dt}W(t) = \frac{d}{dt}V(t) + \mu r \|A^{1/2}w(t)\|^2 - \mu \int_{t-r}^t \|A^{1/2}w(\tau)\|^2 d\tau.$$

Поэтому, используя (5.18), из (5.21)–(5.24) для любого $\beta > 0$ получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W(t) + \beta W(t) &\leq -\left(\frac{\gamma}{8} - \frac{3}{4}\beta\right)\|\partial_t w(t)\|^2 - \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2} - \mu r\right)\|A^{1/2}w(t)\|^2 \\ &\quad + \frac{2M(R)^2}{\gamma}\|A^\theta w(t)\|^2 + \frac{\gamma^2}{8}(\gamma + 4\beta)\|w(t)\|^2 \\ &\quad + \int_{t-r}^t \left(-\mu(1 - \beta r)\|A^{1/2}w(\tau)\|^2 + \frac{3q_0}{\gamma}\|A^{\theta*}w(\tau)\|^2\right) d\tau. \end{aligned}$$

Следовательно, как и в теореме 5.1, с помощью (5.12) и свойств дефекта полноты (см. теорему 2.1) находим, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W(t) + \beta W(t) &\leq -\frac{1}{8}(\gamma - 6\beta)\|\partial_t w(t)\|^2 - \omega_1\|A^{1/2}w(t)\|^2 - \omega_2 \int_{t-r}^t \|A^{1/2}w(\tau)\|^2 d\tau \\ &\leq C_{\mathcal{L}, \delta} \left(\max_j |l_j(w(t))|^2 + \int_{t-r}^t \max_j |l_j(w(\tau))|^2 d\tau \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \left(\frac{\gamma - \beta}{2} - \mu r\right) - \frac{2M(R)^2}{\gamma}(1 + \delta)\varepsilon_{\mathcal{L}}^{2-4\theta} - \frac{\gamma^2}{8}(\gamma + 4\beta)(1 + \delta)\varepsilon_{\mathcal{L}}^2, \\ \omega_2 &= \mu(1 - \beta r) - \frac{3q_0}{\gamma}(1 + \delta)\varepsilon_{\mathcal{L}}^{2-4\theta*} \end{aligned}$$

с произвольными $\delta > 0$ и $\beta > 0$. Выбирая $\mu = \gamma/(4r)$, из условий (5.20) получаем, что существуют $\delta > 0$ и $0 < \beta \leq \gamma/6$ такие, что

$$\frac{d}{dt}W(t) + \beta W(t) \leq C_{\mathcal{L}, \delta} \left(\max_j |l_j(w(t))|^2 + \int_{t-r}^t \max_j |l_j(w(\tau))|^2 d\tau \right).$$

Поэтому теорема 1.1 дает, что из (5.6) вытекает (5.7). Теорема 5.3 доказана.

ПРИМЕР 5.2. Вернемся к задаче (5.13)–(5.15). Если оболочка находится в потенциальном линеаризованном потоке газа, то аэродинамическое давление потока можно учесть (см. [46], [47] и приведенные там ссылки), полагая в правой части (5.13)

$$(5.25) \quad p(x, t) = p_0(x) - \frac{\nu}{2\pi U} q(u; x, t),$$

где $p_0(x) \in L^2(\Omega)$, параметр $\nu > 0$ характеризует интенсивность взаимодействия между потоком и оболочкой, величина $U > 0$ ($U \neq 1$) является скоростью невозмущенного потока,

$$q(u, x, t) = \int_0^r ds \int_0^{2\pi} d\xi [M_\xi^2 \hat{u}](x_1 - (U + \sin \xi)s, x_2 - s \cos \xi, t - s).$$

Здесь $\hat{u}$ – продолжение функции $u(x, t)$ нулем вне Ω ,

$$M_\xi = \sin \xi \cdot \partial_{x_1} + \cos \xi \cdot \partial_{x_2}$$

и r – некоторый параметр, зависящий от U и размеров области Ω . Запоздывающий характер задачи требует добавления к (5.14) начального условия вида

$$(5.26) \quad u|_{t \in (-r, 0)} = \varphi(x, t).$$

Из результатов, полученных в [46], [47], вытекает, что задача (5.13)–(5.15), (5.25), (5.26), записанная в пространстве $H_0^1(\Omega)$, удовлетворяет всем условиям, необходимым для применения теоремы 5.3. Оценка (5.18) вытекает из неравенства (см. [46], [47], а также [48]):

$$\|q(u, t)\|_{H^s(\Omega)}^2 \leq C \int_{t-r}^t \|u(\tau)\|_{H^{2+s}(\Omega)}^2 d\tau \quad \text{для } s = 0, -1.$$

Таким образом, для системы (5.13)–(5.15), (5.25), (5.26) справедливы заключения теоремы 5.2 с $\theta^* = 0$. Получить оценки для дефекта полноты в удобной для приложений форме здесь не удастся по тем же причинам, что и в примере 5.1.

§ 6. О граничных определяющих функционалах

Тот факт (см. § 4), что в некоторых случаях определяющие функционалы можно задавать на некотором вспомогательном пространстве, допускает следующую, интересную на наш взгляд, интерпретацию, приводящую к понятию граничных определяющих функционалов. Ниже эта интерпретация разъясняется на примере двух задач.

ПРИМЕР 6.1. Пусть в гладкой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ задано параболическое уравнение с нелинейным граничным условием:

$$(6.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta u - f(u), & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} + h(u) \right) \Big|_{\partial \Omega} = 0, & u|_{t=0} = u_0(x). \end{cases}$$

Здесь n – внешняя нормаль к $\partial\Omega$, ν – положительный параметр, а $f(z)$ и $h(z)$ – непрерывно дифференцируемые функции на $\mathbb{R}^1$ такие, что

$$(6.2) \quad f'(z) \geq -\alpha, \quad h'(z) \geq -\beta, \quad z \in \mathbb{R}^1,$$

где $\alpha, \beta \geq 0$ – некоторые константы. Рассмотрим множество классических решений (об условиях их существования см., например, в [49]):

$$(6.3) \quad \mathcal{W} = C^{2,1}(\Omega \times \mathbb{R}_+) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega \times \mathbb{R}_+}).$$

Здесь $C^{2,1}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ – множество функций $u(x, t)$ на $\Omega \times \mathbb{R}_+$, два раза непрерывно дифференцируемых по x и непрерывно дифференцируемых по t . Аналогичный смысл имеет обозначение $C^{1,0}(\overline{\Omega \times \mathbb{R}_+})$, черта означает замыкание множества.

Пусть $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ – два решения задачи (6.1), лежащие в классе $\mathcal{W}$. Рассмотрим их разность $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$. Тогда из (6.1) очевидно вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (f(u_1(t)) - f(u_2(t)), u(t))_{L^2(\Omega)} \\ = -\nu \int_{\partial\Omega} u(t) (h(u_1(t)) - h(u_2(t))) d\sigma. \end{aligned}$$

Пользуясь (6.2), отсюда получаем, что

$$(6.4) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \alpha \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \nu \beta \|u(t)\|_{L^2(\partial\Omega)}^2.$$

Можно показать, что существуют константы a_1 и a_2 , зависящие лишь от области Ω , такие, что

$$(6.5) \quad \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq a_1 (\|u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2)$$

и

$$(6.6) \quad \|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}^2 \leq a_2 (\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2).$$

Здесь $H^s(\partial\Omega)$ – соболевское пространство порядка s на границе области Ω . Соотношения (6.4)–(6.6) позволяют получить следующее утверждение, являющееся фактически некоторой конкретизацией теоремы 4.3.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $\mathcal{L} = \{l_j : j = 1, \dots, N\}$ – множество функционалов на пространстве $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Предположим, что $\alpha \cdot a_1 < \nu$ и

$$(6.7) \quad \varepsilon_{\mathcal{L}} \equiv \varepsilon_{\mathcal{L}}(H^{1/2}(\partial\Omega), L^2(\partial\Omega)) < \sqrt{(1 - \alpha\nu^{-1}a_1)a_3},$$

где $a_3^{-1} = (1 + a_1)a_2(1 + \beta)$, а константы ν , α , β , a_1 , a_2 определены в соотношениях (6.1), (6.2), (6.5), (6.6). Тогда $\mathcal{L}$ является асимптотически $(H^{1/2}(\partial\Omega), L^2(\Omega), \mathcal{W})$ -определяющим множеством для задачи (6.1) в классе классических решений (6.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$, где $u_j(t) \in \mathcal{W}$ – решения задачи (6.1). Из теоремы 2.1 вытекает, что

$$(6.8) \quad \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \leq C_{\mathcal{L}, \eta} \max_j |l_j(u|_{\partial\Omega})|^2 + (1 + \eta) \varepsilon_{\mathcal{L}}^2 \|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}^2$$

для любого $\eta > 0$. Поэтому из (6.5) и (6.6) вытекает, что

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \leq C \max_j |l_j(u|_{\partial\Omega})|^2 + (1 + a_1) a_2 (1 + \eta) \varepsilon_{\mathcal{L}}^2 (\|u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2).$$

Следовательно, (6.4) дает, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu [\|u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2] - \alpha \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq \nu (1 + \eta) a_3^{-1} \cdot \varepsilon_{\mathcal{L}}^2 (\|u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2) + C \max_j |l_j(u|_{\partial\Omega})|^2. \end{aligned}$$

Используя еще раз оценку (6.5), имеем, что

$$(6.9) \quad \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2\nu}{a_1} \left\{ 1 - \frac{1 + \eta}{a_3} \varepsilon_{\mathcal{L}}^2 - \alpha \frac{a_1}{\nu} \right\} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \max_j |l_j(u|_{\partial\Omega})|^2,$$

при условии, что $1 - (1 + \eta) a_3^{-1} \varepsilon_{\mathcal{L}}^2 - \alpha a_1 \nu^{-1} > 0$. Очевидно, что это условие при некотором $\eta > 0$ вытекает из (6.7). Поэтому неравенство (6.9) позволяет завершить доказательство теоремы.

Таким образом, асимптотическая динамика решений задачи (6.1) однозначно определяется поведением их следов на границе области. В частности, аналог теоремы 3.1 для гладких поверхностей позволяет утверждать, что задача (6.1) обладает конечными определяющими наборами граничных локальных поверхностных средних.

ПРИМЕР 6.2. Утверждение, аналогичное теореме 6.1, может быть установлено и для нелинейного волнового уравнения вида

$$(6.10) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta u - f(u), & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, \quad t > 0, \\ \nu \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = -\delta \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\Gamma} - h(u|_{\Gamma}), & u|_{\partial\Omega \setminus \Gamma} = 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = u_1(x). \end{cases}$$

Здесь n – внешняя нормаль к $\partial\Omega$, ν, γ, δ – положительные параметры, Γ – некоторое гладкое открытое подмножество на границе области Ω , случай $\Gamma = \partial\Omega$ не исключается. Предполагается, что $f(z)$ и $h(z)$ – непрерывно дифференцируемые функции с ограниченными производными:

$$(6.11) \quad |f'(z)| \leq \alpha, \quad |h'(z)| \leq \beta, \quad z \in \mathbb{R}^1,$$

где $\alpha > 0, \beta > 0$ – некоторые константы. Можно показать [50], что задача (6.10) однозначно разрешима в классе функций

$$\mathcal{W} = C(\mathbb{R}_+; H_{\Gamma}^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)),$$

где $H_\Gamma^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega \setminus \Gamma} = 0\}$. При этом

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\Gamma \times \mathbb{R}_+), \quad \frac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\Gamma \times \mathbb{R}_+)$$

в смысле обобщенных функций. Пусть (ср. (6.5), (6.6)) $a_1 = a_1(\Gamma, \Omega)$ и $a_2 = a_2(\Gamma, \Omega)$ – положительные константы такие, что

$$(6.12) \quad \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq a_1 (\|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2)$$

и

$$(6.13) \quad \|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \leq a_2 (\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2).$$

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $\mathcal{L} = \{l_j : j = 1, \dots, N\}$ – множество функционалов на пространстве $H^{1/2}(\Gamma)$. Предположим, что $\alpha \cdot a_1(1 + 2\alpha\gamma^{-2}) < \nu$ и дефект полноты $\varepsilon_{\mathcal{L}} \equiv \varepsilon_{\mathcal{L}}(H^{1/2}(\Gamma), L^2(\Gamma))$ удовлетворяет неравенству

$$(6.14) \quad (1 + a_1)a_2 \cdot \varepsilon_{\mathcal{L}}^2 < 2\gamma \left(\nu - \alpha \cdot a_1 \frac{2\alpha + \gamma^2}{\gamma^2} \right) \cdot [\beta^2 \delta^{-1} + 2\gamma(\nu + \beta)]^{-1},$$

где константы $\nu, \alpha, \beta, \gamma, \delta, a_1, a_2$ определены в соотношениях (6.10)–(6.13). Тогда $\mathcal{L}$ является асимптотически $(H^{1/2}(\Gamma), (H^1 \times L^2)(\Omega), \mathcal{W})$ -определяющим множеством для задачи (6.10) в следующем смысле: для любой пары ее решений $u_1, u_2 \in \mathcal{W}$ из условия

$$(6.15) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+1} |l_j(u_1(\tau)|_\Gamma) - l_j(u_2(\tau)|_\Gamma)|^2 d\tau = 0 \quad \text{для } j = 1, \dots, N$$

вытекает, что

$$(6.16) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \{ \|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\partial_t u_1(t) - \partial_t u_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$, где $u_j(t) \in \mathcal{W}$ – решения задачи (6.10). Тогда $u(t)$ является решением линейной задачи вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u = f(t) \equiv f(u_2(t)) - f(u_1(t)), & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \nu \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_\Gamma + \delta \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_\Gamma = h(t) \equiv h(u_2(t)|_\Gamma) - h(u_1(t)|_\Gamma), & u|_{\partial\Omega \setminus \Gamma} = 0, \end{cases}$$

с некоторыми начальными условиями. Поэтому предложение 2.1 из [50] для функции

$$(6.17) \quad E(t) = \frac{1}{2} (\|\partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2)$$

дает, что

$$\begin{aligned} E(t) + \int_0^t (\gamma \|\partial_t u(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta \|\partial_t u(\tau)\|_{L^2(\Gamma)}^2) d\tau \\ = E(0) + \int_0^t ((\partial_t u(\tau), f(\tau))_{L^2(\Omega)} + (\partial_t u(\tau), h(\tau))_{L^2(\Gamma)}) d\tau. \end{aligned}$$

Переписывая это соотношение в дифференциальной форме, с помощью (6.11) легко обнаружить, что

$$(6.18) \quad \frac{d}{dt} E(t) + \frac{3}{4} \gamma \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{\alpha^2}{\gamma} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\beta^2}{4\delta} \|u(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(t) = (u(t), \partial_t u(t))_{L^2(\Omega)} + \frac{\gamma}{2} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta}{2} \|u(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Используя некоторые регуляризационные процедуры и результаты из [50], можно показать, что

$$\frac{d}{dt} \Phi(t) \leq \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \nu \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta \|u(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Очевидно также, что

$$-\frac{1}{2\gamma} \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \Phi(t) \leq \frac{1}{2\gamma} \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta}{2} \|u(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Поэтому функция $V(t) = E(t) + \frac{\gamma}{2} \Phi(t)$ обладает свойствами

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t) \leq -\frac{\gamma}{4} \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\gamma\nu}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + \frac{\alpha}{2} (2\alpha\gamma^{-1} + \gamma) \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\beta}{4} (\beta\delta^{-1} + 2\gamma) \|u(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \end{aligned}$$

и

$$\frac{1}{2} E(t) \leq V(t) \leq \frac{3}{4} \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\gamma^2}{2} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta\gamma}{4} \|u(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Отсюда вытекает, что для любого $\omega > 0$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t) + \omega V(t) \leq -\frac{1}{4} (\gamma - 3\omega) \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\nu}{2} (\gamma - \omega) \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + \frac{1}{2} (2\alpha^2\gamma^{-1} + \alpha\gamma + \omega\gamma^2) \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} (\beta^2\delta^{-1} + 2\beta\gamma + \delta\gamma\omega) \|u(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

Используя (6.8) с Γ вместо $\partial\Omega$, а также соотношения (6.12) и (6.13), как и при доказательстве теоремы 6.1, находим, что при $\omega \leq \gamma/3$ имеет место неравенство

$$(6.19) \quad \frac{d}{dt} V(t) + \omega V(t) \leq C \max_j |l_j(u|_\Gamma)|^2 - b(\|u(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2),$$

где

$$b = \frac{\nu}{2}(\gamma - \omega) - \frac{a_1}{2}(2\alpha^2\gamma^{-1} + \alpha\gamma + \omega\gamma^2) - \frac{a_2}{4}[\beta^2\delta^{-1} + 2\beta\gamma + \delta\gamma\omega + 2\nu(\gamma - \omega)](1 + a_1)(1 + \eta)\varepsilon_{\mathcal{L}}^2.$$

Очевидно, что в условиях теоремы 6.2 параметры $0 < \omega \leq \gamma/3$ и $\eta > 0$ можно подобрать так, чтобы $b \geq 0$. Поэтому (6.19) позволяет доказать, что из (6.15) вытекает (6.16). Таким образом, теорема 6.2 доказана.

Отметим, что аналоги теорем 6.1 и 6.2 могут быть установлены и в более общей ситуации. Например, можно считать нелинейные слагаемые зависящими от пространственной переменной x , а вместо лапласиана рассмотреть эллиптический оператор второго порядка общего вида. Кроме того, теореме 6.2 можно придать абстрактную форму, подобную теореме 4.3 и относящуюся к уравнениям второго порядка по времени вида (5.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
- [2] Temam R. Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [3] Ладыженская О. А. О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнения Навье–Стокса и других уравнений с частными производными // УМН 1987. Т. 42. № 6. С. 25–60.
- [4] Чуешов И. Д. Глобальные аттракторы в нелинейных задачах математической физики // УМН. 1993. Т. 48. № 3. С. 135–162.
- [5] Chepyzhov V. V., Vishik M. I. Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension // J. Math. Pures Appl. 1994. V. 73. № 3. P. 279–333.
- [6] Foias C., Prodi G. Sur le comportement global des solutions non stationnaires des équations de Navier–Stokes en dimension deux // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1967. V. 39. P. 1–34.
- [7] Ладыженская О. А. О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье–Стокса // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1972. Т. 27. С. 91–115.
- [8] Foias C., Manley O. P., Temam R., Treve Y. M. Asymptotic analysis of the Navier–Stokes equations // Physica D. 1983. V. 9. P. 157–188.
- [9] Sermange M., Temam R. Some mathematical questions related to MHD equations // Commun. Pure Appl. Math. 1983. V. 36. P. 635–664.
- [10] Foias C., Temam R. Determination of the solutions of the Navier–Stokes equations by a set of nodal values // Math. Comput. 1984. V. 43. P. 117–133.
- [11] Ладыженская О. А. Об оценках фрактальной размерности и числа определяющих мод для инвариантных множеств динамических систем // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1987. Т. 163. С. 105–129.
- [12] Foias C., Titi E. S. Determining nodes, finite difference schemes and inertial manifolds // Nonlinearity. 1991. V. 4. № 1. P. 135–153.
- [13] Jones D. A., Titi E. S. Determination of the solutions of the Navier–Stokes equations by finite volume elements // Physica D. 1992. V. 60. P. 165–174.
- [14] Jones D. A., Titi E. S. Upper bounds on the number of determining modes, nodes and volume elements for the Navier–Stokes equations // Indiana Univ. Math. J. 1993. V. 42. № 3. P. 875–887.
- [15] Kukavica I. On the number of determining nodes for the Ginzburg–Landau equation // Nonlinearity. 1992. V. 5. № 5. P. 997–1006.
- [16] Foias C., Kukavica I. Determining nodes for the Kuramoto–Sivashinsky equation // J. Dyn. Diff. Eq. 1995. V. 7. № 2. P. 365–373.

- [17] Cockburn B., Jones D. A., Titi E. S. Determining degrees of freedom for nonlinear dissipative systems // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. 1995. V. 321. P. 563–568.
- [18] Чуешов И. Д. О функционалах, однозначно определяющих асимптотическое поведение решений системы Кармана // УМН. 1996. Т. 51. № 5. С. 162.
- [19] Bernier-Kazantsev C., Chueshov I. D. The finiteness of determining degrees of freedom for the quasi-geostrophic multi-layer ocean model // Preprint № 3067. Nancy: INRIA-Lorraine, 1996.
- [20] Чуешов И. Д. Замечание о множествах определяющих элементов для систем реакции-диффузии // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 5. С. 774–784.
- [21] Chueshov I. D. On the finiteness of the number of determining elements for von Karman evolution equations // Math. Meth. Appl. Sci. 1997. V. 20. P. 855–865.
- [22] Бабин А. В. Асимптотика при $|x| \rightarrow \infty$ функций, лежащих на аттракторе двумерной системы Навье–Стокса в неограниченной плоской области // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 12. С. 1683–1709.
- [23] Foias C., Sell G. R., Temam R. Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations // J. Diff. Equat. 1988. V. 73. P. 309–353.
- [24] Chow S.-N., Lu K. Invariant manifolds for flows in Banach spaces // J. Diff. Equat. 1988. V. 74. P. 285–317.
- [25] Constantin P., Foias C., Nicolaenko B., Temam R. Integral Manifolds and Inertial Manifolds for Dissipative Partial Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1989.
- [26] Чуешов И. Д. Введение в теорию инерциальных многообразий. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1992.
- [27] Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
- [28] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976.
- [29] Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
- [30] Aubin J.-P. Approximation of Elliptic Boundary-Value Problems. New York: Wiley, 1972.
- [31] Трибелъ Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
- [32] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.
- [33] Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
- [34] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
- [35] Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
- [36] Constantin P., Foias C. Navier–Stokes Equations. Chicago: Univ. of Chicago Press, 1988.
- [37] Hassard B. D., Kazarinoff N. D., Wan Y.-H. Theory and Application of Hopf Bifurcation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981.
- [38] Henry D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1981.
- [39] Smoller J. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [40] Marion M. Inertial manifolds associated to partly dissipative reaction-diffusion systems // J. Math. Anal. Appl. 1989. V. 143. P. 295–326.
- [41] Promislow K. Time analyticity and Gevrey regularity for solutions of a class of dissipative partial differential equations // Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. 1991. V. 16. № 11. P. 959–980.
- [42] Duan J., Titi E., Holmes P. Regularity, approximation and asymptotic dynamics for a generalized Ginzburg–Landau equation // Nonlinearity. 1993. V. 6. № 6. P. 915–933.
- [43] Чуешов И. Д. Конечномерность аттрактора в некоторых задачах нелинейной теории оболочек // Матем. сб. 1987. Т. 133 (175). № 4. С. 419–428.
- [44] Chueshov I. D. On a construction of approximate inertial manifolds for second order in time evolution equations // Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. 1996. V. 26. P. 1007–1021.
- [45] Hale J. K. Theory of Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1977.

- [46] Чуешов И. Д. Об одной системе уравнений с запаздыванием, возникающей в аэроупругости // Теория функций, функц. анализ и их прил. 1990. № 54. С. 123–130.
- [47] Boutet de Monvel L., Chueshov I. D. Non-linear oscillations of a plate in a flow of gas // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 1996. V. 322. № 10. P. 1001–1006.
- [48] Chueshov I. D., Rezounenko A. V. Global attractors for a class of retarded quasilinear partial differential equations // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 1995. V. 321. № 5. P. 607–612.
- [49] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
- [50] Lasiecka I., Tataru D. Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping // Diff. Int. Equat. 1993. V. 6. P. 507–533.

Харьковский университет, Украина

Поступила в редакцию
15.09.1997