Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Одесский, Эллиптические алгебры, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 6, 87–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm573>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 14:45:34

УДК 512.552.8

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ

А. В. Одесский

Обзор посвящен ассоциативным $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -градуированным алгебрам, определяемым n образующими, $\frac{n(n-1)}{2}$ квадратичными соотношениями и удовлетворяющим так называемому условию Пуанкаре–Биркгофа–Витта (ПБВ-алгебрам). Рассматриваются примеры таких алгебр, зависящие от двух непрерывных параметров: эллиптической кривой и точки на ней, и являющиеся плоской деформацией кольца многочленов от n переменных. Описываются различные свойства этих алгебр, а также их связи с интегрируемыми системами, деформационным квантованием, многообразиями модулей и другими направлениями современных исследований.

Библиография: 52 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	88
§ 1. Алгебры с тремя образующими	91
§ 2. Алгебра $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$	96
1. Конструкция	96
2. Основные свойства алгебры $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$	97
3. Бозонизация алгебры $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$	97
4. Представления алгебры $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$	100
5. Симплектические листы	100
6. Свободные модули, образующие и соотношения	101
§ 3. Основные свойства алгебр $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$	102
§ 4. Эллиптическая R -матрица Белавина и алгебра $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$	104
§ 5. Алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ и обменные алгебры	105
1. Гомоморфизмы алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ в динамические обменные алгебры ..	105
2. Гомоморфизм обменной алгебры в алгебру $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$	108
Приложение А. Тэта-функции одной переменной	109
Приложение В. Некоторые тэта-функции нескольких переменных, ассоциированные со степенью эллиптической кривой	111
Приложение С. Сопряженность пространств $\Theta_{n/k}(\Gamma)$ и $\Theta_{n/n-k}(\Gamma)$	115
Приложение D	117
1. Интегрируемые системы, квантовые группы и R -матрицы	117
2. Деформационное квантование	118

3. Многообразия модулей	119
4. Некоммутативная алгебраическая геометрия	120
5. Когомологии алгебр	120
Список литературы	120

Введение

В работе [45], посвященной изучению XYZ -модели и представлениям соответствующей алгебры матриц монодромии, Е. К. Склянин ввел семейство ассоциативных алгебр с 4 образующими и 6 квадратичными соотношениями, которые теперь называются алгебрами Склянина (см. также приложение D.1). Алгебры из этого семейства естественным образом нумеруются двумя непрерывными параметрами: эллиптической кривой и точкой на ней, и представляют собой плоскую деформацию кольца многочленов от 4 переменных в классе $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -градуированных ассоциативных алгебр. С другой стороны, в работе [2] возникло семейство алгебр с 3 образующими (и 3 квадратичными соотношениями), обладающее теми же свойствами (см. также [52]). В дальнейшем выяснилось (см. [10], [17]–[22], [32]–[38]), что такие алгебры существуют для любого числа образующих. Алгебры, о которых идет речь, представляют собой ассоциативные алгебры следующего вида. Пусть V – линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ размерности n . Пусть $L \subset V \otimes V$ – подпространство размерности $\frac{n(n-1)}{2}$. Построим алгебру A с пространством образующих V и пространством определяющих соотношений L , т.е. $A = T^*V/(L)$, где T^*V – тензорная алгебра пространства V , а (L) – двусторонний идеал, порожденный L . Ясно, что алгебра A является $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -градуированной, поскольку идеал (L) однородный. Имеем: $A = \mathbb{C} \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \dots$, где $A_1 = V$, $A_2 = V \otimes V/L$, $A_3 = V \otimes V \otimes V/V \otimes L + L \otimes V$ и т.д.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что алгебра A является ПБВ-алгеброй (или удовлетворяет условию Пуанкаре–Биркгофа–Витта), если $\dim A_\alpha = \frac{n(n+1) \cdots (n+\alpha-1)}{\alpha!}$.

Таким образом, ПБВ-алгебра – это алгебра с n образующими, $\frac{n(n-1)}{2}$ квадратичными соотношениями и имеющая такие же размерности градуированных компонент, как и кольцо многочленов от n переменных.

Такие алгебры возникают в различных областях математики: теория интегрируемых систем [45], [46], [28], [9], многообразия модулей [20], деформационное квантование [12], [26], некоммутативная геометрия [2], [3], [11], [27], [47]–[49], [51], когомологии алгебр [8], [29], [41]–[44], [50], квантовые группы и R -матрицы [45], [46], [25], [16], [14], [23], [31]. См. об этом приложение D.

Каких-то классификационных результатов в теории ПБВ-алгебр (при $n > 3$) не существует, поэтому мы будем заниматься конкретными примерами. Известные нам примеры можно условно разбить на 2 класса: рациональные и эллиптические алгебры. Приведем примеры рациональных алгебр.

1. *Косые многочлены.* Это алгебра с образующими $\{x_i; i = 1, \dots, n\}$ и соотношениями: $x_i x_j = q_{i,j} x_j x_i$, где $i < j$, $q_{i,j} \neq 0$.

Легко проверить, что мономы $\{x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}; \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ составляют базис алгебры косых многочленов, отсюда следует условие ПБВ. Поскольку $q_{i,j}$ – любые числа, не равные 0, мы получили $\frac{n(n-1)}{2}$ -параметрическое семейство алгебр.

2. *Проективизация алгебр Ли.* Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли размерности $n - 1$ с базисом $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$. Построим алгебру с n образующими $\{c, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ и соотношениями: $cx_i = x_i c, x_i x_j - x_j x_i = c[x_i, x_j]$.

Условие ПБВ вытекает из теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта для алгебры $\mathfrak{g}$.

3. *Алгебра Дринфельда.* В [13] была предложена новая реализация квантовой алгебры токов $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ (см. также [25]). Именно, были введены образующие $x_k^\pm, h_k$ ($k \in \mathbb{Z}$), аналогичные обычному базису алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$. При этом элементы $x_k^\pm$ удовлетворяют квадратичным соотношениям:

$$x_{k+1}^+ x_l^+ - q^2 x_l^+ x_{k+1}^+ = q^2 x_k^+ x_{l+1}^+ - x_{l+1}^+ x_k^+. \quad (1)$$

Аналогичным соотношениям удовлетворяют элементы x_k^- . Алгебра $\text{Dr}_n(q) \subset U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$, порожденная $x_1^+, \dots, x_n^+, n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{C}^*$, является ПБВ-алгеброй.

В эллиптическом случае алгебра зависит от двух непрерывных параметров: эллиптической кривой $\mathcal{E}$ и точки $\eta \in \mathcal{E}$. Именно такие алгебры и являются предметом обзора. Их структурные константы являются эллиптическими функциями от η с модулярным параметром τ . Наш основной пример: алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$. Здесь $n \geq 3$ – число образующих, k – натуральное число, взаимно простое с n , причем $1 \leq k < n$. Определим алгебру $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ образующими $\{x_i; i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ и соотношениями:

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \frac{\theta_{j-i+r(k-1)}(0)}{\theta_{kr}(\eta)\theta_{j-i-r}(-\eta)} x_{j-r} x_{i+r} = 0. \quad (2)$$

Структура этих алгебр зависит от разложения числа n/k в цепную дробь, поэтому вначале изучается простейший случай $k = 1$, а затем мы переходим к общему случаю. Заметим, что принадлежность алгебр $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ к классу ПБВ-алгебр доказана лишь при общих параметрах $\mathcal{E}$ и η (см. § 2.6, § 3). Мы предполагаем, однако, что это так при всех $\mathcal{E}$ и η . Возможный путь доказательства этой гипотезы: построение аналога функциональной реализации (см. § 2.1) при произвольном k , используя конструкции из § 5.

Алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ являются, как нам кажется, типичным примером эллиптических алгебр, однако далеко не исчерпывают всего их запаса. Простейший пример алгебры, не принадлежащей к этому классу (и даже не являющейся деформацией кольца многочленов), строится так. Пусть группа $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ с образующими g_1, g_2 действует автоморфизмами на алгебре $Q_4(\mathcal{E}, \eta)$ следующим образом:

$$g_1(x_i) = x_{i+2}, \quad g_2(x_i) = (-1)^i x_i.$$

Эта же группа действует на алгебре (2×2) -матриц:

$$g_1(\gamma) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, \quad g_2(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Отсюда получаем действие на тензорном произведении ассоциативных алгебр $Q_4(\mathcal{E}, \eta) \otimes \text{Mat}_2$. Пусть $\tilde{Q}_4(\mathcal{E}, \eta) \subset Q_4(\mathcal{E}, \eta) \otimes \text{Mat}_2$ состоит из элементов, инвариантных относительно действия группы. Легко проверить, что $\tilde{Q}_4(\mathcal{E}, \eta)$ имеет те

же размерности градуированных компонент, что и $Q_4(\mathcal{E}, \eta)$, и поэтому является ПБВ-алгеброй. Другой пример ПБВ-алгебры (с 3 образующими) см. в конце § 1.

Опишем теперь одну из основных конструкций ПБВ-алгебр. Пусть $\lambda(x, y)$ – мероморфная функция двух переменных. Построим ассоциативную градуированную алгебру $\mathcal{F}_\lambda$ следующим образом. Как линейное пространство $\mathcal{F}_\lambda = \mathbb{C} \oplus F_1 \oplus F_2 \oplus \dots$, где $F_1 = \{f(u)\}$ – пространство мероморфных функций одной переменной, $F_\alpha = \{f(u_1, \dots, u_\alpha)\}$ – пространство симметричных мероморфных функций α переменных. Пространство F_α является естественным расширением симметрической степени $S^\alpha F_1$. Умножение в алгебре $\mathcal{F}_\lambda$ задается следующим образом: для $f \in F_\alpha$, $g \in F_\beta$ произведение $f * g \in F_{\alpha+\beta}$ имеет вид:

$$f * g(u_1, \dots, u_{\alpha+\beta}) = \frac{1}{\alpha! \beta!} \sum_{\sigma \in S_{\alpha+\beta}} f(u_{\sigma_1}, \dots, u_{\sigma_\alpha}) g(u_{\sigma_{\alpha+1}}, \dots, u_{\sigma_{\alpha+\beta}}) \times \prod_{\substack{1 \leq i \leq \alpha \\ \alpha+1 \leq j \leq \alpha+\beta}} \lambda(u_{\sigma_i}, u_{\sigma_j}). \quad (3)$$

В частности, для $f, g \in F_1$ имеем:

$$f * g(u_1, u_2) = f(u_1)g(u_2)\lambda(u_1, u_2) + f(u_2)g(u_1)\lambda(u_2, u_1). \quad (4)$$

Легко проверить, что умножение $*$ ассоциативно при любом $\lambda(x, y)$.

Пусть теперь $\lambda(x, y) = \frac{x-y}{x-y}$, где $q \in \mathbb{C}^*$. Пусть $F_1^{(n)} = \{1, u, \dots, u^{n-1}\} \subset F_1$ – пространство многочленов степени меньше n . Пусть $F_\alpha^{(n)} = S^\alpha F_1^{(n)} \subset F_\alpha$ – пространство симметричных полиномов α переменных степени меньше n по каждой переменной. Легко проверить, что $F_\alpha^{(n)} * F_\beta^{(n)} \subseteq F_{\alpha+\beta}^{(n)}$. Поэтому $\mathcal{F}_\lambda^{(n)} = \bigoplus_\alpha F_\alpha^{(n)}$ есть подалгебра в $\mathcal{F}_\lambda$. Кроме того, при $q = 1$ алгебра $\mathcal{F}_\lambda^{(n)}$ есть кольцо полиномов $S^* F_1^{(n)}$, поскольку в этом случае $\lambda(x, y) = 1$. Поэтому при общем q алгебра $\mathcal{F}_\lambda^{(n)}$ есть ПБВ-алгебра. Эта алгебра изоморфна алгебре Дринфельда $\text{Dr}_n(q)$, причем изоморфизм имеет вид $u^k \mapsto x_{k+1}^+$. Алгебра $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$ получается аналогично, только полиномы заменяются на тэта-функции (см. § 2.1). Похожая конструкция [38], [22] позволяет построить квантовые многообразия модулей $\mathcal{M}(\mathcal{E}, B)$ [4] (см. приложение D.3) для любой борелевской подгруппы B . Построение алгебр $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ при $k > 1$ и вообще квантовых многообразий модулей $\mathcal{M}(\mathcal{E}, P)$ для параболической подгруппы P более сложно и использует обменные алгебры (см. § 5 и [21]) или эллиптические R -матрицы (см. § 4).

Опишем теперь содержание обзора. В § 1 описываются простейшие эллиптические ПБВ-алгебры: алгебры с тремя образующими. Эти алгебры изучались во многих работах, см., например, [2], [3]. Этот параграф носит иллюстративный характер: мы хотим объяснить некоторые методы изучения эллиптических алгебр на простейшем примере. Основное внимание в обзоре уделено алгебрам $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$. Им посвящен § 2. Дана явная конструкция этих алгебр, построены естественные семейства представлений (подробнее эти представления изучаются в [19]), описаны симплектические листы соответствующей пуассоновой алгебры (напомним, что $Q_n(\mathcal{E}, 0)$ есть кольцо многочленов n переменных).

Алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ при $k > 1$ устроены гораздо сложнее и подробное описание их свойств выходит за рамки обзора (см. [35], [20]). Их основные свойства описаны в §3. В §4 описана связь этих алгебр с эллиптическими R -матрицами Белавина. В §5 установлена связь алгебр $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ с так называемыми обменными алгебрами (см. (24), (25), а также [36], [24], [33]). В приложениях А, В, С приведены нужные нам обозначения и свойства θ -функций одной и нескольких переменных. В приложении D дан краткий обзор связей эллиптических алгебр с другими областями математики. Мы постарались сделать эту часть независимой от основного текста.

В заключение несколько слов о том, что не вошло в обзор, но непосредственно связано с его темой. В [37] изучаются алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ в случае, когда $\eta \in \mathcal{E}$ – точка конечного порядка. В этом случае свойства алгебр $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ похожи на свойства квантовых групп в случае, когда q – корень из 1: они конечномерны над своим центром. В [32] изучаются рациональные вырождения алгебр $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$, когда эллиптическая кривая $\mathcal{E}$ вырождается в объединение нескольких экземпляров $\mathbb{CP}^1$ или в $\mathbb{CP}^1$ с двойной точкой.

Алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ получаются при квантовании тех компонент многообразий модулей $\mathcal{M}(P, \mathcal{E})$ (см. приложение D.3), которые изоморфны $\mathbb{CP}^{n-1}$. Квантование других компонент приводит к эллиптическим алгебрам более общего вида. Эти алгебры построены в [38], [22] для случая, когда P – борелевская подгруппа произвольной группы G . В [21] изучается случай, когда $P \subset GL_m$ – произвольная параболическая подгруппа GL_m .

Симплектические листы пуассонова многообразия, отвечающего семейству алгебр $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ в окрестности $\eta = 0$ и при фиксированной эллиптической кривой $\mathcal{E}$, изучаются в [20].

Соответствующие пуассоновы алгебры принадлежат к классу алгебр с регулярной структурой симплектических листов, изученных в [39].

§ 1. Алгебры с тремя образующими

В этом параграфе мы рассмотрим простейший пример эллиптических ПБВ-алгебр: алгебры с тремя образующими. Посмотрим сначала, какие бывают квадратичные пуассоновы структуры на $\mathbb{C}^3$. Пусть x_0, x_1, x_2 – координаты на $\mathbb{C}^3$, и пусть имеется пуассонова структура, квадратичная в этих координатах. Построим многочлен $C = x_0\{x_1, x_2\} + x_1\{x_2, x_0\} + x_2\{x_0, x_1\}$. Это однородный многочлен степени 3, поскольку пуассонова структура квадратична. Ясно, что его вид не меняется при линейных заменах координат (с точностью до пропорциональности). Ограничимся невырожденным случаем, когда уравнение $C = 0$ определяет неособое проективное многообразие. Ясно, что это эллиптическая кривая. Кроме того, линейной заменой многочлен C можно привести к виду: $C = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 3kx_0x_1x_2$, где $k \in \mathbb{C}$. Тогда, как легко проверить используя определение C и тождество Якоби, пуассонова структура с точностью до пропорциональности должна иметь вид:

$$\{x_0x_1\} = x_2^2 + kx_0x_1, \quad \{x_1x_2\} = x_0^2 + kx_1x_2, \quad \{x_2x_0\} = x_1^2 + kx_2x_0. \quad (5)$$

При этом $\{x_i, C\} = 0$ и всякий центральный элемент есть многочлен от C . Напомним, что всякое пуассоново многообразие разбивается на так называемые симплектические листы, представляющие собой пуассоновы подмногообразия, ограничение на которые

пуассоновой структуры уже невырождено. Симплектические листы в нашем случае имеют вид:

- 1) начало координат $x_0 = x_1 = x_2 = 0$;
- 2) однородное многообразие $C = 0$ без начала координат;
- 3) многообразия $C = \lambda$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$.

Ясно, что наша пуассонова структура допускает следующие автоморфизмы: $x_i \mapsto \varepsilon^i x_i$, $x_i \mapsto x_{i+1}$, где $\varepsilon^3 = 1$, $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Естественно предположить, что квантованием пуассоновой структуры (см. приложение D.2) является семейство ассоциативных алгебр с образующими x_0, x_1, x_2 и тремя квадратичными соотношениями, допускающих те же автоморфизмы. Но всякое общее трехмерное пространство квадратичных соотношений, инвариантное относительно этих автоморфизмов, имеет вид:

$$\begin{aligned} x_0 x_1 - q x_1 x_0 &= p x_2^2, \\ x_1 x_2 - q x_2 x_1 &= p x_0^2, \\ x_2 x_0 - q x_0 x_2 &= p x_1^2, \end{aligned} \tag{6}$$

где $p, q \in \mathbb{C}$ – комплексные числа. Обозначим через $A_{p,q}$ алгебру с образующими x_0, x_1, x_2 и определяющими соотношениями (6). Ясно, что алгебра $A_{p,q}$ является $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -градуированной, т.е. $A_{p,q} = \mathbb{C} \oplus F_1 \oplus F_2 \oplus \dots$, причем $F_\alpha F_\beta \subseteq F_{\alpha+\beta}$. Здесь F_α – линейное пространство, натянутое на мономы (некоммутативные) от x_0, x_1, x_2 степени α . Естественно ожидать, что F_α имеет ту же размерность, что и многочлены от 3 переменных степени α , т.е. $\dim F_\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2}$.

Кроме того, пуассонова алгебра (5) имеет центральную функцию: $C = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 3kx_0x_1x_2$ и центр порожден элементом C . Поэтому естественно ожидать, что алгебра $A_{p,q}$ при общих p и q имеет центральный элемент вида $C_{p,q} = \varphi x_0^3 + \psi x_1^3 + \mu x_2^3 + \lambda x_0x_1x_2$, где $\varphi, \psi, \mu, \lambda$ – функции от p и q (в существовании $C_{p,q}$ можно убедиться прямым вычислением), причем центр порожден $C_{p,q}$.

Обычная техника доказательства таких утверждений (например, теорема Пуанкаре–Биркгофа–Витта для алгебр Ли) использует фильтрацию на алгебре и изучение градуированной присоединенной алгебры. В нашем случае алгебра уже градуирована и нельзя ввести обычную индукцию по членам меньшей фильтрации, поэтому мы используем другую технику. Именно, мы изучим некоторый класс модулей над алгеброй $A_{p,q}$ и попытаемся из информации о модулях получить результаты об алгебре $A_{p,q}$. Для наших целей удобен следующий класс модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Модуль над $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -градуированной алгеброй A называется линейным, если он $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -градуирован как A -модуль, порожден пространством степени 0 и размерности всех компонент равны 1.

Изучим линейные модули над алгеброй $A_{p,q}$. По определению это модуль M с базисом $\{v_\alpha, \alpha \geq 0\}$ и действием образующих:

$$x_0 v_\alpha = x_\alpha v_{\alpha+1}, \quad x_1 v_\alpha = y_\alpha v_{\alpha+1}, \quad x_2 v_\alpha = z_\alpha v_{\alpha+1},$$

где $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$ – последовательности, причем $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$ не равны нулю одновременно при всяком α (мы хотим, чтобы M был порожден v_0). Замены базиса вида $v_\alpha \rightarrow \lambda_\alpha v_\alpha$

умножают тройку $(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \in \mathbb{C}^3$ на $\frac{\lambda_{\alpha+1}}{\lambda_\alpha}$, т.е. модуль M с точностью до изоморфизма градуированных модулей определен последовательностью точек $(x_\alpha : y_\alpha : z_\alpha) \in \mathbb{CP}^2$. Ясно, что последовательность точек $(x_\alpha : y_\alpha : z_\alpha) \in \mathbb{CP}^2$ определяет модуль над алгеброй $A_{p,q}$ тогда и только тогда, когда выполняются соотношения (6) на операторы в M , отвечающие этой последовательности. Это эквивалентно следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} x_{\alpha+1}y_\alpha - qy_{\alpha+1}x_\alpha &= pz_{\alpha+1}z_\alpha, \\ y_{\alpha+1}z_\alpha - qz_{\alpha+1}y_\alpha &= px_{\alpha+1}x_\alpha, \\ z_{\alpha+1}x_\alpha - qx_{\alpha+1}z_\alpha &= py_{\alpha+1}y_\alpha. \end{aligned} \quad (7)$$

Соотношения (7) являются системой линейных уравнений на $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$, имеющей ненулевое решение (по предположению о модуле M), поэтому определитель $\begin{vmatrix} -qy_{\alpha+1} & x_{\alpha+1} & -pz_{\alpha+1} \\ -px_{\alpha+1} & -qz_{\alpha+1} & y_{\alpha+1} \\ z_{\alpha+1} & -py_{\alpha+1} & -qx_{\alpha+1} \end{vmatrix}$ должен быть равен 0. Аналогично, соотношения (7) есть система линейных уравнений на $x_{\alpha+1}, y_{\alpha+1}, z_{\alpha+1}$, имеющая ненулевое решение, поэтому $\begin{vmatrix} y_\alpha & -qx_\alpha & -pz_\alpha \\ -px_\alpha & z_\alpha & -qy_\alpha \\ -qz_\alpha & -py_\alpha & x_\alpha \end{vmatrix} = 0$. Легко видеть, что эти определители дают один и тот же кубический многочлен от 3 переменных. Получаем, что при всех $\alpha \geq 0$ точка с координатами $(x_\alpha : y_\alpha : z_\alpha)$ лежит на кубике

$$x_\alpha^3 + y_\alpha^3 + z_\alpha^3 + \frac{p^3 + q^3 - 1}{pq} x_\alpha y_\alpha z_\alpha = 0. \quad (8)$$

Кроме того, если точка $(x_\alpha : y_\alpha : z_\alpha)$ лежит на этой кубике, то, решая систему линейных уравнений (7) относительно $x_{\alpha+1}, y_{\alpha+1}, z_{\alpha+1}$, мы получим новую точку $(x_{\alpha+1} : y_{\alpha+1} : z_{\alpha+1})$ на той же кубике (поскольку определитель системы (7) должен быть равен 0). Таким образом, система (7) определяет автоморфизм проективного многообразия (8). Зафиксируем $k = \frac{p^3 + q^3 - 1}{pq}$, тогда, меняя q , мы получим однопараметрическое семейство автоморфизмов проективной кривой в $\mathbb{CP}^2$, заданной уравнением $x^3 + y^3 + z^3 + kxyz = 0$. Известно, что при общем k это уравнение определяет эллиптическую кривую. Пусть это кривая $\mathcal{E} = \mathbb{C}/\Gamma$, где Γ – целочисленная решетка, порожденная 1 и τ , где $\text{Im } \tau > 0$. Параметр k есть некоторая функция $k(\tau)$. Если k фиксировано, то в пределе $q \rightarrow 1$ имеем $p \rightarrow 0$ и автоморфизм, определяемый (7), стремится к тождественному. Таким образом, наше семейство автоморфизмов эллиптической кривой $\mathcal{E}$, заданной уравнением (8), является деформацией тождественного. Значит, любой автоморфизм из этого семейства является сдвигом и имеет вид $u \rightarrow u + \eta$, где $u, \eta \in \mathcal{E} = \mathbb{C}/\Gamma$. Пусть $u_\alpha \in \mathcal{E} = \mathbb{C}/\Gamma$ – точка с координатами $(x_\alpha : y_\alpha : z_\alpha)$. Мы получили, что $u_{\alpha+1} = u_\alpha + \eta$, где η зависит только от алгебры, т.е. от p и q . Отсюда: $u_\alpha = u + \alpha\eta$, где $u \in \mathcal{E}$ – параметр модуля M . Мы получили следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Линейные модули над алгеброй $A_{p,q}$ нумеруются точкой эллиптической кривой $\mathcal{E} \subset \mathbb{CP}^2$, заданной уравнением $x^3 + y^3 + z^3 + k_{p,q}xyz = 0$, где $k_{p,q} = \frac{p^3 + q^3 - 1}{pq}$. Модуль M_u , отвечающий точке $u \in \mathcal{E}$, задан формулами*

$$x_0v_\alpha = x_\alpha v_{\alpha+1}, \quad x_1v_\alpha = y_\alpha v_{\alpha+1}, \quad x_2v_\alpha = z_\alpha v_{\alpha+1},$$

где $(x_\alpha : y_\alpha : z_\alpha)$ – координаты точки $u + \alpha\eta \in \mathcal{E}$. Здесь сдвиг η строится по p и q .

Заметим, что, изучая линейные модули, мы по алгебре $A_{p,q}$ построили эллиптическую кривую $\mathcal{E} \subset \mathbb{CP}^2$ и точку $\eta \in \mathcal{E}$. В дальнейшем мы увидим, что и, наоборот, алгебра $A_{p,q}$ восстанавливается по $\mathcal{E}$ и η . Таким образом, два непрерывных параметра $\mathcal{E}$ (т.е. τ) и η дают естественную параметризацию алгебр $A_{p,q}$. Поэтому мы изменим обозначение, обозначив алгебру $A_{p,q}$ через $Q_3(\mathcal{E}, \eta)$.

Воспользуемся теперь униформизацией эллиптической кривой $\mathcal{E} \subset \mathbb{CP}^2$, заданной уравнением (8), тэта-функциями 3-го порядка (см. приложение А). Точка $u \in \mathcal{E} = \mathbb{C}/\Gamma$ имеет координаты $(\theta_0(u) : \theta_1(u) : \theta_2(u)) \in \mathbb{CP}^2$. В этих обозначениях модуль M_u задается формулами

$$x_0 v_\alpha = \theta_0(u + \alpha\eta) v_{\alpha+1}, \quad x_1 v_\alpha = \theta_1(u + \alpha\eta) v_{\alpha+1}, \quad x_2 v_\alpha = \theta_2(u + \alpha\eta) v_{\alpha+1}.$$

Пусть e – линейный оператор в пространстве с базисом $\{v_\alpha, \alpha \geq 0\}$, заданный формулой $ev_\alpha = v_{\alpha+1}$. Пусть u – диагональный оператор в том же пространстве такой, что $eu = (u - \eta)e$. Имеем $uv_\alpha = (u_0 + \alpha\eta)v_\alpha$ для некоторого $u_0 \in \mathbb{C}$. Ясно что в представлении M_u образующие алгебры $Q_3(\mathcal{E}, \eta)$ имеют вид:

$$x_0 = \theta_0(u)e, \quad x_1 = \theta_1(u)e, \quad x_2 = \theta_2(u)e.$$

Мы получили следующую переформулировку описания линейных модулей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -градуированная алгебра $B(\eta) = \mathbb{C} \oplus B_1 \oplus B_2 \oplus \dots$, где $B_\alpha = \{f(u)e^\alpha\}$, f – все голоморфные функции, а умножение задается формулой $f(u)e^\alpha \cdot g(u)e^\beta = f(u)g(u - \alpha\eta)e^{\alpha+\beta}$. Тогда существует гомоморфизм алгебр $\varphi: Q_3(\mathcal{E}, \eta) \rightarrow B(\eta)$ такой, что $x_0 \rightarrow \theta_0(u)e$, $x_1 \rightarrow \theta_1(u)e$, $x_2 \rightarrow \theta_2(u)e$.

Предложение 2 позволяет получить оценку снизу для размерности $\dim F_\alpha$ градуированных компонент алгебры $Q_3(\mathcal{E}, \eta)$. В самом деле, гомоморфизм φ сохраняет градуировку, т.е. $\varphi(F_\alpha) \subset B_\alpha$. Имеем:

$$\varphi(x_{i_1} \cdots x_{i_\alpha}) = \theta_{i_1}(u)e \cdots \theta_{i_\alpha}(u)e = \theta_{i_1}(u)\theta_{i_2}(u - \eta) \cdots \theta_{i_\alpha}(u - (\alpha - 1)\eta)e^\alpha.$$

Таким образом, $\varphi(F_\alpha)$ есть линейное пространство голоморфных функций, натянутое на функции $\{\theta_{i_1}(u), \dots, \theta_{i_\alpha}(u - (\alpha - 1)\eta)\}; i_1, \dots, i_\alpha = 0, 1, 2$. Ясно, что все эти функции есть тэта-функции порядка 3α и принадлежат пространству $\Theta_{3\alpha, \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}3\eta}(\Gamma)$. Легко доказать, что образ $\varphi(F_\alpha)$ совпадает со всем пространством $\Theta_{3\alpha, \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}3\eta}(\Gamma)$, откуда: $\dim \varphi(F_\alpha) = 3\alpha$. Мы получили следующую оценку: $\dim F_\alpha \geq 3\alpha$. С другой стороны, мы знаем, что $\dim F_\alpha \leq \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2}$, поскольку соотношения в $Q_3(\mathcal{E}, \eta)$ есть деформация соотношений в кольце многочленов от 3 переменных. Мы ожидаем, что при общих τ и η имеет место равенство $\dim F_\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2}$. Сравним эти числа:

α	1	2	3	4
$\dim F_\alpha$ (гип.)	3	6	10	15
$\dim \varphi(F_\alpha)$	3	6	9	12

Мы видим, что первое расхождение имеется при $\alpha = 3$, вероятно φ имеет одномерное ядро на пространстве F_3 . Можно показать, что действительно имеется кубический элемент $C \in Q_3(\mathcal{E}, \eta)$ такой, что $C \neq 0$, но $\varphi(C) = 0$. Элемент C оказывается центральным, т.е. $x_\alpha C = Cx_\alpha$ при $\alpha = 0, 1, 2$. В пределе $\eta \rightarrow 0$ (при фиксированном τ) имеем $C \rightarrow x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + kx_0x_1x_2$, поскольку $\theta_i(u)$ униформизируют эллиптическую кривую, т.е. $\theta_0^3 + \theta_1^3 + \theta_2^3 + k\theta_0\theta_1\theta_2 = 0$. Далее, если C – центральный и не является делителем 0 (последнее очевидно при общих τ и η), то всякий элемент $\ker \varphi$ должен делиться на C по соображениям размерности. В самом деле, градуированное линейное пространство $\bigoplus_{\alpha \geq 0} F_\alpha$ оказывается не меньше, чем $(\bigoplus_{\alpha \geq 0} \Theta_{3\alpha}) \otimes \mathbb{C}[C]$, где $\deg C = 3$. Легко проверить, что у этого тензорного произведения градуированных линейных пространств компонента степени α имеет размерность $\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2}$. Но мы знаем, что $\dim F_\alpha \leq \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2}$, отсюда получаем равенство: $\dim F_\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2}$. Мы получили следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Алгебра $Q_3(\mathcal{E}, \eta)$ при общих τ и η имеет кубический центральный элемент C . Факторалгебра $Q_3(\mathcal{E}, \eta)/(C)$ изоморфна $\bigoplus \Theta_{3\alpha, \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}3\eta}(\Gamma)$, где произведение элементов $f \in \Theta_{3\alpha, \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}3\eta}(\Gamma)$ и $g \in \Theta_{3\beta, \frac{\beta(\beta-1)}{2}3\eta}(\Gamma)$ дается формулой $f * g(u) = f(u)g(u - 3\alpha\eta)$.

Из нашего описания $Q_3(\mathcal{E}, \eta)/(C)$ видно, что при общем η эта алгебра не имеет центра. Поэтому центр алгебры $Q_3(\mathcal{E}, \eta)$ порожден элементом C .

Найдем теперь соотношения в алгебре $Q_3(\mathcal{E}, \eta)$, т.е. выразим p и q через τ и η . Имеем: $x_i x_{i+1} - q x_{i+1} x_i - p x_{i+2}^2 = 0$ (это соотношения (6)). Применяя гомоморфизм φ , получим:

$$\theta_i(u)\theta_{i+1}(u - \eta) - q\theta_{i+1}(u)\theta_i(u - \eta) - p\theta_{i+2}(u)\theta_{i+2}(u - \eta) = 0.$$

Отсюда (см. (28) из приложения А) получаем: $q = -\frac{\theta_1(\eta)}{\theta_2(\eta)}$, $p = -\frac{\theta_0(\eta)}{\theta_2(\eta)}$.

Аналогичное изучение алгебры Склянина с 4 образующими (см. приложение D.1) дает следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для общей алгебры Склянина S с 4 образующими и соотношениями (39) существуют эллиптическая кривая $\mathcal{E} = \mathbb{C}/\Gamma$, определенная двумя квадратами в $\mathbb{CP}^3$, и точка $\eta \in \mathcal{E}$ такие, что:

- 1) существует гомоморфизм градуированных алгебр $\varphi: S \rightarrow B(\eta)$;
- 2) образ этого гомоморфизма в B_α есть $\Theta_{4\alpha, \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}4\eta + \frac{\alpha}{2}}(\Gamma)$;
- 3) ядро этого гомоморфизма порождено 2 квадратичными элементами C_1 и C_2 .

Таким образом, $S/(C_1, C_2) = \bigoplus_{\alpha \geq 0} \Theta_{4\alpha, \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}4\eta + \frac{\alpha}{2}}(\Gamma)$.

Алгебра Склянина S восстанавливается по $\mathcal{E}$ и η . Обозначим ее $Q_4(\mathcal{E}, \eta)$.

Возникает естественный вопрос: существует ли аналогичная алгебра $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$ при любом n ?

Для ответа на этот вопрос недостаточно информации о линейных модулях, поскольку они слишком малы для восстановления алгебры $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$ при любом n . В самом деле, алгебра $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$ должна иметь функциональную размерность n , а линейные

модули имеют функциональную размерность 1. Поэтому с их помощью можно восстановить лишь факторалгебру алгебры $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$. Для преодоления этих трудностей естественно изучить более общие модули. Именно, будем изучать модули под алгеброй $Q_3(\mathcal{E}, \eta)$ с базисом $\{v_{i,j}; i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ и такие, что образующие алгебры $Q_3(\mathcal{E}, \eta)$ переводят $v_{i,j}$ в линейную комбинацию $v_{i+1,j}$ и $v_{i,j+1}$. Вычисления показывают, что всякий такой модуль имеет вид:

$$x_i v_{\alpha,\beta} = \frac{\theta_i(u_1 + (\alpha - 2\beta)\eta)}{\theta(u_1 - u_2 + 3(\alpha - \beta)\eta)} v_{\alpha+1,\beta} + \frac{\theta_i(u_2 + (\beta - 2\alpha)\eta)}{\theta(u_2 - u_1 + 3(\beta - \alpha)\eta)} v_{\alpha,\beta+1},$$

где $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $u_1, u_2 \in \mathbb{C}$. Таким образом, модули такого вида нумеруются парой точек $u_1, u_2 \in \mathcal{E}$. Если мы теперь предположим, что алгебра $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$ должна иметь аналогичные модули (см. (15)), это однозначно определяет алгебру $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Можно поставить следующую более общую проблему. Пусть $M \subset \mathbb{CP}^{n-1}$ – проективное многообразие, T – автоморфизм M . Для точки $u \in M$ обозначим $z_i(u)$ (где $i = 0, \dots, n-1$) ее однородные координаты. Существует ли ПБВ-алгебра с n образующими $\{x_i, i = 0, \dots, n-1\}$ и имеющая линейный модуль L_u для каждой точки $u \in M$, заданный формулой $x_i v_\alpha = z_i(T^\alpha u) v_{\alpha+1}$. Здесь $T^\alpha u = T(T(\dots T(u) \dots))$. Алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ являются решением этой задачи для некоторых M и T , именно $M = \mathcal{E}^p$ – степень кривой $\mathcal{E}$, а T – сдвиг (см. §5, предложение 12). Здесь p – длина разложения в цепную дробь $n/k = n_1 - \frac{1}{n_2 - \dots - \frac{1}{n_p}}$.

2. Пусть¹ A_3 – алгебра с образующими x, y, z и соотношениями: $\varepsilon z x + \varepsilon^5 y^2 + x z = 0$, $\varepsilon^2 z^2 + y x + \varepsilon^4 x y = 0$, $z y + \varepsilon^7 y z + \varepsilon^8 x^2 = 0$, где $\varepsilon^9 = 1$. Эта ПБВ-алгебра отвечает случаю, когда $M \subset \mathbb{CP}^2$ – эллиптическая кривая, заданная уравнением $x^3 + y^3 + z^3 = 0$, T – автоморфизм, отвечающий комплексному умножению на M . Алгебра A_3 не является квантованием какой-либо пуассоновой структуры на $\mathbb{C}^3$.

§2. Алгебра $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$

1. Конструкция. Для каждого $n \in \mathbb{N}$, эллиптической кривой $\mathcal{E} = \mathbb{C}/\Gamma$ и точки $\eta \in \mathcal{E}$ мы построим градуированную ассоциативную алгебру $Q_n(\mathcal{E}, \eta) = \mathbb{C} \oplus F_1 \oplus F_2 \oplus \dots$, где $F_1 = \Theta_{n,c}(\Gamma)$, $F_\alpha = S^\alpha \Theta_{n,c+(\alpha-1)n}(\Gamma)$. По построению $\dim F_\alpha = \frac{n(n+1) \cdots (n+\alpha-1)}{\alpha!}$. Ясно, что пространство F_α реализуется как пространство голоморфных симметричных функций α аргументов $\{f(z_1, \dots, z_\alpha)\}$ с условиями

$$\begin{aligned} f(z_1 + 1, z_2, \dots, z_\alpha) &= f(z_1, \dots, z_\alpha), \\ f(z_1 + \tau, z_2, \dots, z_\alpha) &= e^{-2\pi i(nz_1 - c - (\alpha-1)n)} f(z_1, \dots, z_\alpha). \end{aligned} \quad (9)$$

Для $f \in F_\alpha$, $g \in F_\beta$ определим симметричную функцию $f * g$ от $\alpha + \beta$ аргументов формулой

$$\begin{aligned} f * g(z_1, \dots, z_{\alpha+\beta}) &= \frac{1}{\alpha! \beta!} \sum_{\sigma \in S_{\alpha+\beta}} f(z_{\sigma_1}, \dots, z_{\sigma_\alpha}) g(z_{\sigma_{\alpha+1}} - 2\alpha\eta, \dots, z_{\sigma_{\alpha+\beta}} - 2\alpha\eta) \\ &\quad \times \prod_{\substack{1 \leq i \leq \alpha \\ \alpha+1 \leq j \leq \alpha+\beta}} \frac{\theta(z_{\sigma_i} - z_{\sigma_j} - n\eta)}{\theta(z_{\sigma_i} - z_{\sigma_j})}. \end{aligned}$$

¹Этот пример автору сообщил Олег Огиевский [1], [15], [40].

В частности, для $f, g \in F_1$ имеем:

$$f * g(z_1, z_2) = f(z_1)g(z_2 - 2\eta) \frac{\theta(z_1 - z_2 - n\eta)}{\theta(z_1 - z_2)} + f(z_2)g(z_1 - 2\eta) \frac{\theta(z_2 - z_1 - n\eta)}{\theta(z_2 - z_1)}.$$

Здесь $\theta(z)$ – тэта-функция порядка 1 (см. приложение А).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если $f \in F_\alpha$, $g \in F_\beta$, то $f * g \in F_{\alpha+\beta}$. Операция $*$ определяет на пространстве $\bigoplus_{\alpha \geq 0} F_\alpha$ ассоциативное умножение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что $f * g \in F_{\alpha+\beta}$. Из условий (9) на f и g , а также на $\theta(z)$ (см. приложение А) сразу следует, что каждое слагаемое в формуле для $f * g$ удовлетворяет условию (9) на $F_{\alpha+\beta}$. Отсюда следует, что $f * g$ есть мероморфная симметричная функция, удовлетворяющая (9). Эта функция может иметь полюс не выше первого порядка на диагоналях $z_i - z_j = 0$, а также при $z_i - z_j \in \Gamma$, поскольку $\theta(z)$ имеет нули при $z \in \Gamma$. Но симметричная функция может иметь на диагонали только полюс четного порядка. Отсюда следует голоморфность функции $f * g$ при $z_i = z_j$, а из (9) вытекает голоморфность и при $z_i - z_j \in \Gamma$.

Ассоциативность умножения $*$ проверяется непосредственно.

2. Основные свойства алгебры $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$. По построению алгебра $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$ имеет такие же размерности градуированных компонент, как кольцо многочленов от n переменных. При $\eta = 0$ формула для $f * g$ принимает вид:

$$f * g(z_1, \dots, z_{\alpha+\beta}) = \frac{1}{\alpha! \beta!} \sum_{\sigma \in S_{\alpha+\beta}} f(z_{\sigma_1}, \dots, z_{\sigma_\alpha}) g(z_{\sigma_{\alpha+1}}, \dots, z_{\sigma_{\alpha+\beta}}).$$

Это формула для обычного произведения в алгебре $S^* \Theta_{n,c}(\Gamma)$, т.е. в кольце многочленов от n переменных. Поэтому семейство алгебр $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$ при фиксированной эллиптической кривой $\mathcal{E}$ (т.е. фиксированном модулярном параметре τ) представляет собой деформацию кольца многочленов. В частности (см. приложение D.2), имеется пуассонова алгебра, которую мы обозначим через $q_n(\mathcal{E})$. Формулу для скобки Пуассона на кольце многочленов легко получить из формулы для $f * g$, разлагая разность $f * g - g * f$ в ряд Тейлора по η . Из соображений полунепрерывности вытекает, что при общем η алгебра $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$ определяется n образующими и $\frac{n(n-1)}{2}$ квадратичными соотношениями. Можно доказать (см. §2.6), что это так, если η не есть точка конечного порядка на $\mathcal{E}$, т.е. $N\eta \notin \Gamma$ при всех $N \in \mathbb{N}$.

На пространстве $\Theta_{n,c}(\Gamma)$ образующих алгебры $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$ действует конечная группа $\tilde{\Gamma}_n$ – центральное расширение группы $\Gamma/n\Gamma$ точек n -го порядка кривой $\mathcal{E}$ (см. приложение А). Из формулы для произведения $*$ сразу следует, что соответствующие преобразования пространств $F_\alpha = S^\alpha \Theta_{n,c}(\Gamma)$ являются автоморфизмами алгебры $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$.

3. Бозонизация алгебры $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$. Основной способ получения представлений алгебр $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$ состоит в конструкции гомоморфизмов этой алгебры в другие алгебры с простым устройством (близкие к алгебрам Вейля), имеющие естественный набор представлений. Эти гомоморфизмы называются бозонизацией, по аналогии с известными конструкциями квантовой теории поля.

Пусть $B_{p,n}(\eta)$ есть $\mathbb{Z}^p$ -градуированная алгебра, пространство степени $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ которой имеет вид $\{f(u_1, \dots, u_p)e_1^{\alpha_1} \cdots e_p^{\alpha_p}\}$, где f – мероморфные функции p аргументов, $e_1, \dots, e_p$ – элементы алгебры $B_{p,n}(\eta)$. Пусть $B_{p,n}(\eta)$ порождена пространством мероморфных функций $f(u_1, \dots, u_p)$ и элементами $e_1, \dots, e_p$ с определяющими соотношениями:

$$\begin{aligned} e_\alpha f(u_1, \dots, u_p) &= f(u_1 - 2\eta, \dots, u_\alpha + (n-2)\eta, \dots, u_p - 2\eta)e_\alpha, \\ e_\alpha e_\beta &= e_\beta e_\alpha, \quad f(u_1, \dots, u_p)g(u_1, \dots, u_p) = g(u_1, \dots, u_p)f(u_1, \dots, u_p). \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что подалгебра алгебры $B_{p,n}(\eta)$, состоящая из всех элементов степени $(0, \dots, 0)$, есть коммутативная алгебра всех мероморфных функций от p переменных с обычным умножением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $\eta \in \mathcal{E}$ – точка бесконечного порядка. Для всякого $p \in \mathbb{N}$ существует гомоморфизм $\varphi_p: Q_n(\mathcal{E}, \eta) \rightarrow B_{p,n}(\eta)$, который на образующих алгебры $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$ действует по формуле

$$\varphi_p(f) = \sum_{1 \leq \alpha \leq p} \frac{f(u_\alpha)}{\theta(u_\alpha - u_1) \cdots \theta(u_\alpha - u_p)} e_\alpha. \quad (11)$$

Здесь $f \in \Theta_{n,c}(\Gamma)$ – образующая алгебры $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$, произведение в знаменателе имеет вид $\prod_{i \neq \alpha} \theta(u_\alpha - u_i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим: $\xi_\alpha = \frac{1}{\theta(u_\alpha - u_1) \cdots \theta(u_\alpha - u_p)} e_\alpha$. Ясно что $\xi_1, \dots, \xi_p$ вместе с пространством мероморфных функций $\{f(u_1, \dots, u_p)\}$ порождают алгебру $B_{p,n}(\eta)$. Соотношения (10) приобретают вид

$$\begin{aligned} \xi_\alpha f(u_1, \dots, u_p) &= f(u_1 - 2\eta, \dots, u_\alpha + (n-2)\eta, \dots, u_p - 2\eta)\xi_\alpha, \\ \xi_\alpha \xi_\beta &= -\frac{e^{2\pi i(u_\beta - u_\alpha)} \theta(u_\alpha - u_\beta + n\eta)}{\theta(u_\beta - u_\alpha + n\eta)} \xi_\beta \xi_\alpha. \end{aligned}$$

Формула (11) перепишется в виде

$$\varphi_p(f) = \sum_{1 \leq \alpha \leq p} f(u_\alpha) \xi_\alpha. \quad (12)$$

Используя (12) и формулу для произведения в алгебре $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$, легко посчитать, как отображение φ_p , в предположении, что это гомоморфизм, продолжается на всю алгебру. Например, в градуировке 2 имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_p(f * g) &= \sum_{1 \leq \alpha \leq p} f(u_\alpha) \xi_\alpha \cdot \sum_{1 \leq \beta \leq p} g(u_\beta) \xi_\beta = \sum_{1 \leq \alpha, \beta \leq p} f(u_\alpha) \xi_\alpha f(u_\beta) \xi_\beta \\ &= \sum_{\substack{1 \leq \alpha, \beta \leq p \\ \alpha \neq \beta}} f(u_\alpha) g(u_\beta - 2\eta) \xi_\alpha \xi_\beta + \sum_{1 \leq \alpha \leq p} f(u_\alpha) g(u_\alpha + (n-2)\eta) \xi_\alpha^2. \end{aligned}$$

Первая сумма имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq p} (f(u_\alpha)g(u_\beta - 2\eta)\xi_\alpha\xi_\beta + f(u_\beta)g(u_\alpha - 2\eta)\xi_\beta\xi_\alpha) \\
&= \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq p} \left(f(u_\alpha)g(u_\beta - 2\eta)\xi_\alpha\xi_\beta \right. \\
&\quad \left. - f(u_\beta)g(u_\alpha - 2\eta) \frac{e^{2\pi i(u_\alpha - u_\beta)\theta(u_\beta - u_\alpha - n\eta)}}{\theta(u_\alpha - u_\beta + n\eta)} \xi_\alpha\xi_\beta \right) \\
&= \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq p} \frac{\theta(u_\alpha - u_\beta)}{\theta(u_\alpha - u_\beta - n\eta)} \\
&\quad \times \left(f(u_\alpha)g(u_\beta - 2\eta) \frac{\theta(u_\alpha - u_\beta - n\eta)}{\theta(u_\alpha - u_\beta)} + f(u_\beta)g(u_\alpha - 2\eta) \frac{\theta(u_\beta - u_\alpha - n\eta)}{\theta(u_\beta - u_\alpha)} \right) \xi_\alpha\xi_\beta \\
&= \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq p} \frac{\theta(u_\alpha - u_\beta)}{\theta(u_\alpha - u_\beta - n\eta)} f * g(u_\alpha, u_\beta) \xi_\alpha\xi_\beta.
\end{aligned}$$

Кроме того, $f(u_\alpha)g(u_\alpha + (n-2)\eta) = \frac{\theta(-n\eta)}{\theta(-2n\eta)} f * g(u_\alpha, u_\alpha + n\eta)$. Окончательно, получим:

$$\begin{aligned}
\varphi_p(f * g) &= \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq p} \frac{\theta(u_\alpha - u_\beta)}{\theta(u_\alpha - u_\beta - n\eta)} f * g(u_\alpha, u_\beta) \xi_\alpha\xi_\beta \\
&\quad + \frac{\theta(-n\eta)}{\theta(-2n\eta)} \sum_{1 \leq \alpha \leq p} f * g(u_\alpha, u_\alpha + n\eta) \xi_\alpha^2. \tag{13}
\end{aligned}$$

Мы видим, что φ_p можно продолжить на квадратичную часть алгебры $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$, поскольку правая часть (13) зависит только от $f * g$, но не от f и g в отдельности. Отсюда следует утверждение при общем η , поскольку в этом случае алгебра $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$ определена квадратичными соотношениями. Для доказательства более точного утверждения (когда η – точка бесконечного порядка) надо продолжить предыдущее вычисление. Получим следующую формулу: для $f \in F_\alpha$

$$\begin{aligned}
\varphi_p(f) &= \sum_{i_1, \dots, i_p \geq 0, i_1 + \dots + i_p = \alpha} B_{i_1, \dots, i_p} f(u_1, u_1 + n\eta, \dots, u_1 + (i_1 - 1)n\eta, \\
&\quad u_2, u_2 + n\eta, \dots, u_2 + (i_2 - 1)n\eta, \dots) \xi_1^{i_1} \dots \xi_p^{i_p}, \\
\text{где } B_{i_1, \dots, i_p} &= \prod_{\substack{1 \leq \lambda \leq \lambda' \leq p \\ 0 \leq \mu < i_\lambda \\ 0 \leq \mu' < i_{\lambda'} \\ \mu < \mu' \text{ при } \lambda = \lambda'}} \frac{\theta(u_\lambda + n\mu\eta - u_{\lambda'} - n\mu'\eta)}{\theta(u_\lambda + n\mu\eta - u_{\lambda'} - n\mu'\eta - n\eta)}. \tag{14}
\end{aligned}$$

Это произведение можно представить в виде $\prod_{1 \leq i < j < p} \frac{\theta(v_i - v_j)}{\theta(v_i - v_j - n\eta)}$, где $(v_1, \dots, v_p) = (u_1, u_1 + n\eta, \dots)$ – аргументы функции f в формуле (14) при $\xi_1^{i_1} \dots \xi_p^{i_p}$.

Формула (14) имеет смысл, если η – точка бесконечного порядка, и в этом случае прямое вычисление показывает, что φ_p есть гомоморфизм.

4. Представления алгебры $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$. Формула (14) показывает, что образ гомоморфизма φ_p содержится в подалгебре $B_{p,n}^{\text{reg}}(\eta) \subset B_{p,n}(\eta)$, состоящей из элементов вида $\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} f_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} e_1^{\alpha_1} \cdots e_p^{\alpha_p}$, где функции $f_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}$ голоморфны вне дивизоров вида $u_i - u_j - \lambda n \eta \in \Gamma$, $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Пусть $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{C}$ таковы, что $v_i - v_j - \lambda n \eta \notin \Gamma$ при $\lambda \in \mathbb{Z}$. Построим представление $M_{v_1, \dots, v_p}$ алгебры $B_{p,n}^{\text{reg}}(\eta)$ следующим образом. Представление $M_{v_1, \dots, v_p}$ имеет базис $\{w_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}; \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$, в котором элементы $e_1, \dots, e_p$ действуют так: $e_i w_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} = w_{\alpha_1, \dots, \alpha_i+1, \dots, \alpha_p}$. Таким образом, $w_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} = e_1^{\alpha_1} \cdots e_p^{\alpha_p} w$, где $w = w_{0, \dots, 0}$. Коммутативная подалгебра алгебры $B_{p,n}^{\text{reg}}(\eta)$, состоящая из элементов степени 0, действует в этом базисе диагонально. Положим $fw = f(v_1 - (n-2)\eta, \dots, v_p - (n-2)\eta)w$, отсюда $fw_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} = f(v_1 + (2\alpha_1 + \dots + 2\alpha_p - n\alpha_1 - (n-2)\eta), \dots, v_p + (2\alpha_1 + \dots + 2\alpha_p - n\alpha_p - (n-2)\eta))w_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}$. Ясно, что эти формулы определяют представление алгебры $B_{p,n}^{\text{reg}}(\eta)$ в пространстве $M_{v_1, \dots, v_p}$, а благодаря гомоморфизму φ_p имеем и представление алгебры $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$. Легко проверить, что в пространстве $M_{v_1, \dots, v_p}$ существует базис $\{v_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}; \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$, в котором действие образующих алгебры $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$ записывается в виде: для $f \in \Theta_n(\Gamma)$

$$fv_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} = \sum_{1 \leq i \leq p} \frac{f(v_i + (2\alpha_1 + \dots + 2\alpha_p - n\alpha_i)\eta)}{\theta(v_i - v_1 - n(\alpha_i - \alpha_1)\eta) \cdots \theta(v_i - v_p - n(\alpha_i - \alpha_p)\eta)} \times v_{\alpha_1, \dots, \alpha_i+1, \dots, \alpha_p}. \quad (15)$$

Векторы $v_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}$ пропорциональны векторам $w_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}$. В частности, при $p = 1$ имеем модули M_v с базисом $\{v_\alpha; \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ и действием: $fv_\alpha = f(v - (n-2)\alpha\eta)v_{\alpha+1}$. Таким образом, алгебра $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$ имеет семейство линейных модулей, параметризованных эллиптической кривой $\mathcal{E} \subset \mathbb{CP}^{n-1}$, где вложение осуществляется тэта-функциями порядка n .

5. Симплектические листы. Напомним, что $Q_n(\mathcal{E}, 0)$ есть кольцо многочленов $S^*\Theta_{n,c}(\Gamma)$. При фиксированной эллиптической кривой $\mathcal{E} = \mathbb{C}/\Gamma$ получаем семейство алгебр $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$, которое является плоской деформацией кольца многочленов. Соответствующую пуассонову алгебру обозначим $q_n(\mathcal{E})$. Это семейство пуассоновых алгебр, зависящих от $\mathcal{E}$, т.е. от модулярного параметра τ . Изучим симплектические листы этой алгебры. Для этого заметим, что гомоморфизм ассоциативных алгебр φ_p в пределе $\eta \rightarrow 0$ дает гомоморфизм пуассоновых алгебр. Именно, обозначим $b_{p,n}$ пуассонову алгебру, которая состоит из элементов вида

$$\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p \geq 0} f_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(u_1, \dots, u_p) e_1^{\alpha_1} \cdots e_p^{\alpha_p},$$

где $f_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}$ — мероморфные функции, а скобка Пуассона имеет вид:

$$\{u_\alpha, u_\beta\} = \{e_\alpha, e_\beta\} = 0, \quad \{e_\alpha, u_\beta\} = -2e_\alpha, \quad \{e_\alpha, u_\alpha\} = (n-2)e_\alpha,$$

где $\alpha \neq \beta$.

Из предложения 6 в пределе $\eta \rightarrow 0$ получаем:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Существует гомоморфизм пуассоновых алгебр $\psi_p: q_n(\mathcal{E}) \rightarrow b_{p,n}$, заданный формулой: для $f \in \Theta_n(\Gamma)$ имеем

$$\psi_p(f) = \sum_{1 \leq \alpha \leq p} \frac{f(u_\alpha)}{\theta(u_\alpha - u_1) \cdots \theta(u_\alpha - u_p)} e_\alpha.$$

Пусть $\{\theta_i(u); i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ – базис в пространстве $\Theta_{n,c}(\Gamma)$, $\{x_i; i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ – соответствующий базис в пространстве элементов степени 1 алгебры $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$ (которое изоморфно $\Theta_{n,c}(\Gamma)$). Для эллиптической кривой $\mathcal{E} \subset \mathbb{CP}^{n-1}$, вложенной с помощью тэта-функций порядка n (это множество точек с координатами $(\theta_0(z) : \cdots : \theta_{n-1}(z))$), обозначим $C_p \mathcal{E}$ многообразие p -хорд, т.е. объединение проективных пространств размерности $p-1$, проходящих через p точек $\mathcal{E}$. Пусть $K(C_p \mathcal{E})$ – соответствующее однородное многообразие в $\mathbb{C}^n$. Ясно, что $K(C_p \mathcal{E})$ состоит из точек с координатами

$$x_i = \sum_{1 \leq \alpha \leq p} \frac{\theta_i(u_\alpha)}{\theta(u_\alpha - u_1) \cdots \theta(u_\alpha - u_p)} e_\alpha,$$

где $u_\alpha, e_\alpha \in \mathbb{C}$.

Пусть $2p < n$, тогда можно показать, что $\dim K(C_p \mathcal{E}) = 2p$ и $K(C_{p-1} \mathcal{E})$ есть многообразие особенностей $K(C_p \mathcal{E})$. Из предложения 7 и невырожденности скобки Пуассона в $b_{p,n}$ при $2p < n$ и $e_\alpha \neq 0$ вытекает, что неособая часть многообразия $K(C_p \mathcal{E})$ есть $2p$ -мерный симплектический лист пуассоновой алгебры $q_n(\mathcal{E})$.

Пусть n нечетно. Можно показать, что уравнение, определяющее многообразие $K(C_{\frac{n-1}{2}} \mathcal{E})$, имеет вид $C = 0$, где C – однородный многочлен переменных x_i степени n . Этот многочлен есть центральная функция алгебры $q_n(\mathcal{E})$.

Пусть n четно. Многообразие $K(C_{\frac{n-2}{2}} \mathcal{E})$ определяется уравнениями $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, где $\deg C_1 = \deg C_2 = n/2$. Многочлены C_1 и C_2 центральны в алгебре $q_n(\mathcal{E})$.

6. Свободные модули, образующие и соотношения. Пусть η – точка бесконечного порядка.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}$ находятся в общем положении. Тогда модуль $M_{v_1, \dots, v_n}$ порожден $v_0, \dots, v_0$ и свободен над алгеброй $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению модуль $M_{v_1, \dots, v_n}$ имеет те же размерности градуированных компонент, что и алгебра $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$. Покажем, что он порожден вектором $v = v_0, \dots, v_0$. Пусть

$$f_i = \prod_{\alpha \neq i} \theta(z - v_\alpha) \cdot \theta(z + v_1 + \cdots + v_n - v_i - c).$$

Ясно, что $f_i \in \Theta_{n,c}(\Gamma)$ для $1 \leq i \leq n$. Поэтому f_i – элементы степени 1 алгебры $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$. Из формулы (15) вытекает, что $f_i v \neq 0$ и пропорционален $v_0, \dots, 1, \dots, 0 = e_i v$. Аналогично, легко построить элементы $f_{i; \alpha_1, \dots, \alpha_n} \in \Theta_{n,c}(\Gamma)$ такие, что $f_{i; \alpha_1, \dots, \alpha_n} v_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \neq 0$ и пропорционален $v_{\alpha_1, \dots, \alpha_i+1, \dots, \alpha_n}$. Имеем:

$$\begin{aligned} f_{i; \alpha_1, \dots, \alpha_n} &= \prod_{\beta \neq i} \theta(z - v_\beta - (2\alpha_1 + \cdots + 2\alpha_n - n\alpha_\beta)\eta) \\ &\quad \times \theta(z + v_1 + \cdots + v_n - v_i + (n-2)(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)\eta - c). \end{aligned}$$

Таким образом, все $v_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ получаются из v действием элементов степени 1 алгебры $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Алгебра $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$ определена n образующими и $\frac{n(n-1)}{2}$ квадратичными соотношениями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства предложения 8 вытекает, что алгебра $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$ порождена элементами степени 1. Из построения элементов $f_{i; \alpha_1, \dots, \alpha_n}$ видно, что между ними имеются квадратичные соотношения вида

$$f_{j; \alpha_1, \dots, \alpha_i+1, \dots, \alpha_n} f_{i; \alpha_1, \dots, \alpha_n} = c_{i,j; \alpha_1, \dots, \alpha_n} f_{i; \alpha_1, \dots, \alpha_j+1, \dots, \alpha_n} f_{j; \alpha_1, \dots, \alpha_n}, \quad (16)$$

где $c_{i,j; \alpha_1, \dots, \alpha_n} \in \mathbb{C}^*$. Для доказательства этого соотношения надо применить его к вектору $v_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$. Покажем, что из этих квадратичных соотношений следуют все остальные. Пусть соотношение имеет вид $\sum_{\alpha} a_t^{(\alpha)} a_{t-1}^{(\alpha)} \dots a_1^{(\alpha)} = 0$. Разложим элементы $a_1^{(\alpha)}$ по базису $\{f_i\}$. Соотношение приобретет вид $\sum_{\beta, i} b_t^{(\beta)} \dots b_2^{(\beta)} f_i = 0$. Теперь разложим $b_2^{(\beta)}$ по базису $\{f_{i; 0, \dots, 1, \dots, 0}\}$, где 1 стоит на i -м месте. Продолжая эту процедуру, мы в итоге запишем соотношение в виде

$$\sum c_{i_1, \dots, i_t} f_{i_1; \alpha_1, \dots, \alpha_n} f_{i_2; \alpha_1, \dots, \alpha_{i_2}-1, \dots, \alpha_n} \dots f_{i_t} = 0.$$

Ясно, что это соотношение вытекает из соотношений (16).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Соотношения в алгебре $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$ имеют вид:*

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \frac{1}{\theta_{j-i-r}(-\eta) \theta_r(\eta)} x_{j-r} x_{i+r} = 0, \quad \text{где } i \neq j; \quad i, j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся формулой для умножения в алгебре $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$ (§2.1). Поскольку $x_i = \theta_i(z)$, соотношение (17) примет вид:

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \frac{1}{\theta_{j-i-r}(-\eta) \theta_r(\eta)} \left(\theta_{j-r}(z_1) \theta_{i+r}(z_2 - 2\eta) \frac{\theta(z_1 - z_2 - n\eta)}{\theta(z_1 - z_2)} + \theta_{j-r}(z_2) \theta_{i+r}(z_1 - 2\eta) \frac{\theta(z_2 - z_1 - n\eta)}{\theta(z_2 - z_1)} \right) = 0.$$

Это соотношение сразу следует из соотношения (30) (см. приложение А).

§ 3. Основные свойства алгебр $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$

Пусть снова $\mathcal{E} = \mathbb{C}/\Gamma$ – эллиптическая кривая, $\eta \in \mathcal{E}$. Пусть n и k – взаимно простые натуральные числа, причем $1 \leq k < n$. Определим алгебру $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ образующими $\{x_i; i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ и соотношениями:

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \frac{\theta_{j-i+r(k-1)}(0)}{\theta_{kr}(\eta) \theta_{j-i-r}(-\eta)} x_{j-r} x_{i+r} = 0. \quad (18)$$

Известно (см. §4) что при общих $\mathcal{E}$ и η это ПБВ-алгебра. Мы предполагаем, что это так при всех $\mathcal{E}$ и η . Центр алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ при общих $\mathcal{E}$ и η есть кольцо многочленов от $c = \text{НОД}(n, k+1)$ элементов степени n/c (см. [20]). Гипотетически, это так при всех $\mathcal{E}$ и η , где η – точка бесконечного порядка. Если $\eta \in \mathcal{E}$ – точка конечного порядка, то алгебра $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ конечномерна над своим центром (см. [37]). Следующие свойства легко проверяются:

- 1) $Q_{n,k}(\mathcal{E}, 0) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ коммутативна;
- 2) $Q_{n,n-1}(\mathcal{E}, \eta) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ коммутативна при всех η ;
- 3) $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta) \simeq Q_{n,k'}(\mathcal{E}, \eta)$, где $kk' \equiv 1 \pmod{n}$;
- 4) отображения $x_i \mapsto x_{i+1}$ и $x_i \mapsto \varepsilon^i x_i$ (где ε – примитивный корень из 1 степени n) задают автоморфизмы алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$.

Из результатов §5 (см. предложение 11) вытекает, что пространство образующих алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ естественно изоморфно пространству тэта-функций $\Theta_{n/k}(\Gamma)$ (см. приложение В). Кроме того, это пространство образующих двойственно пространству $\Theta_{n/n-k}(\Gamma)$ (см. предложение 14). Описание этой двойственности между пространствами тэта-функций см. в приложении С.

Алгебра $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ не является алгеброй Хопфа и не имеет коумножения. Существуют, однако, гомоморфизмы алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ в тензорные произведения других алгебр такого же вида (см. [35; §3]). Для описания этих гомоморфизмов нам понадобятся обозначения приложения В. Кроме того, через $L_m(\mathcal{E}, \eta) = \mathbb{C} \oplus \Theta_{m,0}(\Gamma) \oplus \Theta_{2m,m\eta}(\Gamma) \oplus \dots$ обозначим $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -градуированную алгебру с умножением $*$, заданным формулой $f * g(z) = f(z + \beta\eta)g(z)$, где β – степень g . Из §2 мы знаем, что $L_n(\mathcal{E}, (n-2)\eta)$ есть факторалгебра алгебры $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$.

Пусть A – ассоциативная алгебра и $G \subset \text{Aut } A$. Обозначим $A^G \subset A$ подалгебру, состоящую из элементов, инвариантных относительно G .

Существуют следующие гомоморфизмы алгебр:

- а) $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta) \rightarrow (L_{kn}(\mathcal{E}, \frac{n-k-1}{k}\eta) \otimes Q_{k,l}(\mathcal{E}, \frac{n}{k}\eta))^{\tilde{\Gamma}_k}$, где $l = d(n_3, \dots, n_p)$ и образующие переходят в элементы бистепени $(1, 1)$;
- б) $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta) \rightarrow (L_{nk'}(\mathcal{E}, \frac{n-k'-1}{k'}\eta) \otimes Q_{k',l'}(\mathcal{E}, \frac{n}{k'}\eta))^{\tilde{\Gamma}_{k'}}$, где $l' = d(n_1, \dots, n_{p-2})$ и образующие переходят в элементы бистепени $(1, 1)$;
- в) $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta) \rightarrow (Q_{a,\alpha}(\mathcal{E}, \frac{n}{\alpha}\eta) \otimes L_{abn}(\mathcal{E}, \frac{n-a-b}{ab}\eta) \otimes Q_{b,\beta}(\mathcal{E}, \frac{n}{b}\eta))^{\tilde{\Gamma}^{ab}}$, где $a = d(n_1, \dots, n_{i-1})$, $b = d(n_{i+1}, \dots, n_p)$, $\alpha = d(n_1, \dots, n_{i-2})$, $\beta = d(n_{i+2}, \dots, n_p)$ для некоторого i ; образующие переходят в элементы бистепени $(1, 1, 1)$.

Опишем отображение в) геометрически (описание отображений а) и б) аналогично). Пусть $f(z_1, \dots, z_p) \in \Theta_{n/k}(\Gamma)$. Для некоторого i ($1 < i < p$) фиксируем z_i , тогда f как функция $z_1, \dots, z_{i-1}$ лежит в пространстве, изоморфном $\Theta_{a/\alpha}(\Gamma)$. Аналогично, как функция $z_{i+1}, \dots, z_p$, f лежит в пространстве, изоморфном $\Theta_{b/\beta}(\Gamma)$. Таким образом, при фиксированном z_i имеем $f \in \Theta_{a/\alpha}(\Gamma) \otimes \Theta_{b/\beta}(\Gamma)$. Возникает семейство линейных отображений $\Theta_{n/k}(\Gamma) \rightarrow \Theta_{a/\alpha}(\Gamma) \otimes \Theta_{b/\beta}(\Gamma)$. Учитывая зависимость от z_i , получим линейное отображение $\Theta_{n/k}(\Gamma) \rightarrow \Theta_{a/\alpha}(\Gamma) \otimes \Theta_{nab,0}(\Gamma) \otimes \Theta_{b/\beta}(\Gamma)$. Гомоморфизм в) отвечает этому отображению (пространство образующих алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ есть $\Theta_{n/k}(\Gamma)$, пространство образующих алгебры $L_{nab}(\mathcal{E}, \frac{n-a-b}{ab}\eta)$ есть $\Theta_{nab,0}(\Gamma)$ и т. д.).

§ 4. Эллиптическая R -матрица Белавина и алгебра $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$

Пусть V – векторное пространство размерности n . Для каждого $u \in \mathbb{C}$ обозначим $V(u)$ векторное пространство, канонически изоморфное V . Пусть R – мероморфная функция 2 переменных со значениями в $\text{End}(V \otimes V)$. Нам будет удобно рассматривать $R(u, v)$ как линейное отображение:

$$R(u, v): V(u) \otimes V(v) \rightarrow V(v) \otimes V(u).$$

Напомним, что уравнением Янга–Бакстера называется условие коммутативности следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc}
 & V(v) \oplus V(u) \oplus V(w) & \xrightarrow{1 \oplus R(u, w)} V(v) \oplus V(w) \oplus V(u) \\
 R(u, v) \oplus 1 \nearrow & & \searrow R(v, w) \oplus 1 \\
 V(u) \oplus V(v) \oplus V(w) & & V(w) \oplus V(v) \oplus V(u) \\
 1 \oplus R(v, w) \searrow & & \nearrow 1 \oplus R(u, v) \\
 & V(u) \oplus V(w) \oplus V(v) & \xrightarrow{R(u, w) \oplus 1} V(w) \oplus V(u) \oplus V(v)
 \end{array}$$

Решение уравнения Янга–Бакстера называется R -матрицей.

Пусть $\{x_i; i = 1, \dots, n\}$ – базис в пространстве V , $\{x_i(u)\}$ – соответствующий базис в пространстве $V(u)$. Пусть $R_{ij}^{\alpha\beta}(u, v)$ – матричный элемент R -матрицы $R(u, v)$, т.е. $R(u, v): x_i(u) \otimes x_j(v) \rightarrow R_{ij}^{\alpha\beta}(u, v) x_\beta(v) \otimes x_\alpha(u)$.

Пусть R -матрица $R(u, v)$ удовлетворяет соотношению $R(u, v)R(v, u) = 1$. Алгеброй Замолодчикова Z_R называется алгебра с образующими $\{x_i(u); i = 1, \dots, n; u \in \mathbb{C}\}$ и определяющими соотношениями:

$$x_i(u)x_j(v) = R_{ij}^{\alpha\beta}(u, v)x_\beta(v)x_\alpha(u). \quad (19)$$

Ясно, что в алгебре Замолодчикова элементы $\{x_{i_1}(u_1) \cdots x_{i_m}(u_m); 1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n\}$ линейно независимы при общих $u_1, \dots, u_m$. Таким образом, алгебры Замолодчикова являются бесконечномерными аналогами ПБВ-алгебр. Напомним, что классической r -матрицей называется пуассонова структура вида:

$$\{x_i(u), x_j(v)\} = r_{ij}^{\alpha\beta}(u, v)x_\alpha(u)x_\beta(v).$$

Ясно, что алгебра Замолодчикова является квантованием этой пуассоновой структуры, если R -матрица зависит от дополнительного параметра $\hbar$ и соотношения (19) имеют вид

$$x_i(u)x_j(v) = x_j(v)x_i(u) + \hbar r_{ij}^{\alpha\beta}(u, v)x_\beta(v)x_\alpha(u) + o(\hbar).$$

Уравнение Янга–Бакстера имеет эллиптические решения, которые называются R -матрицами Белавина. Пусть $n, k \in \mathbb{N}$ взаимно просты, причем $1 \leq k < n$.

Для каждых n и k существует двухпараметрическое семейство R -матриц $R_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$, зависящее от эллиптической кривой $\mathcal{E} = \mathbb{C}/\Gamma$ и точки $\eta \in \mathcal{E}$. Именно:

$$\begin{aligned} R_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)(u-v)(x_i(u) \otimes x_j(v)) \\ = \frac{1}{p(u-v)} \sum_{r \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \frac{\theta_{j-i+r(k-1)}(v-u+\eta)}{\theta_{kr}(\eta)\theta_{j-i-r}(v-u)} x_{j-r}(v) \otimes x_{i+r}(u), \end{aligned}$$

где

$$p(u-v) = \frac{\theta_1(0) \cdots \theta_{n-1}(0)\theta_0(v-u+\eta) \cdots \theta_{n-1}(v-u+\eta)}{\theta_0(\eta) \cdots \theta_{n-1}(\eta)\theta_0(v-u) \cdots \theta_{n-1}(v-u)}; \quad i, j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Легко проверить, что

$$\det R_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)(u-v) = \left(\frac{\theta_0(v-u-\eta) \cdots \theta_{n-1}(v-u-\eta)}{\theta_0(v-u+\eta) \cdots \theta_{n-1}(v-u+\eta)} \right)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Таким образом, оператор $R_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)(-\eta)$ имеет ядро. Пусть $L_{n,k}(\mathcal{E}, \eta) \subset V \otimes V$, $L_{n,k}(\mathcal{E}, \eta) = \ker R_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)(-\eta)$. Согласно [10] $\dim(L_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)) = \frac{n(n-1)}{2}$, причем при $\eta = 0$ имеем $L_{n,k}(\mathcal{E}, 0) = \Lambda^2 V$. Пусть $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta) = T^*V/(L_{n,k}(\mathcal{E}, \eta))$ – алгебра с образующими $\{x_i; i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ и определяющими соотношениями $L_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$. Алгебра $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ имеет такие же размерности градуированных компонент, как и кольцо многочленов S^*V (см. [10]). Из формулы для $R_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)(u-v)$ вытекает, что определяющие соотношения в алгебре $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ имеют вид:

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \frac{\theta_{j-i+r(k-1)}(0)}{\theta_{kr}(\eta)\theta_{j-i-r}(-\eta)} x_{j-r} x_{i+r} = 0. \quad (20)$$

В частности, мы видим, что $Q_{n,1}(\mathcal{E}, \eta) = Q_n(\mathcal{E}, \eta)$, если $\eta \in \mathcal{E}$ – точка бесконечного порядка.

Из соотношений (20) вытекает, что $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta) \simeq Q_{n,k'}(\mathcal{E}, \eta)$, где $kk' \equiv 1 \pmod{n}$. Кроме того, $Q_{n,n-1}(\mathcal{E}, \eta)$ коммутативна при всех $\mathcal{E}, \eta$. Ясно также, что $Q_{n,k}(\mathcal{E}, 0)$ коммутативна.

§5. Алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ и обменные алгебры

1. Гомоморфизмы алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ в динамические обменные алгебры. Алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ при произвольном k имеют представления, аналогичные гомоморфизмам φ_p (см. §2.3, (11)) в случае $k = 1$. Но структура алгебры, аналогичной $B_{p,n}(\eta)$ при $k = 1$, оказывается более сложной при $k > 1$. Пусть $n/k = n_1 - \frac{1}{n_2 - \dots - \frac{1}{n_q}}$ – разложение числа n/k в цепную дробь, где $n_\alpha \geq 2$ при $1 \leq \alpha \leq q$. Ясно, что такое разложение существует и единственно. Напомним, что $1 \leq k < n$, причем n и k взаимно просты. Пусть $d(m_1, \dots, m_t) = \det M$, где $M = (m_{ij})$ – матрица размера $t \times t$ с элементами $m_{ii} = m_i$, $m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = -1$, $m_{ij} = 0$ при $|i-j| > 1$. При $t = 0$ положим $d(\emptyset) = 1$. Ясно, что $n = d(n_1, \dots, n_q)$, $k = d(n_2, \dots, n_q)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Существует гомоморфизм алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ в алгебру $C_{n,k}(\eta)$, порожденную коммутативной подалгеброй $\{f(y_1, \dots, y_q)\}$ голоморфных функций q переменных и элементом e с определяющими соотношениями: $ef(y_1, \dots, y_q) = f(y_1 + \eta_1, \dots, y_q + \eta_q)e$, где $\eta_\alpha = (d(n_1, \dots, n_q) - d(n_1, \dots, n_{\alpha-1}) - d(n_{\alpha+1}, \dots, n_q))\eta$. При этом $x_i \rightarrow w_i(y_1, \dots, y_q)e$, где $w_i \in \Theta_{n/k}(\Gamma)$ (см. приложение В).

Это частный случай предложения 13.

Алгебра $C_{n,k}(\eta)$ имеет семейство модулей $L_{v_1, \dots, v_q}$ с базисом $\{v_\alpha; \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ и действием: $ev_\alpha = v_{\alpha+1}$, $f(y_1, \dots, y_q)v_\alpha = f(v_1 - \alpha\eta_1, \dots, v_q - \alpha\eta_q)v_\alpha$. Отсюда получаем:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Алгебра $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ имеет семейство модулей $L_{u_1, \dots, u_q}$ с базисом $\{v_\alpha; \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ и действием: $x_i v_\alpha = w_i(u_1 - \alpha\eta_1, \dots, u_q - \alpha\eta_q)v_{\alpha+1}$, где $w_i \in \Theta_{n/k}(\Gamma)$ и $\eta_j = (d(n_1, \dots, n_q) - d(n_1, \dots, n_{j-1}) - d(n_{j+1}, \dots, n_q))\eta$.

В частности, мы получили, что алгебра $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ имеет семейство линейных модулей, зависящих от точки $\mathcal{E}^q$, а пространство образующих алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ изоморфно $\Theta_{n/k}(\Gamma)$.

Пусть $C_{m_1, \dots, m_q; n, k}(\mathcal{E}, \eta)$ – алгебра, порожденная коммутативной подалгеброй $\{\varphi(y_{1,1}, \dots, y_{m_1,1}; \dots; y_{1,q}, \dots, y_{m_q,q})\}$, где φ – мероморфные функции с обычным умножением, и элементами $\{e_{\alpha_1, \dots, \alpha_q}; 1 \leq \alpha_t \leq m_t\}$. Соотношения, определяющие алгебру $C_{m_1, \dots, m_q; n, k}(\mathcal{E}, \eta)$, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} e_{\alpha_1, \dots, \alpha_q} y_{\beta, \nu} &= (y_{\beta, \nu} - (d(n_1, \dots, n_{\nu-1}) + d(n_{\nu+1}, \dots, n_q))\eta) e_{\alpha_1, \dots, \alpha_q}, \text{ где } \alpha_\nu \neq \beta, \\ e_{\alpha_1, \dots, \alpha_q} y_{\alpha_\nu, \nu} &= (y_{\alpha_\nu, \nu} + (n - d(n_1, \dots, n_{\nu-1}) - d(n_{\nu+1}, \dots, n_q))\eta) e_{\alpha_1, \dots, \alpha_q}. \end{aligned}$$

Эти соотношения означают, что $y_{\beta, \nu}$ – динамические переменные. Отсюда сразу вытекают соотношения между $e_{\alpha_1, \dots, \alpha_q}$ и мероморфными функциями переменных $y_{\beta, \nu}$. Оставшиеся соотношения квадратичны по $e_{\alpha_1, \dots, \alpha_q}$ с коэффициентами, зависящими от динамических переменных $y_{\beta, \nu}$. Соотношения “общего положения” имеют вид:

$$\begin{aligned} & e_{\alpha_1, \dots, \alpha_q} e_{\beta_1, \dots, \beta_q} \\ &= \Lambda e_{\beta_1, \dots, \beta_q} e_{\alpha_1, \dots, \alpha_q} + \sum_{1 \leq t \leq q-1} \Lambda_{t, t+1} e_{\beta_1, \dots, \beta_t, \alpha_{t+1}, \dots, \alpha_q} e_{\alpha_1, \dots, \alpha_t, \beta_{t+1}, \dots, \beta_q}, \\ & \text{где } \alpha_1 \neq \beta_1, \dots, \alpha_q \neq \beta_q \text{ и} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{e^{-2\pi i n \eta} \theta(y_{\beta_1, 1} - y_{\alpha_1, 1}) \theta(y_{\beta_q, q} - y_{\alpha_q, q} + n\eta)}{\theta(y_{\beta_1, 1} - y_{\alpha_1, 1} - n\eta) \theta(y_{\beta_q, q} - y_{\alpha_q, q})}, \\ \Lambda_{t, t+1} &= \frac{e^{-2\pi i n \eta} \theta(n\eta) \theta(y_{\beta_1, 1} - y_{\alpha_1, 1})}{\theta(y_{\beta_1, 1} - y_{\alpha_1, 1} - n\eta)} \cdot \frac{\theta(y_{\beta_t, t} + y_{\beta_{t+1}, t+1} - y_{\alpha_t, t} - y_{\alpha_{t+1}, t+1})}{\theta(y_{\beta_t, t} - y_{\alpha_t, t}) \theta(y_{\beta_{t+1}, t+1} - y_{\alpha_{t+1}, t+1})}. \end{aligned}$$

Соотношения необщего положения возникают, когда какие-то $\alpha_\nu = \beta_\nu$. Они имеются для каждого подмножества вида $\{\psi + 1, \dots, \psi + \varphi\}$, где $0 \leq \psi$; $\psi + \varphi \leq q$, причем $\alpha_\psi = \beta_\psi$ (если $0 < \psi$), $\alpha_{\psi+\varphi+1} = \beta_{\psi+\varphi+1}$ (если $\psi + \varphi < q$) и $\alpha_{\psi+1} \neq \beta_{\psi+1}, \dots$,

$\alpha_{\psi+\varphi} \neq \beta_{\psi+\varphi}$. Эти соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} & e_{\mu_1, \dots, \mu_\psi, \alpha_1, \dots, \alpha_\varphi, \gamma_1, \dots, \gamma_p} e_{\mu_1, \dots, \mu'_{\psi-1}, \mu_\psi, \beta_1, \dots, \beta_\varphi, \gamma_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_p} \\ &= \Lambda e_{\mu_1, \dots, \mu_\psi, \beta_1, \dots, \beta_\varphi, \gamma_1, \dots, \gamma_p} e_{\mu'_1, \dots, \mu_\psi, \alpha_1, \dots, \alpha_\varphi, \gamma_1, \dots, \gamma'_p} \\ &+ \sum_{1 \leq t < \varphi} \Lambda_{t, t+1} e_{\mu_1, \dots, \mu_\psi, \beta_1, \dots, \beta_t, \alpha_{t+1}, \dots, \alpha_\varphi, \gamma_1, \dots, \gamma_p} e_{\mu'_1, \dots, \mu_\psi, \alpha_1, \dots, \alpha_t, \beta_{t+1}, \dots, \beta_\varphi, \gamma_1, \dots, \gamma'_p}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь $\alpha_1 \neq \beta_1, \dots, \alpha_\varphi \neq \beta_\varphi, \varphi + \psi + p = q$. Коэффициенты $\Lambda, \Lambda_{t, t+1}$ определены в (21). В случае $\psi = p = 0$ это соотношение совпадает с (21), т.е. становится соотношением общего положения.

Заметим, что при $\eta = 0$ алгебра $C_{m_1, \dots, m_q; n, k}(\mathcal{E}, 0)$ коммутативна и не зависит от эллиптической кривой $\mathcal{E}$. При $q = 1$ и $q = 2$ алгебра $C_{m_1, \dots, m_q; n, k}(\mathcal{E}, 0)$ есть кольцо многочленов от переменных $\{e_{\alpha_1, \dots, \alpha_q}\}$ над полем мероморфных функций переменных $\{y_{\alpha, \beta}\}$. При $q > 2$ алгебра $C_{m_1, \dots, m_q; n, k}(\mathcal{E}, 0)$ не является кольцом многочленов, поскольку появляются дополнительные соотношения. Именно, соотношения (22) при $\eta = 0$ принимают вид:

$$\begin{aligned} & e_{\mu_1, \dots, \mu_\psi, \alpha_1, \dots, \alpha_\varphi, \gamma_1, \dots, \gamma_p} e_{\mu'_1, \dots, \mu'_{\psi-1}, \mu_\psi, \beta_1, \dots, \beta_\varphi, \gamma_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_p} \\ &= e_{\mu_1, \dots, \mu_\psi, \beta_1, \dots, \beta_\varphi, \gamma_1, \dots, \gamma_p} e_{\mu'_1, \dots, \mu'_{\psi-1}, \mu_\psi, \alpha_1, \dots, \alpha_\varphi, \gamma_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_p}. \end{aligned} \quad (23)$$

Алгебра $C_{m_1, \dots, m_q; n, k}(\mathcal{E}, \eta)$ есть плоская деформация алгебры функций на многообразии, определенном соотношениями (23). При этом $y_{\alpha, \beta}$ являются динамическими переменными. Ясно, что многообразие, определенное уравнениями (23), рационально и их общее решение имеет вид: $e_{\alpha_1, \dots, \alpha_q} = e_{\alpha_1, \alpha_2}^{(1)} e_{\alpha_2, \alpha_3}^{(2)} \cdots e_{\alpha_{q-1}, \alpha_q}^{(q-1)}$, где $\{e_{\alpha, \beta}^{(t)}\}$ — независимые переменные.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. *Существует гомоморфизм алгебр*

$$\varphi: Q_{n, k}(\mathcal{E}, \eta) \rightarrow C_{m_1, \dots, m_q; n, k}(\mathcal{E}, \eta),$$

который на образующих алгебры $Q_{n, k}(\mathcal{E}, \eta)$ действует следующим образом:

$$\varphi(x_i) = \sum_{\substack{1 \leq \alpha_1 \leq m_1 \\ \vdots \\ 1 \leq \alpha_q \leq m_q}} w_i(y_{\alpha_1, 1}, \dots, y_{\alpha_q, q}) e_{\alpha_1, \dots, \alpha_q}. \quad (24)$$

Здесь $w_i \in \Theta_{n/k}(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Алгебра $Q_{n, k}(\mathcal{E}, \eta)$ определена соотношениями (18). Проверим, что образы $\varphi(x_i)$ удовлетворяют тем же соотношениям. Имеем:

$$\begin{aligned} & \sum_{r \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \frac{\theta_{j-i+r(k-1)}(0)}{\theta_{kr}(\eta) \theta_{j-i-r}(-\eta)} \varphi(x_{j-r}) \varphi(x_{i+r}) \\ &= \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ 1 \leq \alpha_1, \beta_1 \leq m_1 \\ \vdots \\ 1 \leq \alpha_q, \beta_q \leq m_q}} \frac{\theta_{j-i+r(k-1)}(0)}{\theta_{kr}(\eta) \theta_{j-i-r}(-\eta)} w_{j-r}(y_{\alpha_1, 1}, \dots, y_{\alpha_q, q}) e_{\alpha_1, \dots, \alpha_q} \\ & \quad \times w_{i+r}(y_{\beta_1, 1}, \dots, y_{\beta_q, q}) e_{\beta_1, \dots, \beta_q}. \end{aligned}$$

Используя соотношения (21), (22), получим выражение вида:

$$\sum_{\substack{\alpha_1 \leq \beta_1; \\ \alpha_2 \leq \beta_2 \text{ при } \alpha_1 = \beta_1; \\ \dots}} \psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_q} e_{\alpha_1, \dots, \alpha_q} e_{\beta_1, \dots, \beta_q}.$$

Мы должны доказать, что коэффициенты равны 0. Ограничимся случаем $\alpha_1 \neq \beta_1, \dots, \alpha_q \neq \beta_q$. В этом случае, как показывает вычисление:

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha_1, \dots, \beta_q} = & \sum_{r \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \frac{\theta_{j-i+r(k-1)}(0)}{\theta_{kr}(\eta)\theta_{j-i-r}(-\eta)} \\ & \times \left(w_{j-r}(y_{\alpha_1,1}, \dots, y_{\alpha_q,q}) w_{i+r}(y_{\beta_1,1} + t_1, \dots, y_{\beta_q,q} + t_q) \right. \\ & + \frac{e^{-2\pi i n \eta} \theta(y_{\alpha_1,1} - y_{\beta_1,1}) \theta(y_{\alpha_q,q} - y_{\beta_q,q} + n\eta)}{\theta(y_{\alpha_1,1} - y_{\beta_1,1} - n\eta) \theta(y_{\alpha_q,q} - y_{\beta_q,q})} \\ & \times w_{j-r}(y_{\beta_1,1}, \dots, y_{\beta_q,q}) w_{i+r}(y_{\alpha_1,1} + t_1, \dots, y_{\alpha_q,q} + t_q) \\ & + \sum_{1 \leq t \leq q-1} \frac{e^{-2\pi i n \eta} \theta(n\eta) \theta(y_{\alpha_1,1} - y_{\beta_1,1})}{\theta(y_{\alpha_1,1} - y_{\beta_1,1} - n\eta)} \\ & \times \frac{\theta(y_{\alpha_t,t} + y_{\beta_{t+1},t+1} - y_{\beta_t,t} - y_{\alpha_{t+1},t+1})}{\theta(y_{\alpha_t,t} - y_{\beta_t,t}) \theta(y_{\beta_{t+1},t+1} - y_{\alpha_{t+1},t+1})} \\ & \times w_{j-r}(y_{\beta_1,1}, \dots, y_{\beta_t,t}, y_{\alpha_{t+1},t+1}, \dots, y_{\alpha_q,q}) \\ & \left. \times w_{i+r}(y_{\alpha_1,1} + t_1, \dots, y_{\alpha_t,t} + t_t, y_{\beta_{t+1},t+1} + t_{t+1}, \dots, y_{\beta_q,q} + t_q) \right). \end{aligned}$$

Здесь $t_\alpha = -(d(n_1, \dots, n_{\alpha-1}) + d(n_{\alpha+1}, \dots, n_q))\eta$.

Равенство $\psi_{\alpha_1, \dots, \beta_q} = 0$ сразу следует из тождества (35), доказанного в приложении В.

2. Гомоморфизм обменной алгебры в алгебру $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$. Пусть $q' \in \mathbb{N}$, $\mu_1, \dots, \mu_{q'}, \mu \in \mathbb{C}$. Определим ассоциативную алгебру $Y_{q'}(\mathcal{E}, \mu; \mu_1, \dots, \mu_{q'})$ следующим образом. Алгебра $Y_{q'}(\mathcal{E}, \mu; \mu_1, \dots, \mu_{q'})$ порождена образующими $\{e(u_1, \dots, u_{q'}); u_1, \dots, u_{q'} \in \mathbb{C}\}$ и определяющими соотношениями:

$$\begin{aligned} & \frac{\theta(v_1 - u_1 + \mu)}{\theta(v_1 - u_1)} e(u_1, \dots, u_{q'}) e(v_1 + \mu_1, \dots, v_{q'} + \mu_{q'}) \\ & = \sum_{1 \leq t < q'} \frac{\theta(\mu) \theta(v_t - u_t + u_{t+1} - v_{t+1})}{\theta(v_t - u_t) \theta(u_{t+1} - v_{t+1})} \\ & \quad \times e(v_1, \dots, v_t, u_{t+1}, \dots, u_{q'}) e(u_1 + \mu_1, \dots, u_t + \mu_t, v_{t+1} + \mu_{t+1}, \dots, v_{q'} + \mu_{q'}) \\ & \quad + \frac{\theta(v_{q'} - u_{q'} + \mu)}{\theta(v_{q'} - u_{q'})} e(v_1, \dots, v_{q'}) e(u_1 + \mu_1, \dots, u_{q'} + \mu_{q'}). \end{aligned}$$

При $\mu = \mu_1 = \dots = \mu_{q'} = 0$ алгебра $Y_{q'}(\mathcal{E}, 0; 0, \dots, 0)$ есть кольцо многочленов от бесконечного числа переменных $\{e(u_1, \dots, u_{q'}); u_1, \dots, u_{q'} \in \mathbb{C}\}$. Можно проверить, что алгебра $Y_{q'}(\mathcal{E}, \mu; \mu_1, \dots, \mu_{q'})$ есть плоская деформация этой алгебры.

Пусть $\frac{n}{n-k} = n'_1 - \frac{1}{\frac{n'_2}{n'_2 - \dots - \frac{1}{n'_{q'}}}}$ – разложение в цепную дробь, где $n'_\alpha \geq 2$ при $1 \leq \alpha \leq q'$. Ясно, что такое разложение существует и единственно. О связи разложений в цепную дробь чисел $\frac{n}{k}$ и $\frac{n}{n-k}$ см. приложение С.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. *Существует гомоморфизм алгебр*

$$\psi: Y_{q'}(\mathcal{E}, \mu; \mu_1, \dots, \mu_{q'}) \rightarrow Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta),$$

где $\mu = n\eta$, $\mu_\alpha = (d(n'_1, \dots, n'_{\alpha-1}) - d(n'_{\alpha+1}, \dots, n'_{q'}))\eta$. Этот гомоморфизм имеет вид:

$$\psi: e(u_1, \dots, u_{q'}) \rightarrow \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} w_\alpha(u_1, \dots, u_{q'}) x_{1-\alpha}, \quad (25)$$

где $\{x_i; i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ – образующие алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$, $\{w_\alpha; \alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ – базис в пространстве тэта-функций $\Theta_{n/n-k}(\Gamma)$ (см. приложение В).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим ψ к разности между левой и правой частью соотношений в алгебре $Y_{q'}(\mathcal{E}, \mu; \mu_1, \dots, \mu_{q'})$. Мы должны проверить полученное соотношение в алгебре $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$. Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\theta(v_1 - u_1 + \mu)}{\theta(v_1 - u_1)} \psi(e(u_1, \dots, u_{q'})) \psi(e(v_1 + \mu_1, \dots, v_{q'} + \mu_{q'})) \\ & - \sum_{1 \leq t < q'} \frac{\theta(\mu) \theta(v_t - u_t + u_{t+1} - v_{t+1})}{\theta(v_t - u_t) \theta(u_{t+1} - v_{t+1})} \\ & \times \psi(e(v_1, \dots, v_t, u_{t+1}, \dots, u_{q'})) \psi(e(u_1 + \mu_1, \dots, u_t + \mu_t, v_{t+1} + \mu_{t+1}, \dots, v_{q'} + \mu_{q'})) \\ & - \frac{\theta(v_{q'} - u_{q'} + \mu)}{\theta(v_{q'} - u_{q'})} \psi(e(v_1, \dots, v_{q'})) \psi(e(u_1 + \mu_1, \dots, u_{q'} + \mu_{q'})) \\ & = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} x_{1-\alpha} x_{1-\beta} \\ & \times \left(\frac{\theta(v_1 - u_1 + \mu)}{\theta(v_1 - u_1)} w_\alpha(u_1, \dots, u_{q'}) w_\beta(u_1 + \mu_1, \dots, u_t + \mu_t, v_{t+1} + \mu_{t+1}, \dots, v_{q'} + \mu_{q'}) \right. \\ & - \sum_{1 \leq t < q'} \frac{\theta(\mu) \theta(v_t - u_t + u_{t+1} - v_{t+1})}{\theta(v_t - u_t) \theta(u_{t+1} - v_{t+1})} \\ & \times w_\alpha(v_1, \dots, v_t, u_{t+1}, \dots, u_{q'}) w_\beta(u_1 + \mu_1, \dots, u_t + \mu_t, v_{t+1} + \mu_{t+1}, \dots, v_{q'} + \mu_{q'}) \\ & \left. - \frac{\theta(v_{q'} - u_{q'} + \mu)}{\theta(v_{q'} - u_{q'})} w_\alpha(v_1, \dots, v_{q'}) w_\beta(u_1 + \mu_1, \dots, u_{q'} + \mu_{q'}) \right). \end{aligned}$$

Используя тождество (35) из приложения В и соотношения (18) в алгебре $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$, легко проверить, что это выражение равно 0.

Приложение А.

Тэта-функции одной переменной

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ – целочисленная решетка, порожденная 1 и $\tau \in \mathbb{C}$, причем $\text{Im } \tau > 0$. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{C}$. Обозначим через $\Theta_{n,c}(\Gamma)$ пространство целых функций одной переменной, удовлетворяющих соотношениям:

$$f(z+1) = f(z), \quad f(z+\tau) = (-1)^n e^{-2\pi i(nz-c)} f(z).$$

Известно [30], что $\dim \Theta_{n,c}(\Gamma) = n$, всякая функция $f \in \Theta_{n,c}(\Gamma)$ имеет ровно n нулей по модулю Γ (с учетом кратности) и сумма этих нулей равна c по модулю Γ . Пусть $\theta(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} (-1)^\alpha e^{2\pi i \left(\alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \eta \right)}$. Ясно, что $\theta(z) \in \Theta_{1,0}(\Gamma)$. Из сказанного вытекает, что $\theta(0) = 0$ и это единственный нуль по модулю Γ . Легко проверить, что $\theta(-z) = -e^{-2\pi i z} \theta(z)$. Кроме того, известно, что $\theta(z)$ следующим образом раскладывается в бесконечное произведение:

$$\theta(z) = \prod_{\alpha \geq 1} (1 - e^{2\pi i \alpha \eta}) \cdot (1 - e^{2\pi i z}) \cdot \prod_{\alpha \geq 1} (1 - e^{2\pi i (z + \alpha \eta)}) (1 - e^{2\pi i (\alpha \eta - z)}).$$

Определим линейные операторы $T_{\frac{1}{n}}$ и $T_{\frac{1}{n}\tau}$, действующие в пространстве функций одной переменной:

$$T_{\frac{1}{n}} f(z) = f\left(z + \frac{1}{n}\right), \quad T_{\frac{1}{n}\tau} f(z) = e^{2\pi i \left(z + \frac{1}{2n} - \frac{n-1}{2n} \tau \right)} f\left(z + \frac{1}{n} \tau\right).$$

Кроме того, $T_{\frac{1}{n}} T_{\frac{1}{n}\tau} = e^{\frac{2\pi i}{n}} T_{\frac{1}{n}\tau} T_{\frac{1}{n}}$. Легко проверить, что пространство $\Theta_{n, \frac{n-1}{2}}(\Gamma)$ инвариантно относительно операторов $T_{\frac{1}{n}}$ и $T_{\frac{1}{n}\tau}$. Ограничение этих операторов на пространство $\Theta_{n, \frac{n-1}{2}}(\Gamma)$ удовлетворяет соотношениям: $T_{\frac{1}{n}}^n = T_{\frac{1}{n}\tau}^n = 1$. Пусть $\tilde{\Gamma}_n$ — группа с образующими a, b, ε и определяющими соотношениями: $ab = \varepsilon ba$, $a\varepsilon = \varepsilon a$, $b\varepsilon = \varepsilon b$, $a^n = b^n = \varepsilon^n = e$. Группа $\tilde{\Gamma}_n$ есть центральное расширение группы $\Gamma_n = \Gamma/n\Gamma \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$: элемент ε порождает нормальную подгруппу $C_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и $\tilde{\Gamma}_n/C_n = \Gamma_n$. Формулы $a \mapsto T_{\frac{1}{n}}$, $b \mapsto T_{\frac{1}{n}\tau}$, $\varepsilon \mapsto$ умножение на $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ задают неприводимое представление группы $\tilde{\Gamma}_n$ в пространстве $\Theta_{n, \frac{n-1}{2}}(\Gamma)$. Выберем базис $\{\theta_\alpha; \alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ в пространстве $\Theta_{n, \frac{n-1}{2}}(\Gamma)$, в котором наши операторы действуют следующим образом: $T_{\frac{1}{n}} \theta_\alpha = e^{2\pi i \frac{\alpha}{n}} \theta_\alpha$; $T_{\frac{1}{n}\tau} \theta_\alpha = \theta_{\alpha+1}$. Ясно, что это можно сделать однозначно, с точностью до умножения на общую константу. Функции $\theta_\alpha(z)$ имеют вид:

$$\theta_\alpha(z) = \theta\left(z + \frac{\alpha}{n}\tau\right) \theta\left(z + \frac{1}{n} + \frac{\alpha}{n}\tau\right) \cdots \theta\left(z + \frac{n-1}{n} + \frac{\alpha}{n}\tau\right) e^{2\pi i \left(\alpha z + \frac{\alpha(\alpha-n)}{2n} \tau + \frac{\alpha}{2n} \right)}.$$

Легко проверить, что $\theta_\alpha(z) \in \Theta_{n, \frac{n-1}{2}}(\Gamma)$, $\theta_{\alpha+n}(z) = \theta_\alpha(z)$ и

$$\begin{aligned} \theta_\alpha\left(z + \frac{1}{n}\right) &= e^{2\pi i \frac{\alpha}{n}} \theta_\alpha(z), \\ \theta_\alpha\left(z + \frac{1}{n}\tau\right) &= e^{-2\pi i \left(z + \frac{1}{2n} - \frac{n-1}{2n} \tau \right)} \theta_{\alpha+1}(z). \end{aligned} \tag{26}$$

Ясно, что функции $\{\theta_\alpha(z - \frac{1}{n}c - \frac{n-1}{2n}); \alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ составляют базис в пространстве $\Theta_{n,c}(\Gamma)$.

Нам понадобятся некоторые тождества:

$$\theta(nz) = \frac{n\theta_0(z) \cdots \theta_{n-1}(z) e^{-2\pi i \frac{n(n-1)}{2} z}}{\theta_1(0) \cdots \theta_{n-1}(0) \theta\left(\frac{1}{n}\right) \cdots \theta\left(\frac{n-1}{n}\right)}. \tag{27}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, пользуясь соотношениями (26), что обе части равенства принадлежат пространству $\Theta_{n^2, \frac{n(n-1)}{2}\tau}(\Gamma)$. Кроме того, ясно, что нули обеих частей совпадают: это n^2 точек $\left\{\frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n}\tau; \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\right\}$ по модулю Γ . Значит, обе части равенства отличаются умножением на константу, которую можно вычислить, разделив (27) на $\theta(z)$ и переходя к пределу $z \rightarrow 0$.

Пусть $\theta_0, \theta_1, \theta_2 \in \Theta_{3,0}(\Gamma)$. Для $z, \eta \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ имеем:

$$\theta_0(\eta)\theta_0(z+\eta)\theta_0(z) + \theta_1(\eta)\theta_2(z+\eta)\theta_1(z) + \theta_2(\eta)\theta_1(z+\eta)\theta_2(z) = 0. \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\theta_\alpha(z+\eta)\theta_\beta(z) \in \Theta_{6,-3\eta}(\Gamma)$ как функция переменной z . Между этими 9 функциями в 6-мерном пространстве должно быть 3 линейных соотношения. Учитывая действие группы $\tilde{\Gamma}_3$, получаем, что соотношения должны иметь вид:

$$a(\eta)\theta_\alpha(z+\eta)\theta_\alpha(z) + b(\eta)\theta_{\alpha+1}(z+\eta)\theta_{\alpha+2}(z) + c(\eta)\theta_{\alpha+2}(z+\eta)\theta_{\alpha+1}(z) = 0.$$

В самом деле, всякое 3-мерное пространство соотношений, инвариантное относительно сдвигов $z \rightarrow z + \frac{1}{3}$ и $z \rightarrow z + \frac{1}{3}\tau$ (см. (26)), имеет такой вид, где a, b, c не зависят от α . Полагая $\alpha = 1, z = 0$, получим $\frac{c(\eta)}{a(\eta)} = \frac{\theta_1(\eta)}{\theta_0(\eta)}$. Полагая $\alpha = 2, z = 0$, получим $\frac{b(\eta)}{a(\eta)} = \frac{\theta_2(\eta)}{\theta_0(\eta)}$.

Пусть $\theta_\alpha \in \Theta_{n,c}(\Gamma)$. Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{\theta(y-z+nv-nu)}{\theta(y-z)\theta(nv-nu)}\theta_\alpha(y+u)\theta_\beta(z+v+\eta) + \frac{\theta(z-y+n\eta)}{\theta(z-y)\theta(n\eta)}\theta_\alpha(z+u)\theta_\beta(y+v+\eta) \\ &= \frac{1}{n}\theta\left(\frac{1}{n}\right) \cdots \theta\left(\frac{n-1}{n}\right) \sum_{r \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \frac{\theta_{\beta-\alpha}(v-u+\eta)}{\theta_r(\eta)\theta_{\beta-\alpha-r}(v-u)}\theta_{\beta-r}(y+v)\theta_{\alpha+r}(z+u+\eta). \end{aligned} \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это частный случай соотношения (31) (при $p = 1$), доказанного в приложении В.

Полагая в соотношении (29) $u = v + \eta$ и делая замену $y+v \rightarrow y, z+v \rightarrow z$, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\theta(z-y+n\eta)}{\theta(z-y)\theta(n\eta)}(\theta_\alpha(z+\eta)\theta_\beta(y+\eta) - \theta_\alpha(y+\eta)\theta_\beta(z+\eta)) \\ &= \frac{1}{n}\theta\left(\frac{1}{n}\right) \cdots \theta\left(\frac{n-1}{n}\right) \theta_{\beta-\alpha}(0) \sum_{r \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \frac{1}{\theta_r(\eta)\theta_{\beta-\alpha-r}(-\eta)}\theta_{\beta-r}(y)\theta_{\alpha+r}(z+2\eta). \end{aligned} \quad (30)$$

Приложение В.

Некоторые θ -функции нескольких переменных, ассоциированные со степенью эллиптической кривой

Пусть n и k — взаимно простые натуральные числа, причем $1 \leq k < n$. Разложим $\frac{n}{k}$ в цепную дробь следующего вида: $\frac{n}{k} = n_1 - \frac{1}{n_2 - \frac{1}{n_3 - \cdots - \frac{1}{n_p}}}$, где все $n_\alpha \geq 2$. Ясно, что

такое разложение существует и единственно. Обозначим через $d(m_1, \dots, m_q)$ определитель $(q \times q)$ -матрицы $(m_{\alpha, \beta})$, где $m_{\alpha\alpha} = m_\alpha$, $m_{\alpha, \alpha+1} = m_{\alpha+1, \alpha} = -1$, $m_{\alpha, \beta} = 0$ при $|\alpha - \beta| > 1$. При $q = 0$ положим $d(\emptyset) = 1$. Из элементарной теории цепных дробей вытекает, что $n = d(n_1, \dots, n_p)$, $k = d(n_2, \dots, n_p)$.

Пусть опять $\Gamma \subset \mathbb{C}$ – целочисленная решетка, порожденная 1 и τ , причем $\text{Im } \tau > 0$.

Обозначим через $\Theta_{n/k}(\Gamma)$ пространство целых функций p переменных, удовлетворяющих соотношениям:

$$\begin{aligned} f(z_1, \dots, z_\alpha + 1, \dots, z_p) &= f(z_1, \dots, z_p), \\ f(z_1, \dots, z_\alpha + \tau, \dots, z_p) &= (-1)^{n_\alpha} e^{-2\pi i(n_\alpha z_\alpha - z_{\alpha-1} - z_{\alpha+1} - (\delta_{1,\alpha} - 1)\tau)} f(z_1, \dots, z_p). \end{aligned}$$

Здесь $1 \leq \alpha \leq p$ и $z_0 = z_{p+1} = 0$, $\delta_{1,\alpha}$ – символ Кронекера. Таким образом, функции $f \in \Theta_{n/k}(\Gamma)$ периодичны по каждой переменной с периодом 1 и квазипериодичны с периодом τ . Из периодичности вытекает, что каждая функция из пространства $\Theta_{n/k}(\Gamma)$ раскладывается в ряд Фурье вида:

$$f(z_1, \dots, z_p) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{Z}} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} e^{2\pi i(\alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_p z_p)}.$$

Из квазипериодичности получаем систему линейных уравнений на коэффициенты:

$$a_{\alpha_1, \dots, \alpha_{\nu-1}-1, \alpha_\nu+n_\nu, \alpha_{\nu+1}-1, \dots, \alpha_p} = (-1)^{n_\alpha} e^{2\pi i(\alpha_\nu + \delta_{1,\alpha} - 1)\tau} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}.$$

Легко видеть, что эта система имеет $n = d(n_1, \dots, n_p)$ линейно независимых решений, каждое из которых (при $\text{Im } \tau > 0$; $n_1, \dots, n_p \geq 2$) определяет функцию из пространства $\Theta_{n/k}(\Gamma)$.

При $k = 1$ имеем пространство функций одной переменной $\Theta_n(\Gamma) = \Theta_{n,0}(\Gamma)$ из приложения А с базисом $\{w_\alpha(z) = \theta_\alpha(z + \frac{n-1}{2}), \alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$. Аналогичный базис можно построить в пространстве $\Theta_{n/k}(\Gamma)$ при произвольном k . Определим операторы $T_{\frac{1}{n}}$ и $T_{\frac{1}{n}\tau}$ в пространстве функций p переменных следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{\frac{1}{n}} f(z_1, \dots, z_p) &= f(z_1 + r_1, \dots, z_p + r_p), \\ T_{\frac{1}{n}\tau} f(z_1, \dots, z_p) &= e^{2\pi i(z_1 + \varphi)} f(z_1 + r_1\tau, \dots, z_p + r_p\tau). \end{aligned}$$

Здесь $r_\alpha = \frac{d(n_{\alpha+1}, \dots, n_p)}{d(n_1, \dots, n_p)}$, $\varphi \in \mathbb{C}$ – некоторая константа.

Легко видеть, что $T_{\frac{1}{n}} T_{\frac{1}{n}\tau} = e^{2\pi i \frac{k}{n}} T_{\frac{1}{n}\tau} T_{\frac{1}{n}}$. Как и в случае тэта-функций одной переменной, пространство $\Theta_{n/k}(\Gamma)$ инвариантно относительно операторов $T_{\frac{1}{n}}$ и $T_{\frac{1}{n}\tau}$ и ограничение этих операторов на пространство $\Theta_{n/k}(\Gamma)$ удовлетворяет соотношениям: $T_{\frac{1}{n}}^n = 1$; $T_{\frac{1}{n}\tau}^n = \mu$, где $\mu \in \mathbb{C}$. Выберем φ таким образом, чтобы $\mu = 1$; ясно, что это можно сделать с точностью до умножения $T_{\frac{1}{n}\tau}$ на корень из 1 степени n .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. В пространстве $\Theta_{n/k}(\Gamma)$ существует такой базис $\{w_\alpha(z_1, \dots, z_p); \alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$, что

$$T_{\frac{1}{n}} w_\alpha = e^{2\pi i \frac{k}{n} \alpha} w_\alpha, \quad T_{\frac{1}{n}\tau} w_\alpha = w_{\alpha+1}.$$

Этот базис определен однозначно, с точностью до умножения на общую константу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \Theta_{n/k}(\Gamma)$ – собственный вектор для оператора $T_{\frac{1}{n}}$ с собственным значением λ . Поскольку $T_{\frac{1}{n}}^n = 1$ на пространстве $\Theta_{n/k}(\Gamma)$, имеем $\lambda^n = 1$. Кроме того, $T_{\frac{1}{n}} T_{\frac{1}{n}\tau} f = e^{2\pi i \frac{k}{n}} T_{\frac{1}{n}\tau} T_{\frac{1}{n}} f = e^{2\pi i \frac{k}{n}} \lambda T_{\frac{1}{n}\tau} f$, значит, $T_{\frac{1}{n}\tau} f$ – опять собственный вектор с собственным значением $e^{2\pi i \frac{k}{n}} \lambda$. Поскольку n и k взаимно просты, $e^{2\pi i \frac{k}{n}}$ – примитивный корень из 1 степени n . Значит, векторы $\{T_{\frac{1}{n}\tau}^\alpha f; \alpha = 0, 1, \dots, n-1\}$ – собственные для оператора $T_{\frac{1}{n}}$ с различными собственными значениями, причем любой корень из 1 степени n является собственным значением для какого-то $T_{\frac{1}{n}\tau}^\alpha f$. Пусть w_0 таков, что $T_{\frac{1}{n}} w_0 = w_0$, определим $w_\alpha = T_{\frac{1}{n}\tau}^\alpha w_0$, ясно, что $T_{\frac{1}{n}} w_\alpha = e^{2\pi i \frac{k}{n}} w_\alpha$, $T_{\frac{1}{n}\tau} w_\alpha = w_{\alpha+1}$. Кроме того, $w_{\alpha+n} = w_\alpha$, так как $T_{\frac{1}{n}\tau}^n = 1$ на пространстве $\Theta_{n/k}(\Gamma)$.

Заметим, что, как и в случае тэта-функций одной переменной, группа $\tilde{\Gamma}_n$ неприводимо действует на пространстве $\Theta_{n/k}(\Gamma)$: $a \mapsto T_{\frac{1}{n}}$, $b \mapsto T_{\frac{1}{n}\tau}$, $\varepsilon \mapsto$ умножение на $e^{2\pi i \frac{k}{n}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть L – группа линейных автоморфизмов пространства функций p переменных вида

$$gf(z_1, \dots, z_p) = e^{2\pi i(\varphi_1 z_1 + \dots + \varphi_p z_p + \lambda)} f(z_1 + \psi_1, \dots, z_p + \psi_p)$$

для $g \in L$. Ясно, что L – группа Ли размерности $2p+1$. Пусть $L' \subset L$ – подгруппа преобразований, сохраняющих пространство $\Theta_{n/k}(\Gamma)$, т.е. $L' = \{g \in L; g(\Theta_{n/k}(\Gamma)) = \Theta_{n/k}(\Gamma)\}$. Пусть $L'' \subset L'$ состоит из элементов, оставляющих $\Theta_{n/k}(\Gamma)$ неподвижным, т.е. $L'' = \{g \in L'; gf = f \text{ для всех } f \in \Theta_{n/k}(\Gamma)\}$. Можно проверить, что факторгруппа L'/L'' порождена элементами $T_{\frac{1}{n}}$, $T_{\frac{1}{n}\tau}$ и умножениями на константу.

Мы будем использовать обозначение $w_\alpha^{n/k}(z_1, \dots, z_p)$, если из контекста не ясно, о каких тэта-функциях идет речь.

Нам понадобится следующее тождество, связывающее тэта-функции из пространств $\Theta_{1,0}(\Gamma)$, $\Theta_{n, \frac{n-1}{2}}(\Gamma)$ и $\Theta_{n/k}(\Gamma)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\theta(y_1 - z_1 + nv - nu)}{\theta(nv - nu)\theta(y_1 - z_1)} \\ & \times w_\alpha(y_1 + m_1 u, \dots, y_p + m_p u) w_\beta(z_1 + m_1 v + l_1, \dots, z_p + m_p v + l_p) \\ & + \sum_{1 \leq t \leq p-1} \frac{\theta(z_t - y_t + y_{t+1} - z_{t+1})}{\theta(z_t - y_t)\theta(y_{t+1} - z_{t+1})} \\ & \times w_\alpha(z_1 + m_1 u, \dots, z_t + m_t u, y_{t+1} + m_{t+1} u, \dots, y_p + m_p u) \\ & \times w_\beta(y_1 + m_1 v + l_1, \dots, y_t + m_t v + l_t, z_{t+1} + m_{t+1} v + l_{t+1}, \dots, z_p + m_p v + l_p) \\ & + \frac{\theta(z_p - y_p + n\eta)}{\theta(z_p - y_p)\theta(n\eta)} w_\alpha(z_1 + m_1 u, \dots, z_p + m_p u) \\ & \times w_\beta(y_1 + m_1 v + l_1, \dots, y_p + m_p v + l_p) \\ & = \frac{1}{n} \theta\left(\frac{1}{n}\right) \dots \theta\left(\frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{r \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \frac{\theta_{\beta-\alpha+r(k-1)}(v-u+\eta)}{\theta_{rk}(\eta)\theta_{\beta-\alpha-r}(v-u)} w_{\beta-r}(y_1+m_1v, \dots, y_p+m_pv) \\
& \times w_{\alpha+r}(z_1+m_1u+l_1, \dots, z_p+m_pu+l_p). \tag{31}
\end{aligned}$$

Здесь $m_\alpha = d(n_{\alpha+1}, \dots, n_p)\eta$, $l_\alpha = d(n_1, \dots, n_{\alpha-1})\eta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\varphi_{\alpha,\beta}(\eta, u, v, y_1, \dots, y_p, z_1, \dots, z_p)$ разность между правой и левой частями формулы (31). Вычисление показывает, что эта функция удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\alpha,\beta}(\eta, \dots, y_\alpha+1, \dots, z_p) &= \varphi_{\alpha,\beta}(\eta, \dots, z_p), \\
\varphi_{\alpha,\beta}(\eta, \dots, y_\alpha+\tau, \dots, z_p) &= -e^{-2\pi i(n_\alpha y_\alpha - y_{\alpha-1} - y_{\alpha+1} + \delta_{\alpha,1}v)} \varphi_{\alpha,\beta}(\eta, \dots, z_p), \\
\varphi_{\alpha,\beta}(\eta, \dots, z_\alpha+1, \dots, z_p) &= \varphi_{\alpha,\beta}(\eta, \dots, z_p), \\
\varphi_{\alpha,\beta}(\eta, \dots, z_\alpha+\tau, \dots, z_p) &= -e^{-2\pi i(n_\alpha z_\alpha - z_{\alpha-1} - z_{\alpha+1} + \delta_{\alpha,1}u + \delta_{\alpha,p}\eta)} \varphi_{\alpha,\beta}(\eta, \dots, z_p). \tag{32}
\end{aligned}$$

Здесь $y_0 = y_{p+1} = z_0 = z_{p+1} = 0$, $\delta_{\alpha,\beta}$ – символ Кронекера. Кроме того, вычисление показывает, что на дивизорах $nv - nu \in \Gamma$, $n\eta \in \Gamma$, $y_1 - z_1 \in \Gamma$, $\dots$, $y_p - z_p \in \Gamma$ нет полюсов, так что функция $\varphi_{\alpha,\beta}$ всюду голоморфна на $\mathbb{C}^{2p+3}$. Но ясно, что базис в пространстве голоморфных функций переменных $y_1, \dots, y_p, z_1, \dots, z_p$ с условиями (32) составляют функции

$$\{w_\lambda(y_1+m_1v, \dots, y_p+m_pv)w_\nu(z_1+m_1u+l_1, \dots, z_p+m_pu+l_p); \lambda, \nu \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}.$$

Поэтому функция $\varphi_{\alpha,\beta}$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\alpha,\beta}(\eta, u, v, y_1, \dots, z_p) &= \sum_{\lambda, \nu \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \psi_{\lambda,\nu}(\eta, u, v) w_\lambda(y_1+m_1v, \dots, y_p+m_pv) \\
&\times w_\nu(z_1+m_1u+l_1, \dots, z_p+m_pu+l_p). \tag{33}
\end{aligned}$$

Здесь функции $\psi_{\lambda,\nu}(\eta, u, v)$ голоморфны и удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned}
\psi_{\lambda,\nu}(\eta+1, u, v) &= \psi_{\lambda,\nu}(\eta, u+1, v) = \psi_{\lambda,\nu}(\eta, u, v+1) = \psi_{\lambda,\nu}(\eta, u, v), \\
\psi_{\lambda,\nu}(\eta+\tau, u, v) &= e^{-2\pi i n(v-u)} \psi_{\lambda,\nu}(\eta, u, v), \\
\psi_{\lambda,\nu}(\eta, u+\tau, v) &= e^{2\pi i n\eta} \psi_{\lambda,\nu}(\eta, u, v), \\
\psi_{\lambda,\nu}(\eta, u, v+\tau) &= e^{-2\pi i n\eta} \psi_{\lambda,\nu}(\eta, u, v). \tag{34}
\end{aligned}$$

Эти соотношения проверяются вычислением: надо сравнить мультипликаторы при сдвигах на 1 и τ в формулах (32) и (33).

Но всякая голоморфная функция переменных η, u и v , удовлетворяющая соотношениям (34), равна 0. В самом деле, из периодичности вытекает разложение в ряд Фурье:

$$\psi_{\lambda,\nu}(\eta, u, v) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}} a_{\lambda,\nu,\alpha,\beta,\gamma} e^{2\pi i(\alpha\eta + \beta u + \gamma v)}.$$

Из квазипериодичности далее следует, что коэффициенты $a_{\lambda,\nu,\alpha,\beta,\gamma} = 0$.

Полагая в тождестве (31) $u = v + \eta$ и делая замену $y_1 \rightarrow y_1 - m_1 v, z_1 \rightarrow z_1 - m_1 v, \dots, y_p \rightarrow y_p - m_p v, z_p \rightarrow z_p - m_p v$, получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{\theta(y_1 - z_1 - n\eta)}{\theta(-n\eta)\theta(y_1 - z_1)} w_\alpha(y_1 + m_1\eta, \dots, y_p + m_p\eta) \theta_\beta(z_1 + l_1, \dots, z_p + l_p) \\
& + \sum_{1 \leq t < p} \frac{\theta(z_t - y_t + y_{t+1} - z_{t+1})}{\theta(z_t - y_t)\theta(y_{t+1} - z_{t+1})} \\
& \times w_\alpha(z_1 + m_1\eta, \dots, z_t + m_t\eta, y_{t+1} + m_{t+1}\eta, \dots, y_p + m_p\eta) \\
& \times w_\beta(y_1 + l_1, \dots, y_t + l_t, z_{t+1} + l_{t+1}, \dots, z_p + l_p) \\
& + \frac{\theta(z_p - y_p + n\eta)}{\theta(z_p - y_p)\theta(n\eta)} w_\alpha(z_1 + m_1\eta, \dots, z_p + m_p\eta) w_\beta(y_1 + l_1, \dots, y_p + l_p) \\
& = \frac{1}{n} \theta\left(\frac{1}{n}\right) \dots \theta\left(\frac{n-1}{n}\right) \sum_{r \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \frac{\theta_{\beta-\alpha+r(k-1)}(0)}{\theta_{rk}(\eta)\theta_{\beta-\alpha-r}(-\eta)} \\
& \times w_{\beta-r}(y_1, \dots, y_p) w_{\alpha+r}(z_1 + m_1\eta + l_1, \dots, z_p + m_p\eta + l_p). \tag{35}
\end{aligned}$$

Приложение С. Сопряженность пространств $\Theta_{n/k}(\Gamma)$ и $\Theta_{n/n-k}(\Gamma)$

Мы построим канонический элемент $\Delta_{n,k} \in \Theta_{n/k}(\Gamma) \otimes \Theta_{n/n-k}(\Gamma)$, осуществляющий двойственность между этими пространствами (см. (36)).

Предложение 16. Пусть $\frac{n}{k} = n_1 - \frac{1}{n_2 - \dots - \frac{1}{n_p}}$, $\frac{n}{n-k} = n'_1 - \frac{1}{n'_2 - \dots - \frac{1}{n'_{p'}}}$ — разложения в цепные дроби, причем $n_\alpha \geq 2$, $n'_\beta \geq 2$ при $1 \leq \alpha \leq p$, $1 \leq \beta \leq p'$. Здесь p и p' — длины цепных дробей. Тогда $p' = n_1 + \dots + n_p - 2p + 1$, $n'_1 + \dots + n'_{p'} = 2(n_1 + \dots + n_p) - 3p + 1$. Кроме того, $n'_1 + \dots + n'_\alpha = 2\alpha + \beta$ при $n_1 + \dots + n_\beta - 2\beta + 1 \leq \alpha \leq n_1 + \dots + n_{\beta+1} - 2\beta - 2$. Иначе говоря, диаграммы Юнга для разбиений $(n_1 - 1, n_1 + n_2 - 3, \dots, n_1 + \dots + n_\alpha - 2\alpha + 1, \dots)$ и $(n'_1 - 1, n'_1 + n'_2 - 3, \dots, n'_1 + \dots + n'_\beta - 2\beta + 1, \dots)$ двойственны друг другу.

Замечание 2. При $k = 1, p = 1, n_1 = n$ имеем $p' = n - 1$ и $n'_1 = \dots = n'_{n-1} = 2$. При $p > 1$, если $n_2, \dots, n_{p-1} \geq 3$, то последовательность $(n'_1, \dots, n'_{p'})$ имеет вид $(2^{(n_1-2)}, 3, 2^{(n_2-3)}, 3, \dots, 3, 2^{(n_{p-1}-3)}, 3, 2^{(n_p-2)})$. Здесь $2^{(t)}$ при $t \geq 0$ означает последовательность из t двоек. Эта формула верна и без условия $n_2, \dots, n_p \geq 3$, если принять следующее соглашение: последовательность $(m_1, 2^{(-1)}, m_2)$ имеет длину 1 и равна $(m_1 + m_2 - 2)$. Это правило применяется последовательно для всех $n_\alpha = 2$ при $2 \leq \alpha \leq p - 1$.

Доказательство проводится индукцией по $\min(p, p')$. При $p = 1$ надо доказать, что $\frac{n}{n-1} = 2 - \frac{1}{2 - \dots - \frac{1}{2}}$ — длины $n - 1$. При $p, p' > 1$ пусть, например, $n_1 > 2$. Имеем $\frac{k}{d(n_3, \dots, n_p)} = n_2 - \frac{1}{n_3 - \dots - \frac{1}{n_p}}$. По предположению имеем: $\frac{k}{k - d(n_3, \dots, n_p)} = n'_{n_1-1} - \frac{1}{n'_{n_1} - \frac{1}{n'_{n_1+1} - \dots - \frac{1}{n'_{p'}}}}$, причем последовательность $(n'_1, \dots, n'_{n_1-2})$ есть $(2^{(n_1-2)})$.

Далее проверяется, что $n'_1 - \frac{1}{n'_2 - \dots - \frac{1}{n'_{p'}}} = \frac{n}{n-k}$. При этом используется, что

$d(n_1, \dots, n_p) = n$, $d(n_2, \dots, n_p) = k$, $\frac{d(n_1, \dots, n_p)}{d(n_2, \dots, n_p)} = n_1 - \frac{1}{n_2 - \dots - \frac{1}{n_p}}$ и $d(n_1, \dots, n_p) = n_1 d(n_2, \dots, n_p) - d(n_3, \dots, n_p)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17. Пусть функция $\Delta_{n,k}(z_1, \dots, z_p; z'_1, \dots, z'_{p'})$ $p + p'$ переменных $z_1, \dots, z_p, z'_1, \dots, z'_{p'}$ определена формулой:

$$\begin{aligned} \Delta_{n,k}(z_1, \dots, z_p, z'_1, \dots, z'_{p'}) &= e^{2\pi i z'_1} \theta(z_1 - z'_1) \theta(z_p + z'_{p'}) \\ &\times \prod_{1 \leq \alpha \leq p'-1} \theta(z'_\alpha - z'_{\alpha+1} + z_{n'_1 + \dots + n'_\alpha - 2\alpha + 1}) \\ &\times \prod_{1 \leq \beta \leq p-1} \theta(z_\beta - z_{\beta+1} + z'_{n_1 + \dots + n_\beta - 2\beta + 1}). \end{aligned}$$

Эта функция удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \Delta_{n,k}(z_1, \dots, z_\alpha + 1, \dots, z'_{p'}) &= \Delta_{n,k}(z_1, \dots, z'_\beta + 1, \dots, z'_{p'}) = \Delta_{n,k}(z_1, \dots, z'_{p'}), \\ \Delta_{n,k}(z_1, \dots, z_\alpha + \tau, \dots, z'_{p'}) &= (-1)^{n_\alpha} e^{-2\pi i(n_\alpha z_\alpha - z_{\alpha-1} - z_{\alpha+1} - (\delta_{\alpha,1} - 1)\tau)} \\ &\times \Delta_{n,k}(z_1, \dots, z'_{p'}), \\ \Delta_{n,k}(z_1, \dots, z'_\beta + \tau, \dots, z'_{p'}) &= (-1)^{n'_\beta} e^{-2\pi i(n'_\beta z'_\beta - z'_{\beta-1} - z'_{\beta+1} - (\delta_{\beta,1} - 1)\tau)} \\ &\times \Delta_{n,k}(z_1, \dots, z'_{p'}). \end{aligned}$$

Здесь $z_0 = z_{p+1} = z'_0 = z'_{p'+1} = 0$, $\delta_{\alpha,1}$ — символ Кронекера.

Доказательство непосредственно вытекает из нашего описания двойственности между последовательностями $(n_1, \dots, n_p)$ и $(n'_1, \dots, n'_{p'})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18.

$$\Delta_{n,k}(z_1, \dots, z_p; z'_1, \dots, z'_{p'}) = c_{n,k} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} w_\alpha^{n/k}(z_1, \dots, z_p) w_{1-\alpha}^{n/n-k}(z'_1, \dots, z'_{p'}). \quad (36)$$

Здесь $c_{n,k} \in \mathbb{C}$ — некоторая константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предыдущего предложения вытекает, что $\Delta_{n,k}$ как функция переменных $z_1, \dots, z_p$ лежит в пространстве $\Theta_{n/k}(\Gamma)$. Аналогично, как функция переменных $z'_1, \dots, z'_{p'}$, она лежит в пространстве $\Theta_{n/n-k}(\Gamma)$. Поэтому

$$\Delta_{n,k}(z_1, \dots, z_p; z'_1, \dots, z'_{p'}) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \lambda_{\alpha, \beta} w_\alpha^{n/k}(z_1, \dots, z_p) w_\beta^{n/n-k}(z'_1, \dots, z'_{p'}).$$

Но, как легко проверить,

$$\Delta_{n,k}(z_1 + r_1, \dots, z_p + r_p; z'_1 + r'_1, \dots, z'_{p'} + r'_{p'}) = e^{\frac{2\pi i}{n}} \Delta_{n,k}(z_1, \dots, z'_{p'}),$$

где $r_\alpha = \frac{d(n_1, \dots, n_{\alpha-1})}{n}$, $r'_\beta = \frac{d(n'_1, \dots, n'_{\beta-1})}{n}$. Отсюда $\lambda_{\alpha, \beta} = 0$ при $\alpha + \beta \not\equiv 1 \pmod n$ (так как $w_\alpha(z_1 + r_1, \dots, z_p + r_p) = e^{2\pi i \frac{\alpha}{n}} w_\alpha(z_1, \dots, z_p)$ и $w_\beta(z'_1 + r'_1, \dots, z'_{p'} + r'_{p'}) = e^{2\pi i \frac{\beta}{n}} w_\beta(z'_1, \dots, z'_{p'})$). Значит, $\lambda_{\alpha, \beta} = \lambda_\alpha \delta_{\alpha+\beta, 1}$. Аналогично:

$$\begin{aligned} \Delta_{n,k}(z_1 + r_1\tau, \dots, z_p + r_p\tau; z'_1 + r'_1\tau, \dots, z'_{p'} + r'_{p'}\tau) \\ = e^{2\pi i \left(\frac{1}{n}\tau - z_p - z'_{p'}\right)} \Delta_{n,k}(z_1, \dots, z'_{p'}). \end{aligned}$$

Отсюда $\lambda_\alpha = \lambda_{\alpha+1}$, т.е. λ_α не зависит от α .

Приложение D

1. Интегрируемые системы, квантовые группы и R -матрицы. Один из основных методов при изучении точно решаемых моделей [6] в квантовой и статистической физике – это метод обратной задачи (см. [45]). Этот метод приводит к проблеме изучения представлений алгебры матриц монодромии, т.е. к изучению мероморфных матричных функций $L(u)$, удовлетворяющих соотношению:

$$R(u-v)L^1(u)L^2(v) = L^2(v)L^1(u)R(u-v). \quad (37)$$

Здесь $R(u)$ – некоторое фиксированное решение уравнения Янга–Бакстера в классе мероморфных матричнозначных функций

$$R^{12}(u-v)R^{13}(u)R^{23}(v) = R^{23}(v)R^{13}(u)R^{12}(u-v). \quad (38)$$

Заметим, что $R(u)$ принимает значения в $(n^2 \times n^2)$ -матрицах с фиксированным разложением: $\text{Mat}_{n^2} = \text{Mat}_n \otimes \text{Mat}_n$. Мы используем обычные обозначения: $L^1 = L \otimes 1$, $L^2 = 1 \otimes L$, $R^{12} = R \otimes 1$ и т.д. (см. [45]).

В работе [45] Складин изучает решения уравнения (37) для простейшего эллиптического решения уравнения (38): так называемой R -матрицы Бакстера. Она имеет вид:

$$R(u) = 1 + \sum_{\alpha=1}^3 W_{\alpha}(u) \sigma_{\alpha} \otimes \sigma_{\alpha},$$

где $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ – матрицы Паули, а коэффициенты $W_{\alpha}(u)$ выражаются через эллиптические функции Якоби следующим образом:

$$\begin{aligned} W_1(u) &= \frac{\text{sn}(i\eta, k)}{\text{sn}(u + i\eta, k)}, & W_2(u) &= \frac{\text{dn}}{\text{sn}}(u + i\eta, k) \frac{\text{sn}}{\text{dn}}(i\eta, k), \\ W_3(u) &= \frac{\text{cn}}{\text{sn}}(u + i\eta, k) \frac{\text{sn}}{\text{cn}}(i\eta, k). \end{aligned}$$

Функции $W_{\alpha}(u)$ униформизируют эллиптическую кривую $\frac{w_{\alpha}^2 - w_{\beta}^2}{w_{\gamma}^2 - 1} = J_{\alpha, \beta}$, где $J_{\alpha, \beta}$ не зависят от u и удовлетворяют соотношению: $J_{12} + J_{23} + J_{31} + J_{12}J_{23}J_{31} = 0$. Здесь α, β, γ попарно различны, $J_{\beta, \alpha} = -J_{\alpha, \beta}$.

Заметим, что эта эллиптическая кривая является полным пересечением 2 квадрик, например, $w_1^2 - w_2^2 = J_{12}(w_3^2 - 1)$ и $w_2^2 - w_3^2 = J_{23}(w_1^2 - 1)$.

Складин выяснил, что уравнение (37) для R -матрицы Бакстера имеет решение вида: $L(u) = S_0 + \sum_{\alpha=1}^3 W_{\alpha}(u) S_{\alpha}$, где S_0, S_{α} – матрицы, не зависящие от u и удовлетворяющие соотношениям:

$$\begin{aligned} [S_{\alpha}, S_0]_{-} &= -i J_{\beta\gamma} [S_{\beta}, S_{\gamma}]_{+}, \\ [S_{\alpha}, S_{\beta}]_{-} &= i [S_0, S_{\gamma}]_{+}, \end{aligned} \quad (39)$$

где $[a, b]_{\pm} = ab \pm ba$.

Далее Складина изучает алгебру с образующими S_0, S_α и соотношениями (39), которую он обозначает $\mathcal{F}_{\eta,k}$. Основное предположение об этой алгебре состоит в том, что она удовлетворяет условию ПБВ. Кроме того, Складина находит квадратичные центральные элементы алгебры $\mathcal{F}_{\eta,k}$ и конечномерные представления алгебры $\mathcal{F}_{\eta,k}$ разностными операторами в некоторых функциональных пространствах (см. [46]).

В наших обозначениях алгебра Складина $\mathcal{F}_{\eta,k}$ — это алгебра $Q_4(\mathcal{E}, \eta)$, где $\mathcal{E}$ — эллиптическая кривая, заданная функциями $W_\alpha(u)$, т.е. полное пересечение 2 квадратик в $\mathbb{C}^3$.

Уравнение Янга–Бакстера имеет другие эллиптические решения, обобщающие решение Бакстера (см. [7]). Результат [7] может быть описан следующим образом: для любой пары натуральных чисел n и k таких, что $1 \leq k < n$, и взаимно простых, существует семейство решений $R_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)(u)$ уравнения (38). Здесь опять $\mathcal{E}$ — эллиптическая кривая, $\eta \in \mathcal{E}$. Решение Бакстера получается при $n = 2, k = 1$.

Согласно [10] результат Складина обобщается для произвольного решения $R_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)(u)$. В наших обозначениях результаты [10] выглядят так: существует гомоморфизм алгебры матриц монодромии для R -матрицы $R_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ в алгебру $Q_{n^2, nk-1}(\mathcal{E}, \eta)$. Соответственно алгебра $Q_{n^2, nk-1}(\mathcal{E}, \eta)$ является деформацией проективизации алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$. Более того, существует гомоморфизм алгебры матриц монодромии в алгебру $Q_{dn^2, dnk-1}(\mathcal{E}, \eta)$ для любого $d \in \mathbb{N}$. Можно предположить, что всякое конечномерное представление алгебры матриц монодромии получается из представления алгебр $Q_{dn^2, dnk-1}(\mathcal{E}, \eta)$.

Другая связь между эллиптическими решениями уравнения Янга–Бакстера и эллиптическими алгебрами вытекает из результатов [10]. Умножение в алгебре $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ задается так называемыми проекторами Юнга $S^\alpha V \otimes S^\beta V \rightarrow S^{\alpha+\beta} V$, отвечающими $R_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)(u)$ (см. [10]). При этом $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta) = \sum_\alpha S^\alpha V$.

Заметим еще, что изучение алгебр $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ и их представлений позволило глубже понять структуру R -матрицы $R_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)(u)$ и соответствующих алгебраических объектов (алгебра Замолотчикова и алгебра матриц монодромии). См. об этом [33].

2. Деформационное квантование. Пусть M — многообразие (C^∞ , аналитическое, алгебраическое, ...), $\mathcal{F}(M)$ — алгебра функций на нем. На “физическом” языке M — это пространство состояний системы, $\mathcal{F}(M)$ — алгебра наблюдаемых. В работе [5] предложен следующий подход к квантованию: квантовая алгебра наблюдаемых как линейное пространство совпадает с $\mathcal{F}(M)$, но умножение деформируется и перестает быть коммутативным (оставаясь ассоциативным). При этом умножение зависит от параметра деформации $\hbar$ (постоянной Планка). При $\hbar = 0$ имеем обычное коммутативное умножение. Поскольку постоянная Планка мала, мы не замечаем некоммутативности наблюдаемых в классической механике. Раскладывая умножение в ряд по $\hbar$, получим: $f * g = fg + \{f, g\}\hbar + o(\hbar)$. Операция $\{\cdot, \cdot\}: \mathcal{F}(M) \otimes \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ билинейна, и калибровочными преобразованиями ее можно сделать антикоммутативной: $\{f, g\} = -\{g, f\}$. Кроме того, из ассоциативности умножения $*$ вытекает: $\{f, gh\} = \{fg\}h + \{f, h\}g$ (правило Лейбница) и $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$ (тождество Якоби). Правило Лейбница означает, что $\{f, g\} = \langle w, df \wedge dg \rangle$, где w — бивекторное поле на M , тождество Якоби означает, что $[w, w] = 0$. Итак, всякое квантование задает пуассонову структуру w (или $\{\cdot, \cdot\}$) на многообразии M . Возникает обратная задача: по многообразию M с пуассоновой структурой (пуассонову многообразию) построить квантование $*$. Эта задача была решена в [26] на формальном

уровне. Именно, на пуассоновом многообразии M построены бидифференциальные операторы B_n ($n \geq 2$) такие, что формальный ряд

$$f * g = fg + \{f, g\}\hbar + \sum_{n \geq 2} B_n(f, g)\hbar^n \quad (40)$$

удовлетворяет условию $(f * g) * h = f * (g * h)$. При этом операторы B_n строятся по $\{\cdot, \cdot\}$ явной формулой. Таким образом, задача формального квантования была решена, но остался вопрос о сходимости ряда (40) и о его идентификации. Эта задача кажется очень трудной. Пусть, например, $M = \mathbb{C}^n$, $\mathcal{F}(M) = S^*(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ и скобка Пуассона квадратична, т.е. имеет вид: $\{x_i, x_j\} = \sum_{\alpha, \beta} c_{ij}^{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$, где $c_{ij}^{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$ симметричны по α, β и антисимметричны по i, j . Тогда умножение $*$ должно быть однородно, т.е. $S^\alpha(\mathbb{C}^n) * S^\beta(\mathbb{C}^n) \subset S^{\alpha+\beta}(\mathbb{C}^n)$. Поэтому структурные константы умножения $*$ в базисе $\{x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}; \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ согласно (40) оказываются формальными рядами по $\hbar$, которые не поддаются явному вычислению даже в простейшем случае $n = 2$, $\{x_1, x_2\} = \alpha x_1 x_2$. В этом случае естественно предположить, что квантовая алгебра должна задаваться соотношением $x_1 x_2 = e^{-\alpha \hbar} x_2 x_1$. С другой стороны, введенные выше алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ являются примерами квантования $M = \mathbb{C}^n$, причем η играет роль постоянной Планка, поскольку $Q_{n,k}(\mathcal{E}, 0) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. При этом структурные константы алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ оказываются эллиптическими функциями от η . Существуют также рациональные и тригонометрические пределы алгебр $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$, в которых структурные константы есть рациональные (тригонометрические) функции от η (см. [32]).

3. Многообразие модулей. Пусть G – полупростая группа Ли, $P \subset G$ – параболическая подгруппа. Пусть $\mathcal{M}(\mathcal{E}, P)$ – многообразие модулей голоморфных P -расслоений на эллиптической кривой $\mathcal{E}$ [4]. Согласно [20], на каждой компоненте связности пространства $\mathcal{M}(\mathcal{E}, P)$ существует естественная пуассонова структура. Основное свойство этой структуры такое: прообразы естественного отображения $\mathcal{M}(\mathcal{E}, P) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{E}, G)$, отвечающего забыванию P -структуры, являются ее симплектическими листами. Возникает задача квантования пуассонова многообразия $\mathcal{M}(\mathcal{E}, P)$. Ее решение позволило бы установить связь между естественной алгебро-геометрической задачей изучения P -расслоений (и соответствующих G -расслоений) и задачей изучения представлений квантовой алгебры функций на $\mathcal{M}(\mathcal{E}, P)$, поскольку представления отвечают симплектическим листам.

В работах [38], [22] эти квантовые алгебры построены для случая, когда $P = B$ – борелевская подгруппа произвольной группы G . В работе [21] построены квантовые алгебры для случая $G = GL_m$, причем P – произвольная параболическая подгруппа. При этом алгебра $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$ отвечает случаю $G = GL_2$, а алгебра $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ – случаю $G = GL_{k+1}$, причем P состоит из блочных верхнетреугольных матриц вида

$$\begin{matrix} & k & & \\ & \left(\begin{array}{cc} * & * \\ 0 & * \end{array} \right) & & \\ 1 & & k & 1 \end{matrix}$$

4. Некоммутативная алгебраическая геометрия. Одна из основных идей алгебраической геометрии состоит в изучении геометрии многообразия через алгебраические свойства кольца функций на нем. Некоммутативная алгебраическая геометрия переносит эти методы и геометрическую интуицию на подходящий класс некоммутативных колец. Часто (но не всегда) они оказываются деформацией коммутативных. В работах [51], [48] развита некоммутативная алгебраическая геометрия в малых размерностях. С этой точки зрения алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ дают примеры некоммутативных векторных пространств. Известны также аналогичные примеры некоммутативных грассманианов и других многообразий [19], [22], [49].

5. Когомологии алгебр. Когомологические свойства квадратичных алгебр изучаются в [29], [41]–[44], [50]. Алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$ при общем η являются примерами кошулевых алгебр. Для $k = 1$ это легко доказать, используя конструкцию свободного модуля из §2.6. Конструкции двойственных алгебр $Q_{n,k}^!(\mathcal{E}, \eta)$ даны в [36].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Artin, W. Schelter. Graded algebras of global dimension 3 // *Adv. Math.* 1987. V. 66. P. 171–216.
- [2] M. Artin, J. Tate, M. Van den Bergh. Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves // *The Grothendieck Festschrift. I.* Boston: Birkhäuser, 1990. P. 33–85. (*Progr. Math.* V. 86.)
- [3] M. Artin, J. Tate, M. Van den Bergh. Modules over regular algebras of dimension 3 // *Invent. Math.* 1991. V. 106. №2. P. 335–388.
- [4] M. F. Atiyah. Vector bundles over an elliptic curve // *Proc. London Math. Soc.* (3). 1957. V. 7. P. 414–452.
- [5] F. Bayen, M. Flato, C. Frønsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer. Deformation theory and quantization. I. Deformations of symplectic structures // *Ann. Physics.* 1978. V. 111. №1. P. 61–110.
- [6] Р. Бакстер. Точно решаемые модели в статистической механике. М.: Мир, 1985.
- [7] A. Belavin. Discrete groups and integrability of quantum systems // *Funct. Anal. Appl.* 1980. V. 14. P. 18–26.
- [8] G. Bergman. The diamond lemma for ring theory // *Adv. Math.* 1978. V. 29. №2. P. 178–218.
- [9] H. W. Braden, A. Gorsky, A. Odesskii, V. Rubtsov. Double-elliptic dynamical systems from generalized Mukai–Sklyanin algebras // *Nuclear Phys. B.* 2002. V. 633. №3. P. 414–442.
- [10] И. В. Чередник. Об R -матричном квантовании группы токов // Теоретико-групповые методы в физике. Труды Юрмальской конференции, май 1985. Т. 2. М.: Наука, 1980. С. 218–232.
- [11] A. Connes, M. Dubois-Violette. Noncommutative finite-dimensional manifolds. I: Spherical manifolds and related examples // *math.QA/0107070*.
- [12] В. Г. Дринфельд. О квадратичных коммутационных соотношениях в квазиклассическом случае. // Математическая физика, функциональный анализ. Сб. научн. трудов. Киев: Наукова думка, 1986. С. 24–34.
- [13] В. Г. Дринфельд. Новая реализация янгианов и квантованных аффинных алгебр // Докл. АН СССР. 1987. Т. 269. №1. С. 13–17.
- [14] B. Enriquez, V. N. Rubtsov. Quantum groups in higher genus and Drinfeld's new realizations method ($\mathfrak{sl}_2$ case) // *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4). 1997. V. 30. №6. P. 821–846.
- [15] H. Ewen, O. Ogievetsky. Classification of quantum matrix groups in 3 dimensions // Preprint MPI-Ph/94-1993.
- [16] B. Feigin, E. Frenkel. Quantum $\mathcal{W}$ -algebras and elliptic algebras // *Comm. Math. Phys.* 1996. V. 178. №3. P. 653–678.

- [17] B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, A. Odesskii, Ya. Pugai. Algebra of screening operators for the deformed W_n algebra // *Comm. Math. Phys.* 1998. V. 191. №3. P. 501–541.
- [18] B. Feigin, A. Odesskij. A family of elliptic algebras // *Internat. Math. Res. Notices.* 1997. №11. P. 531–539.
- [19] B. L. Feigin, A. V. Odesskij. Coordinate ring of the quantum Grassmanian and intertwiners for the representations of Sklyanin algebras // *Topics in Quantum Groups and Finite-Type Invariants* / ed. B. Feigin et al. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. P. 55–64. (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. V. 185.)
- [20] B. L. Feigin, A. V. Odesskij. Vector bundles on an elliptic curve and Sklyanin algebras // *Topics in Quantum Groups and Finite-Type Invariants* / ed. B. Feigin et al. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. P. 65–84. (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. V. 185.)
- [21] B. L. Feigin, A. V. Odesskij. Functional realization of some elliptic Hamiltonian structure and bozonization of the corresponding quantum algebras // *Integrable Structures of Exactly Solvable Two-Dimensional Models of Quantum Field Theory* / ed. S. Pakuliak et al. Dordrecht: Kluwer, 2001. P. 109–122. (NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem. V. 35.)
- [22] B. L. Feigin, A. V. Odesskij. Quantized moduli spaces of the bundles on the elliptic curve and their applications // *Integrable Structures of Exactly Solvable Two-Dimensional Models of Quantum Field Theory* / ed. S. Pakuliak et al. Dordrecht: Kluwer, 2001. P. 123–137. (NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem. V. 35.)
- [23] G. Felder. Elliptic quantum groups // *Proceedings of the XIth International Congress on Mathematical Physics* (Paris, 1994). Cambridge, MA: International Press, 1995. P. 211–218.
- [24] G. Felder, V. Pasquier. A simple construction of elliptic R -matrices // *Lett. Math. Phys.* 1994. V. 32. P. 167–171.
- [25] M. Jimbo. Topics from Representations of $U_q(\mathfrak{g})$. An Introductory Guide to Physicists // *Quantum Group and Quantum Integrable Systems*. River Edge: World Scientific, 1992. P. 1–61.
- [26] M. Kontsevich. Deformation quantization of Poisson manifolds. I // [math/9709180](#).
- [27] M. Kontsevich, A. Rosenberg. Noncommutative smooth spaces // *The Gelfand Mathematical Seminar, 1996–1999* / ed. I. M. Gelfand et al. Boston: Birkhäuser, 2000. P. 85–108.
- [28] И. Кричевер, А. Забродин. Спиновое обобщение модели Рейсена-Шнайдера, неабелева двумеризованная цепочка Toda и представления алгебры Складина // *УМН*. 1995. Т. 50. №6. С. 3–56.
- [29] Yu. I. Manin. Some remarks on Koszul algebras and quantum groups // *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*. 1987. V. 37. №4. P. 191–205.
- [30] Д. Мамфорд. Лекции о тэта-функциях. Новокузнецк: ИО НФМИ, 1998.
- [31] А. В. Одесский. Об одном аналоге алгебр Складина // *Функц. анализ и его прил.* 1986. Т. 20. №2. С. 78–79.
- [32] A. V. Odesskii. Rational degeneration of elliptic quadratic algebras // *Infinite Analysis, Part A, B* (Kyoto, 1991). River Edge, NY: World Scientific, 1992. P. 773–779. (Adv. Ser. Math. Phys. V. 16.)
- [33] А. В. Одесский. Эллиптические R -матрицы Белавина и обменные алгебры // *Функц. анализ и его прил.* 2002. Т. 36. №1. С. 59–74.
- [34] А. В. Одесский, Б. Л. Фейгин. Алгебры Складина, ассоциированные с эллиптической кривой. Киев: Изд-во Ин-та теорет. физики АН УССР, 1988.
- [35] А. В. Одесский, Б. Л. Фейгин. Эллиптические алгебры Складина // *Функц. анализ и его прил.* 1989. Т. 23. №3. С. 45–54.
- [36] А. В. Одесский, Б. Л. Фейгин. Конструкции эллиптических алгебр Складина и квантовых R -матриц // *Функц. анализ и его прил.* 1993. Т. 27. №1. С. 37–45.
- [37] А. В. Одесский, Б. Л. Фейгин. Эллиптические алгебры Складина. Случай точки конечного порядка // *Функц. анализ и его прил.* 1995. Т. 29. №2. С. 9–21.
- [38] А. В. Одесский, Б. Л. Фейгин. Эллиптические деформации алгебры токов и их представления разностными операторами // *Функц. анализ и его прил.* 1997. Т. 31. №3. С. 57–70.
- [39] А. Одесский, В. Рубцов. Полиномиальные алгебры Пуассона с регулярной структурой симплектических листов // *ТМФ*. 2002. Т. 133. №1. С. 3–23.

- [40] O. Ogievetsky. Uses of quantum spaces // Quantum Symmetries in Theoretical Physics and Mathematics / ed. R. Coquereaux et al. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002. (Contemp. Math. V. 294.)
- [41] A. Polishchuk, L. Positselski. Quadratic Algebras // Preprint, 1996.
- [42] S. B. Priddy. Koszul resolutions // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. V. 152. № 1. P. 39–60.
- [43] J.-E. Roos. On the characterisation of Koszul algebras. Four counter-examples // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1995. V. 321. № 1. P. 15–20.
- [44] B. Shelton, C. Tingey. On Koszul algebras and a new construction of Artin–Schelter regular algebras // J. Algebra. 2001. V. 241. № 2. P. 789–798.
- [45] Е. К. Склянин. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнениями Янга–Бакстера // Функц. анализ и его прил. 1982. Т. 16. № 4. С. 22–34.
- [46] Е. К. Склянин. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнениями Янга–Бакстера, II // Функц. анализ и его прил. 1983. Т. 17. № 4. С. 34–48.
- [47] S. P. Smith, J. Tate. The center of the 3-dimensional and 4-dimensional Sklyanin algebras // K-Theory. 1994. V. 8. № 1. P. 19–63.
- [48] J. T. Stafford, M. Van den Bergh. Noncommutative curves and noncommutative surfaces // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). 2001. V. 38. № 2. P. 171–216.
- [49] J. T. Stafford, J. J. Zhang. Examples in non-commutative projective geometry // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1994. V. 116. № 3. P. 415–433.
- [50] J. Tate. Homology of Noetherian rings and local rings // Illinois J. Math. 1957. V. 1. P. 14–27.
- [51] M. Van den Bergh. Blowing Up of Non-Commutative Smooth Surfaces. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2001. (Mem. Amer. Math. Soc. № 734.)
- [52] А. М. Вершик. Алгебры с квадратичными соотношениями. Спектральная теория операторов и бесконечномерный анализ. Киев: Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1984.