Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. В. Плыкин, К проблеме топологической классификации странных аттракторов динамических систем, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 6, 123–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm574>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 07:19:09

УДК 517.938.5+515.16

*Посвящается светлой памяти моего брата Начко Георгиева.***К ПРОБЛЕМЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ
СТРАННЫХ АТТРАКТОРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Р. В. Плыкин

Работа состоит из двух частей. Первая, посвященная изложению результатов М. Баржа и У. Уоткинса, связывает замыкание объединения неустойчивых многообразий некоторых “подков Смейла” с континуумами Кнастера и проекциями на них соленоидов Виеториса–Ван Данцига. Во второй части решена проблема гомеоморфизма растягивающихся аттракторов коразмерности один в случае, когда многообразие, порождающее динамическую систему, имеет размерность больше двух.

Библиография: 45 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	123
I. Квазиаттракторы “подковы Смейла” как континуумы Кнастера и проекции соленоидов Виеториса–Ван Данцига	127
II. Гомеоморфизм растягивающихся аттракторов коразмерности один ..	134
1. Предварительные сведения	134
2. О структуре централизаторов целочисленных матриц с гиперболическим спектром	138
3. Соответствие связок при гомеоморфизме аттракторов и продолжение этих гомеоморфизмов на окружающие слоения	140
4. О топологической классификации слоений коразмерности один без предельных циклов на торах	144
5. Доказательство основных теорем. Примеры	146
6. Доказательство теоремы о вложении ориентируемого растягивающегося аттрактора в инвариантное слоение	153
Список литературы	164

Введение

Аттракторы динамических систем как асимптотически устойчивые множества, притягивающие к себе орбиты точек своих окрестностей, играют, начиная с 60-х

Работа выполнена при содействии Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00-358), гранта № 001596107 ведущих научных школ, а также фонда Сороса.

годов XX столетия, возрастающе важную роль в понимании задач естествознания, использующих дифференциальные уравнения.

Согласно Р. Вильямсу [38] аттрактором диссипативной динамической системы $f: B \rightarrow B$, где B — компактная область евклидова пространства, называется неразложимое подмножество Λ множества неблуждающих точек $\Omega(f)$ (определение см. ниже), для которого существует такая окрестность $U \supset \Lambda$, что $f(U) \subset U$ и $\bigcap_{k \geq 0} f^k(U) = \Lambda$.

Согласно Д. Рюэллю и Ф. Такенсу [30] аттрактор, не являющийся многообразием, называется странным.

Существуют также определения аттракторов, связанные с рассмотрением мер на многообразиях. Например, аттрактор по Дж. Милнору [18] — это такое замкнутое подмножество $\Lambda \subset B$, что ω -предельные множества почти всех точек $x \in B$ лежат в Λ . Стохастический аттрактор по Я. Г. Синаю — это аттрактор Милнора, снабженный инвариантной мерой, относительно которой динамическая система, ограниченная на этот аттрактор, обладает свойством перемешивания. Модификации этого определения использовали Я. Б. Песин [21], Е. А. Сатаев [31].

Ю. С. Ильяшенко и А. С. Городецкий [11] ввели понятие минимального аттрактора, который в случае его бесконечной мощности допускает существование инвариантной меры, порождающей на нем эргодическую систему. Подобные аттракторы авторы называют странными.

В настоящей работе рассматриваются гиперболические аттракторы по Р. Вильямсу, которые являются странными в смысле определения Д. Рюэлля и Ф. Такенса.

Странный аттрактор — популярный объект теории динамических систем и смежных с нею областей естествознания. Заметим, что проблемы теории динамических систем требуют достаточно полного реквизита теории континуумов, включая континуумы Кнастера, Вады, псевдоокружности, ожерелья Антуана. Несмотря на то что проблема топологической классификации континуумов, и тем более канторовских многообразий, оставлена математиками как вследствие ее алгоритмической неразрешимости, так и вследствие крайней калейдоскопичности объекта исследования, классификация странных аттракторов, возникающих в теории гладких динамических систем и ее приложениях, может быть проведена в ряде случаев благодаря специфике встречающихся множеств.

Работы по топологической классификации континуумов сложной природы возникли в геометрической топологии задолго до осознания многих из этих объектов как предельных множеств динамических систем. Это прежде всего относится к солениодам Виеториса–ван Данцига [35], [36], которые появились вначале как топологические группы со сложной топологией, и лишь после работ С. Смейла [32] и Р. Вильямса [38], [39] выявилась их роль в гиперболической теории дифференцируемых динамических систем. Изучение топологических свойств солениодов как пределов обратных спектров непрерывных отображений, начатое работами ван Данцига, продолжено М. Маккордом [17], Й. Аартсом и Р. Фоккингом [1], [9], им посвящены разделы известной монографии Э. Хьюитта и К. Росса [13].

Р. Вильямс [38], [39] ввел в теорию динамических систем обобщенные солениоды как символические образы гиперболических аттракторов растягивающегося типа.

Полная задача классификации этих солениодов так же трудна, как задача топологического описания всех аттракторов гиперболических динамических систем; однако

в отдельных случаях получены нетривиальные связи этих аттракторов с теорией узлов [34], [6].

Различные задачи конструирования, перечисления и классификации одномерных аттракторов гиперболических систем на поверхностях решены в работах А. Ю. Жирова [41]–[44].

После исследования Э. Н. Лоренцем в 1963 году [16] трехмерной динамической системы, являющейся галёркинским приближением задачи Бенара о поведении жидкого слоя между двумя нагретыми до различных температур пластинками, возник новый тип странного аттрактора, к описанию которого были применены разрывные отображения, и большинство результатов было получено не прямым исследованием системы Лоренца, а изучением ее различных геометро-аналитических моделей при проверке результатов и предпосылок посредством компьютерного эксперимента (необходимость изучения лоренцоподобных систем связана с возможностями теоретического прогноза погоды). В результате возникла ярко выраженная исследовательская программа, включенная физиками в число актуальных проблем науки. Каковы основные черты и особенности этой программы? Здесь весьма существенен компьютерный эксперимент и как средство открытия новых феноменов, и как методика верификации теоретических утверждений. Уровень математической строгости претерпел конституционные изменения, так как аналитическая задача заменяется взаимодействием геометро-символической динамики и компьютерного расчета [2], [12], [14], [15], [26], [28], [30], [40]. В этой связи С. Смейл включил в свой список важнейших проблем математики XXI века исследование аттрактора Лоренца внутренними математическими средствами [33; проблема 14].

Исследования аттрактора Лоренца в работах Д. Гуккенхаймера и Р. Вильямса [12], [40] подтвердили крайнюю неустойчивость его топологического строения. Для определения топологического типа (вернее, для упрощенных лоренцоподобных моделей) были созданы в работах Д. Милнора, У. Терстена, Д. Рэнда [29], Р. Вильямса [40] и других исследователей так называемые нидинг-последовательности и ряды, позволяющие описывать пределы обратных спектров не обязательно непрерывных отображений.

Предлагаемая читателю работа состоит из двух частей. Первая посвящена задаче топологической классификации странных аттракторов (вернее, квазиаттракторов), порожденных отображениями класса “подковы Смейла”. В работах М. Баржа [5], У. Уоткинса [37], Р. Фоккинга [9] и других исследователей выяснено, что эти квазиаттракторы совпадают с континуумами Кнастера типа “ведерной ручки”. (Напомним, что согласно [37] континуум Кнастера может быть определен как предел обратного спектра, порожденного непрерывным отображением отрезка $[0, 1]$ на себя, заданного следующим образом. Определим разбиение отрезка $I = [0, 1]$ числами $\{b_i\}$, $i = 0, 1, \dots, n$, $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_n = 1$. В соответствии с этим разбиением построим непрерывное отображение $g_n: I \rightarrow I$, $g_n(b_i) = \begin{cases} 0, & i - \text{четно}, \\ 1, & i - \text{нечетно}, \end{cases}$ $g_n(x)$ линейна на каждом отрезке $[b_{i-1}, b_i]$.) Выявляется связь этих квазиаттракторов с классическими соленидами Виеториса–ван Данцига, что и приводит к классификационным теоремам. Первая часть состоит из обзора этих работ, выполненного с определенными упрощениями и обобщениями. Во второй части, составленной из результатов автора, обсуждается задача топологического различения растягивающихся гиперболи-

ческих аттракторов коразмерности один. Для диффеоморфизмов тора подобные аттракторы гомеоморфны континуумам Данжуа (в двумерном случае) в примерах неэргодических потоков гладкости C^1 , а для диффеоморфизмов двумерной сферы эти континуумы являются континуумами Вады, характеризующимися тем, что каждая точка подобного континуума принадлежит общей границе конечного числа попарно непересекающихся областей, расположенных внутри диска [3]. Число этих областей является единственным известным топологии инвариантом, позволяющим различать континуумы этого типа. Заметим, что вопрос о топологическом тождестве двух различных континуумов Вады, порожденных одинаковым количеством непересекающихся областей, является примером плохо поставленной задачи, так как при построении их по типу “иригационных работ” [3] в любой из них можно включить произвольный не разбивающий плоскости континуум. Однако некоторые континуумы Вады, являющиеся странными аттракторами диффеоморфизмов двумерной сферы, могут быть различены с помощью инвариантов типа чисел вращения слоений, в которые эти аттракторы могут быть включены. Эти числа и обобщающие их функционалы вращения, появляющиеся и исчезающие в процессе доказательства, представляются автору интересным феноменом взаимодействия теории динамических систем и геометрической топологии.

Известно [25], что динамическая классификация с точностью до топологической сопряженности аттракторов коразмерности один в случае, когда степени связок достижимых границ дополнений этих аттракторов не превосходят двух, задается инвариантом – так называемым классом аттрактора, который в ориентируемом случае порождается парой (A, P) , где A – алгебраический автоморфизм тора коразмерности один (его спектр разбивается единичной окружностью на две части, одна из которых состоит из единственного вещественного числа, меньшего по модулю единицы), а P – конечный набор периодических траекторий автоморфизма A . В неориентируемом случае класс аттрактора задается тройкой (A, P, Θ) , где Θ – инволюция тора, перестановочная с A , и множество P включает в себя множество неподвижных точек инволюции Θ . Задача о топологической классификации аттракторов как топологических континуумов решается для аттракторов этого типа (а он охватывает аттракторы диффеоморфизмов многообразий размерности, большей двух) приводимыми в конце работы основными теоремами 5.1, 5.2 и 5.3. Сформулируем первую из них, предпослав ей некоторые пояснения и определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть A – квадратная целочисленная матрица. Централизатор $Z(A)$ – это совокупность целочисленных матриц, перестановочных с A .

Оказывается, что централизаторы матриц коразмерности один, порождающих аттракторы растягивающегося типа, состоят из матриц, имеющих одинаковый набор собственных векторов (раздел II.2).

ТЕОРЕМА 5.1. *Ориентируемые (неориентируемые) аттракторы $\Lambda(A_1, P_1)$ и $\Lambda(A_2, P_2)$ ($\Lambda(A_1, P_1, \Theta_1)$ и $\Lambda(A_2, P_2, \Theta_2)$) гомеоморфны тогда и только тогда, когда существует такое линейное отображение тора вида $\Psi(x) = Cx + \xi$, что $\Psi A_1 \Psi^{-1}$ принадлежит централизатору $Z(A_2)$, $\Psi P_1 = P_2$ ($\Theta_2 = \Psi \Theta_1 \Psi^{-1}$) и собственные числа матриц $\Psi A \Psi^{-1}$ и A_2 , соответствующие одинаковым собственным векторам, имеют одинаковое расположение относительно стандартной единичной окружности комплексной плоскости $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.*

Автор выражает глубокую признательность Д. В. Аносову, Я. Г. Синаю и Е. А. Сатаеву, критика которых существенно изменила первоначальный вариант работы. Автор благодарит всех участников семинаров по теории динамических систем (МГУ и Математический институт им. В. А. Стеклова), прослушавших доклады автора по темам представленной работы, и прежде всего Р. И. Григорчука за внимание и поддержку. Выражаю благодарность А. Ю. Жирову за нелегкий труд чтения первоначального текста статьи.

1. Квазиаттракторы “подковы Смейла” как континуумы Кнастера и проекции соленоидов Виеториса–Ван Данцига

Опишем простейшие отображения двумерных клеток в себя, порождающие “подковы Смейла”. Пусть $I = [0, 1]$, и пусть $D^2 = I \times I \cup A \cup B$ – двумерный диск, где A и B – множества, подобные полукругам диаметра 1, приклеенные по своим “диаметрам” соответственно к $\{0\} \times I$ и $\{1\} \times I$ (см. рис. 1).

Рис. 1.

Пусть отображение $P: D^2 \rightarrow I$ определено следующим образом:

$$P(A) = \{0\}, \quad P(B) = \{1\}, \quad P((x, y)) = x \quad \text{для } (x, y) \in I \times I.$$

Для каждого целого $n \geq 2$ определим n -изгибающее “подковное” отображение $F_n: D^2 \rightarrow D^2$, которое является гомеоморфизмом и обладает следующими свойствами:

- (I) $F_n(P^{-1}(P(z))) \subseteq P^{-1}(P(F_n(z)))$ для всех $z \in D^2$;
- (II) $F_n(A)$ принадлежит внутренности A ,
 $F_n(B)$ принадлежит внутренности A , если n – четное,
 $F_n(B)$ принадлежит внутренности B , если n – нечетное;
- (III) для всех $x \in I$ множество $P^{-1}(x) \cap F_n(D^2)$ имеет в точности n компонент;
- (IV) диаметр множества $F_n^k(P^{-1}(P(z)))$ стремится к нулю равномерно для $z \in D^2$ при $k \rightarrow \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Квазиаттрактором n -изгибающего “подковного” отображения F_n назовем континуум $\Lambda_n = \bigcap_{k \geq 0} F_n^k(D^2)$ (см. рис. 2).

ЗАМЕЧАНИЕ. Отображение F_n нетрудно построить гладким, и тогда в континуум Λ_n будет входить одноточечный сток, лежащий в F_n -образе множества A , откуда ясно, что Λ_n не может быть динамически однородным аттрактором, все точки которого неблуждающие.

В то же время для любого заданного $z \in D^2$ расстояние между $F_n^k(z)$ и Λ_n стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Рис. 2.

Для каждого $n \geq 2$ отображение F_n индуцирует непрерывное отображение интервала $f_n: I \rightarrow I$, определяемое посредством выражения $f_n(x) = P(F_n(P^{-1}(x)))$.

Это отображение обладает следующими свойствами:

$$f_n(0) = 0, \quad f_n(1) = \begin{cases} 0, & n - \text{четно}, \\ 1, & n - \text{нечетно}, \end{cases}$$

и на отрезке I существует последовательность чисел $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{2n} < a_{2n+1} = 1$ таких, что функция f_n строго монотонна на сегментах $[a_{2i-1}, a_{2i}]$, $i = 1, 2, \dots, n$,

$$f_n([a_{2i}, a_{2i+1}]) = \begin{cases} 0, & n - \text{четно}, \\ 1, & n - \text{нечетно} \end{cases}$$

(см. рис. 3).

Напомним, что с непрерывным отображением $f: I \rightarrow I$ сегмента I на себя связано пространство предела обратного спектра (I, f) $\{(x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots), x_k \in I, f(x_{k+1}) = x_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$, которое может быть снабжено метрикой, согласующейся с топологией произведения $\prod_{k=0}^{\infty} I_k$, $I_k = I$, заданной следующим образом:

$$d((x_0, x_1, \dots), (y_0, y_1, \dots)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}.$$

Отображение $\hat{f}: (I, f) \rightarrow (I, f)$, определенное соотношением $\hat{f}(x_0, x_1, \dots, x_k, \dots) = (f(x_0), x_0, x_1, \dots, x_k, \dots)$, называется сдвиговым гомеоморфизмом.

Пусть теперь F_n — n -изгибающее “подковное” отображение, порождающее квази-аттрактор Λ_n , и пусть f_n — индуцированное отображение интервала I .

Рис. 3.

1.1. ТЕОРЕМА (М. Барж, [5]). *Отображение $\hat{P}: \Lambda_n \rightarrow (I, f_n)$, определенное посредством выражения $\hat{P}(z) = (P(z), P(F_n^{-1}(z)), P(F_n^{-2}(z)), \dots)$, является гомеоморфизмом “на”, и при этом следующая диаграмма гомеоморфизмов*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_n & \xrightarrow{F_n} & \Lambda_n \\ \hat{P} \downarrow & & \downarrow \hat{P} \\ (I, f_n) & \xrightarrow{f_n} & (I, f_n) \end{array}$$

коммутативна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $f_n(P(F_n^{-(i+1)}(z))) = P(F_n(P^{-1}(P(F_n^{-(i+1)}(z))))) = P(F_n^{-i}(z))$, точка $\hat{P}(z)$ действительно принадлежит (I, f_n) . Очевидно, что отображение $\hat{P}$ непрерывно. Убедимся в его взаимной однозначности.

Пусть $\bar{x} = (x_0, x_1, \dots) \in (I, f_n)$, и пусть $C_k = F_n^k(P^{-1}(x_k))$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Тогда для каждого $k \geq 0$ C_k — замкнутое и непустое подмножество D^2 , и вследствие $F_n(P^{-1}(x_{k+1})) \subseteq P^{-1}(P(F_n(P^{-1}(x_{k+1})))) = P^{-1}(f_n(x_{k+1})) = P^{-1}(x_k)$ справедливо включение $C_{k+1} \subseteq C_k$, $k \geq 0$. Отсюда вытекает непустота $\bigcap_{k \geq 0} C_k$, и если $z \in \bigcap_{k \geq 0} C_k$, то $P(z) = x_0$, $P(F_n^{-1}(z)) = x_1$ и т. д.

Таким образом, $\hat{P}(z) = \bar{x} = (x_0, x_1, \dots)$, и обратно, если $\hat{P}(z) = \bar{x}$, то $z \in \bigcap_{k \geq 0} C_k$. Вследствие свойства (IV) отображения F_n диаметр множества $F_n^k(P^{-1}(x_k))$ стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, поэтому $\bigcap_{k \geq 0} C_k = z$ и $\hat{P}$ взаимно однозначно. Теорема доказана.

Дальнейшая цель состоит в обсуждении результатов М. Баржа [5] и У. Уоткинса [37] о топологической классификации квазиаттракторов Λ_n . Пусть теперь задано разбиение отрезка $I = [0, 1]$ числами $\{b_i\}$, $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_n = 1$. В соответствии с этим разбиением построим функцию $g_n(x)$, $g_n(b_i) = \begin{cases} 0, & i - \text{четно}, \\ 1, & i - \text{нечетно}, \end{cases}$ $g_n(x)$ непрерывна и строго монотонна на каждом отрезке $[b_{i-1}, b_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ (см. рис. 4).

4a

4b

Λ_2 [37]

4c

Рис. 4.

Справедлива следующая теорема.

1.2. ТЕОРЕМА (М. Барж, [5]). *Континуумы (I, f_n) и (I, g_n) гомеоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дадим новое описание континуума (I, g_n) . Введем в рассмотрение множество $\Sigma_n = \{\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots), \alpha_k \in \{1, 2, \dots, n\}\}$, гомеоморфное канторову дисконтинууму, если задать в нем топологию метрикой

$$d(\bar{a}, \bar{b}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{2^i}.$$

Пусть $I \times \Sigma_n$ – топологическое произведение. Определим отображение $P_n: I \times \Sigma_n \rightarrow (I, g_n)$, положив $P_n(x, \bar{a}) = \bar{x}$, где $\bar{x} = (x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots)$ – единственный элемент (I, g_n) , для которого $x = x_0$, $x_i = [b_{\alpha_i-1}, b_{\alpha_i}]$, $\alpha_i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Число прообразов точки множества (I, g_n) при отображении P_n не превосходит двух, и если определить соотношение эквивалентности $(x, \bar{a}) \approx (x, \bar{b})$ условием $P_n(x, \bar{a}) = P_n(x, \bar{b})$, то фактор по этой эквивалентности $I \times \Sigma_n / \approx$ гомеоморфен (I, g_n) .

Опишем все случаи отождествления. Как нетрудно убедиться, они возможны лишь в случае совпадения x с концами отрезка I .

1-й случай: $(1, \bar{a}) \approx (1, \bar{b})$, $\bar{a} = (2j - 1, i_2, i_3, \dots)$, $\bar{b} = (2j, i_2, i_3, \dots)$.

2-й случай: $(1, \bar{a}) \approx (1, \bar{b})$, если n нечетно и $\alpha_i = \beta_i = n$ при $i \in \{1, 2, \dots, m\}$; $\alpha_{m+1} = 2j$, $\beta_{m+1} = 2j - 1$; $\alpha_i = \beta_i$ при $i > m + 1$.

3-й случай: $(0, \bar{a}) \approx (0, \bar{b})$, если $\alpha_i = \beta_i = 1$ при $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\alpha_{m+1} = 2j$, $\beta_{m+1} = 2j + 1$, $\alpha_i = \beta_i$ при $i > m + 1$.

4-й случай: $(0, \bar{a}) \approx (0, \bar{b})$, n — четно, $\alpha_i = \beta_i = 1$ при $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\alpha_{m+1} = \beta_{m+1} = n$, $\alpha_{m+2} = 2j - 1$, $\beta_{m+2} = 2j$, $\alpha_i = \beta_i$ при $i > m + 2$.

Отметим исключительные случаи, когда элементам $(1, \bar{a})$, $(0, \bar{b})$ нет эквивалентных. В первом случае это, когда $\bar{a} = (n, n, n, \dots, n, \dots)$, в этом случае n должно быть нечетным; во втором случае $\bar{b} = (1, 1, \dots, 1, \dots)$.

При геометрической реализации рассмотренные случаи соответствуют компонентам связности континуума (I, g_n) , которые являются вложенными в континуум полупрямыми, начинающимися в одной из этих точек. Отсюда следует, что при любом непрерывном отображении континуума (I, g_n) на континуум (I, g_m) эти точки либо соответствуют друг другу, либо меняются местами.

Пусть теперь $J = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \subset I$, и пусть Σ_n — определенное ранее множество.

Отображение P_n задает включение $J \times \Sigma_n$ в (I, g_n) , определим отображение $Q_n: J \times \Sigma_n \rightarrow (I, f_n)$, полагая $Q_n(x, \bar{a}) = \bar{x}$, где при $\bar{a} = (j_1, j_2, \dots)$ имеет место $\bar{x} = (x_0, x_1, \dots, x_k, \dots)$, $x_0 = 2(x - \frac{1}{4})$, $x_i \in [a_{2j_i-1}, a_{2j_i}]$.

Отображение Q_n является гомеоморфизмом $J \times \Sigma_n$ на свой образ. Множество $(I, f_n) - Q_n(J \times \Sigma_n)$ является объединением дуг. Продолжим отображение Q_n до гомеоморфизма $(I \times \Sigma_n)/\approx$ на (I, f_n) , отображая дуги множества $(I, g_n) - (J \times \Sigma_n)$ на соответствующие дуги в $(I, f_n) - Q_n(J \times \Sigma_n)$. Для этого необходимо рассмотрение дуг, получающихся в результате склеивания дуг $[\frac{3}{4}, 1] \times \bar{a}$ и $[\frac{3}{4}, 1] \times \bar{b}$, где $(1, \bar{a}) \approx (1, \bar{b})$, а также дуг, получающихся из склеивания $[0, \frac{1}{4}] \times \bar{a}$ и $[0, \frac{1}{4}] \times \bar{b}$, где $(0, \bar{a}) \approx (0, \bar{b})$. Рассмотрим различные случаи склеек. В первом случае, когда $(1, \bar{a}) \approx (1, \bar{b})$, $\bar{a} = (2j - 1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$, $\bar{b} = (2j, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$, продолжение отображения Q_n переведет дугу $([\frac{3}{4}, 1] \times \bar{a} \cup [\frac{3}{4}, 1] \times \bar{b})/\approx$, принадлежащую $(I, \Sigma_n)/\approx$ (которое совпадает с (I, g_n)), на множество $A_{\bar{a}, \bar{b}} = \{\bar{t} = (1, t_1, t_2, \dots, t_k, \dots) \in (I, f_n), a_{4j-2} \leq t_1 \leq a_{4j-1}, t_i \in [a_{2a_i-1}, a_{2a_i}]\}$, которое является дугой в (I, f_n) , соединяющей точки $Q_n((\frac{3}{4}, \bar{a})) = (1, a_{4j-2}, \dots) = \bar{x}$ и $Q_n((\frac{3}{4}, \bar{b})) = (1, a_{4j-1}, \dots) = \bar{y}$. Зададим это продолжение следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{Q}_n((s, \bar{a})) &= \bar{t} = (t_0(s), t_1(s), \dots), \quad s \in \left[\frac{3}{4}, 1\right], \\ t_1 &= (a_{4j-1} - a_{4j-2}) \times \left(2s - \frac{3}{2}\right) + a_{4j-2}, \quad t_0 = f_n(t_1), \\ \overline{Q}_n((s, \bar{b})) &= \hat{t} = (\hat{t}_0(s), \hat{t}_1(s), \dots), \quad s \in \left[\frac{3}{4}, 1\right], \\ \hat{t}_1 &= (a_{4j-2} - a_{4j-1}) \times \left(2s - \frac{3}{2}\right) + a_{4j-1}, \quad \hat{t}_0 = f_n(\hat{t}_1), \\ t_i(s), \hat{t}_i(s) &\in [a_{2a_i-1}, a_{2a_i}], \quad i \geq 2. \end{aligned}$$

Понятно, что при $s = \frac{3}{4}$ $\overline{Q}_n((\frac{3}{4}, \bar{a})) = \bar{x}$, $\overline{Q}_n((\frac{3}{4}, \bar{b})) = \bar{y}$ и что $\overline{Q}_n((1, \bar{a})) = \overline{Q}_n((1, \bar{b}))$.
Случай 2 разбирается аналогично, проведем построение в случае 3, отобразив дугу

$$\left(\left[0, \frac{1}{4} \right] \times \bar{a} \cup \left[0, \frac{1}{4} \right] \times \bar{b} \right) / \approx, \quad (0, \bar{a}) \approx (0, \bar{b}), \quad \alpha_i = \beta_i = 1, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\},$$

$$\alpha_{m+1} = 2j, \quad \beta_{m+1} = 2j+1, \quad \alpha_i = \beta_i, \quad i \geq m+2,$$

в множество $(I, f_n) - Q_n(J \times \Sigma_n)$. Вычислим:

$$\bar{x}_1 = Q_n \left(\left(\frac{1}{4}, \bar{a} \right) \right) = (0, a_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots), \quad x_i \in [a_1, a_2], \quad i \in \{2, \dots, m\},$$

$$x_{m+1} \in [a_{4j-1}, a_{4j}], \quad x_{m+k} \in [a_{2\alpha_{m-k}-1}, a_{2\alpha_{m+k}}], \quad k > 1;$$

$$\bar{y}_1 = Q_n \left(\left(\frac{1}{4}, \bar{b} \right) \right) = (0, a_1, x_2, \dots, x_m, \hat{x}_{m+1}, \dots), \quad x_i \in [a_1, a_2], \quad i \in \{2, \dots, m\},$$

$$\hat{x}_{m+1} \in [a_{4j+1}, a_{4j+2}], \quad \hat{x}_{m+k} \in [a_{2\alpha_{m-k}-1}, a_{2\alpha_{m+k}}], \quad k > 1.$$

Заметим, что $x_{m+1} < \hat{x}_{m+1}$. Продолжение отображения Q_n определим следующим образом:

$$\overline{Q}_n((s, \bar{a})) = \bar{t} = (t(s), a_1(s), x_2(s), \dots, x_m(s), t_1(s), t_2(s), \dots),$$

где

$$t_1(s) = (\hat{x}_{m+1} - x_{m+1})2s + x_{m+1}, \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{4}, \quad x_i(s) \in [a_1, a_2], \quad 2 \leq i \leq m,$$

$$t_i(s) = x_{m+i+1} \in [a_{2\alpha_{m-i+1}-1}, a_{2\alpha_{m+i+1}}],$$

и

$$\overline{Q}_n((s, \bar{b})) = \bar{\hat{t}} = (\hat{t}(s), \hat{a}_1(s), \hat{x}_2(s), \dots, \hat{x}_m(s), \hat{t}_1(s), \dots, \hat{t}_k(s), \dots),$$

где

$$\hat{t}_1(s) = (x_{m+1} - \hat{x}_{m+1})2s + \hat{x}_{m+1}, \quad \hat{x}_i(s) \in [a_1, a_2],$$

$$\hat{t}_i(s) = \hat{x}_{m+i+1} \in [a_{2\alpha_{m-i+1}-1}, a_{2\alpha_{m+i+1}}].$$

Нетрудно убедиться, что построенное отображение $\overline{Q}_n$ переводит дугу $([0, \frac{1}{4}] \times \bar{a} \cup [0, \frac{1}{4}] \times \bar{b}) / \approx$ в дугу множества (I, f_n) , соединяющую точки $\bar{x}_1$ и $\bar{y}_1$. Случай 4 рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Несколько замечаний по поводу доказанных теорем.

Во-первых, в качестве отрезка I можно воспользоваться отрезком $[-1, 1]$ и его разбиениями $-1 = a_0 < a_1 < \dots < a_{2n} < a_{2n+1} = 1$ и $-1 = b_0 < b_1 < \dots < b_n = 1$. В качестве функций могут быть взяты функции f_n, g_n такие, что $f_n[a_{2i}, a_{2i+1}] = \begin{cases} 1, & i - \text{четно}, \\ -1, & i - \text{нечетно}, \end{cases}$ а на сегментах $[a_{2i-1}, a_{2i}]$ функция $f_n(x)$ строго монотонна, $g_n(b_i) = \begin{cases} 1, & i - \text{четно}, \\ -1, & i - \text{нечетно}, \end{cases}$ а на сегментах $[b_i, b_{i+1}]$ функция $g_n(x)$

строго монотонна, причем обе построенные функции непрерывны и поэтому участки строгого возрастания и убывания их чередуются. При этом в качестве $g_n(x)$ могут быть взяты полиномы Чебышёва $T_n(x) = \frac{1}{2}[(x + i\sqrt{1-x^2})^n + (x - i\sqrt{1-x^2})^n]$, которые обладают всеми необходимыми свойствами. Эти изменения сохраняют не только доказательства теорем 1.1, 1.2, но и выводы относительно изучаемого геометрического материала.

Под a -адическим соленоидом S_a (a – целое число) мы будем понимать предел обратного спектра единичных окружностей, записываемых в комплексных координатах в виде $S = \{z : |z| = 1\}$, в качестве проецируемых отображений выберем степени z^a :

$$S \xleftarrow{z^a} S \xleftarrow{z^a} S \xleftarrow{z^a} \dots \xleftarrow{z^a} S \xleftarrow{z^a} \dots$$

Элементы пределов обратных спектров будем записывать в виде последовательностей $(z_0, z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots)$, $|z_k| = 1$, $z_k = z_{k+1}^a$. Известно, что соленоиды S_n и S_m изоморфны как топологические группы, если числа n и m имеют одинаковый состав простых множителей; гомоморфизм S_n на S_m возможен лишь в случае, когда $m = kn^l$ [35], [13].

Определим отображение обратного спектра соленоида S_n на обратный спектр континуума Кнастера Λ_n :

$$\begin{array}{ccccccc} S & \xleftarrow{z^n} & S & \xleftarrow{z^n} & S & \xleftarrow{z^n} & \dots \xleftarrow{z^n} S \xleftarrow{z^n} \dots \\ \downarrow \text{Re } z & & \downarrow \text{Re } z & & \downarrow \text{Re } z & & \dots \downarrow \text{Re } z \\ I & \xleftarrow{T_n} & I & \xleftarrow{T_n} & I & \xleftarrow{T_n} & \dots \xleftarrow{T_n} I \xleftarrow{T_n} \dots \end{array} \quad (*)$$

Проверка коммутативности диаграммы (*) легко вытекает из приведенного выше задания полиномов Чебышёва. Диаграмма (*) порождает накрывающее отображение $H: S_n \rightarrow \Lambda_n$, которое всюду имеет по два прообраза для каждой точки Λ_n , за исключением точек $\bar{1} = (1, 1, \dots, 1, \dots)$ и $-\bar{1} = (-1, -1, \dots, -1, \dots)$. H -прообразы точки $(x_0, x_1, \dots, x_k, \dots)$ имеют вид $(z_0, z_1, \dots, z_k, \dots)$ и $(\bar{z}_0, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k, \dots)$, где $z_k = x_k + i\sqrt{1-x_k^2}$, $\bar{z}_k = x_k - i\sqrt{1-x_k^2}$.

1.3. ТЕОРЕМА (У. Уоткинс, [37]). *Континуумы Λ_n и Λ_m гомеоморфны тогда и только тогда, когда числа n и m имеют одинаковый состав простых множителей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что точка $\bar{1} = (1, 1, \dots, 1, \dots)$, присутствующая во всех множествах $\Lambda_n, \Lambda_m, S_n, S_m$, является, вследствие своей топологической природы точки индекса ветвления 1, либо неподвижной для любого непрерывного отображения Λ_n на Λ_m , либо перестановочной с точкой $-\bar{1} = (-1, -1, \dots, -1, \dots)$. Последнее может иметь место лишь в случае нечетности чисел n и m . Компонента связности точек $\bar{1}$, будучи поднята на соленоид, образует в нем полную компоненту связности единицы соленоида как группы и является незамкнутой подгруппой. Покажем, что каждый гомеоморфизм $g: \Lambda_n \rightarrow \Lambda_m$ может быть поднят в гомеоморфизм $G: S_n \rightarrow S_m$, причем будет соблюдаться условие $H \circ G = g \circ H$ коммутативности соответствующей диаграммы. Ограничимся случаем, когда гомеоморфизм g оставляет неподвижной точку $\bar{1}$, при этом он переводит компоненту линейной связности

этой точки в множестве Λ_n на аналогичную компоненту множества Λ_m . Вследствие плотности обеих этих компонент может быть восстановлен по непрерывности гомеоморфизм $g: \Lambda_n \rightarrow \Lambda_m$, если задан равномерно непрерывный гомеоморфизм этих компонент. Обозначим компоненты и их прообразы соответственно $L_{\Lambda_n}(\bar{1})$, $L_{\Lambda_m}(\bar{1})$, $H^{-1}L_{\Lambda_n}(\bar{1}) = L_{S_n}(\bar{1})$, $H^{-1}L_{\Lambda_m}(\bar{1}) = L_{S_m}(\bar{1})$. Точке $g(\vec{x})$ – образу $\vec{x} = (x_0, x_1, \dots) \in L_{\Lambda_n}(\bar{1})$ – сопоставим две точки $G\vec{z}$, $G\vec{z}$, удовлетворяющие условию $HG\vec{z} = HG\vec{z} = g(\vec{x})$, здесь через $\vec{z}$ и $\vec{z}$ обозначены H -прообразы точки $\vec{x} \in L_{\Lambda_n}(\bar{1})$. Отсюда следует, что $G\vec{z} = G(\vec{z})$. Воспользовавшись локальной гомеоморфностью отображения H , получим гомеоморфизм G , переводящий множество $L_{S_n}(\bar{1})$ на множество $L_{S_m}(\bar{1})$, каждое из которых плотно в своем соленоиде, при этом гомеоморфизм, определенный на этих линиях, является равномерно непрерывным и допускает продолжение по непрерывности до отображения $G: \Lambda_n \rightarrow \Lambda_m$. Докажем, что это отображение также гомеоморфизм. Предполагая противоположное, найдем точки $\vec{z}_1 \neq \vec{z}_2$ соленоида S_n , для которых $G(\vec{z}_1) = G(\vec{z}_2)$. Понятно, что $\vec{z}_1 \neq \vec{z}_2$, так как в противном случае $G(\vec{z}_1) = G(\vec{z}_2)$, противоречие с предположением. Но невозможно также $\text{Re } \vec{z}_1 \neq \text{Re } \vec{z}_2$, так как тогда из $G(\vec{z}_1) = G(\vec{z}_2)$ следовало бы $g(\text{Re } \vec{z}_1) = g(\text{Re } \vec{z}_2)$, что противоречит гомеоморфности g . Остается рассмотреть случай $\text{Re } \vec{z}_1 = \text{Re } \vec{z}_2$, $\text{Im } \vec{z}_1 \neq \text{Im } \vec{z}_2$, откуда следует отвергнутое ранее $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$.

Докажем также, что произвольный топологический изоморфизм $\Phi: S_n \rightarrow S_m$ порождает гомеоморфизм $\varphi: \Lambda_n \rightarrow \Lambda_m$. Это следует из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} L_{S_n}(\bar{1}) & \xrightarrow{\Phi} & L_{S_m}(\bar{1}) \\ \downarrow H & & \downarrow H \\ L_{\Lambda_n}(\bar{1}) & \longrightarrow & L_{\Lambda_m}(\bar{1}) \end{array}, \quad (**)$$

где $\varphi(\vec{x})$ определяется как $H\Phi H^{-1}(\vec{x})$. Корректность определения следует из того, что если $\vec{z}_1$ и $\vec{z}_1$ принадлежат $H^{-1}(\vec{x})$, то $\Phi(\vec{z}_1) = \Phi(\vec{z}_1)$ вследствие изоморфизма действия Φ на $L_{S_n}(\bar{1})$, поэтому $H\Phi(\vec{z}_1) = H\Phi(\vec{z}_1)$. Далее используем продолжение по непрерывности равномерного на $L_{\Lambda_n}(\bar{1})$ гомеоморфизма φ . Отсюда и следует, что гомеоморфизм Λ_n и Λ_m возможен тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм S_n и S_m , откуда и следует справедливость теоремы.

Следуя аналогичным рассуждениям, можно убедиться в справедливости еще одной теоремы о возможности непрерывного отображения Λ_n на Λ_m , которая (насколько известно автору) в литературе не отмечалась.

1.4. ТЕОРЕМА. *Непрерывное отображение Λ_n на Λ_m существует тогда и только тогда, когда найдутся такие целые числа k и l , что $m = kn^l$.*

II. Гомеоморфизм растягивающихся аттракторов коразмерности один

1. Предварительные сведения

Пусть $f: M \rightarrow M$ – диффеоморфизм гладкого многообразия M на (в) себя, $\dim M \geq 2$. Обозначим через $d(x, y)$ полную риманову метрику на M , порожденную римановой метрикой $\| \cdot \|$ касательного расслоения TM .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. f -инвариантное множество $\Lambda \subset M$ называется гиперболическим, если для каждого $x \in \Lambda$ касательное пространство $T_x M$ представимо в виде прямой суммы своих подпространств E_x^s и E_x^u : $T_x M = E_x^s \oplus E_x^u$, где $\dim E_x^s = s$, $\dim E_x^u = u$, $s + u = \dim M$ и выполнены условия:

- а) $df E_x^s = E_{f(x)}^s$, $df E_x^u = E_{f(x)}^u$;
- б) существуют такие константы $\lambda \in (0, 1)$, $c > 0$, что

$$\|df^n \nu\| \leq c \lambda^n \|\nu\|, \quad \nu \in E_x^s, \quad \|df^{-n} \nu\| \leq c \lambda^n \|\nu\|, \quad \nu \in E_x^u, \quad n > 0;$$

- в) E_x^s, E_x^u зависят непрерывно от x .

Обозначим через $B_r(x)$ шар радиуса r с центром в $x \in \Lambda$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подмногообразие $W_r^s(x) \subset M$ называется устойчивым радиуса r локальным многообразием, проходящим через x , если $W_r^s(x) = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}[B_r(f^n(x))]$, $x \in \Lambda$. Подмногообразие $W_r^u \subset M$ назовем неустойчивым радиуса r локальным многообразием, проходящим через x , если оно совпадает с устойчивым радиуса r локальным многообразием диффеоморфизма f^{-1} , проходящим через $x \in \Lambda$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если Λ — компактное гиперболическое множество диффеоморфизма $f: M \rightarrow M$, то множество $W^s(x, f) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}[W_r^s(f^n(x))]$ называется устойчивым многообразием точки $x \in \Lambda$. Множество $W^u(x, f) = \bigcup_{n \geq 0} f^n[W_r^u(f^{-n}(x))]$ называется неустойчивым многообразием точки x .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $f: M \rightarrow M$ — гомеоморфизм метрического пространства M . Точка $x \in M$ называется неблуждающей, если для каждого целого положительного n и каждого открытого множества V , $V \ni x$, найдется такое $m > n$, что $V \cap f^m V \neq \emptyset$. Множество $\Omega(f)$ всех неблуждающих точек гомеоморфизма f называется неблуждающим множеством f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. f -инвариантное компактное гиперболическое множество Λ называется гиперболическим аттрактором (репеллером), если оно состоит из неблуждающих точек и существует такая открытая окрестность $U \supset \Lambda$, что $\bigcap_{n \geq 0} f^n U = \Lambda$ ($\bigcap_{n \leq 0} f^n U = \Lambda$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Если убрать эпитет “гиперболический”, то получим одно из общих определений аттрактора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Аттрактор (репеллер) Λ , для которого выполнено равенство $\dim \Lambda = \dim W^u(x)$, $x \in \Lambda$ ($\dim \Lambda = \dim W^s(x)$), называется растягивающимся гиперболическим аттрактором (сжимающимся гиперболическим репеллером). Если для растягивающегося гиперболического аттрактора (сжимающегося гиперболического репеллера) выполнено дополнительное условие $\dim \Lambda = \dim M - 1$, то будем называть его растягивающимся гиперболическим аттрактором (сжимающимся гиперболическим репеллером) коразмерности один.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть Λ — растягивающийся аттрактор (сжимающийся репеллер) коразмерности один. Пусть $x_1, x_2 \in \Lambda$. Вследствие гиперболичности Λ найдутся такие числа $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, что окрестность $U(x_1) = \bigcup_{x \in W_\varepsilon^u} W_\delta^s(x)$ гомеоморфна $\mathbb{R}^n$,

$n = \dim M$. Предположим, что $W_r^s(x_2) \cap W_\varepsilon^u(x_1) \neq \emptyset$ (это так, если r достаточно велико), выберем на кривой $W_r^s(x_2)$ направление и в соответствии с ним занумеруем точки $z_1, z_2, \dots, z_m$ последовательных пересечений кривой $W_r^s(x_2)$ с множеством $W_\varepsilon^u(x_1)$. Выберем ориентацию в $U(x_1)$, порожденную касательным вектором к $W_r^s(x_2)$ в точке z_1 , задающим направление $W_r^s(x_2)$, и каким-либо репером касательных векторов к $W_\varepsilon^u(x_1)$ в точке z_1 . В каждой из точек $z_i, i > 1$, возникает n -репер, порожденный касательным вектором $W_r^s(x_2)$ в этой точке и $(n-1)$ -репером касательных векторов к многообразию $W_\varepsilon^u(x_1)$ в этой точке, имеющим ту же ориентацию, что и $(n-1)$ -репер в точке z_1 . Если все возникающие таким путем реперы задают одну и ту же ориентацию $U(x_1)$ и это утверждение не зависит от произвола в выборе $x_1, x_2, \varepsilon, \delta, r$, то такой аттрактор называется ориентируемым. Аттрактор, не являющийся ориентируемым, называется неориентируемым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть G есть связная открытая область многообразия M , ∂G – граница области G , $x \in \partial G$. Назовем x достижимой точкой границы, если найдется открытая дуга в множестве G , один из концов которой совпадает с x . Подмножество $D(G)$, состоящее из достижимых точек границы, называется достижимой границей области G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть Λ – растягивающийся аттрактор коразмерности 1 диффеоморфизма $f: M \rightarrow M$, и пусть $G = M - \Lambda$. Совокупность $\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ компонент связности достижимой границы $D(M - \Lambda)$ назовем связкой степени m (или m -связкой), если эти компоненты можно расположить в таком порядке, что пары $C_i, C_{i+1}, 1 \leq i \leq m-1, C_m, C_1$ могут быть соединены открытыми дугами устойчивых многообразий $(x, \vartheta x)^s, x \in C_i, \vartheta x \in C_{i+1} (x \in C_m, \vartheta x \in C_1)$, принадлежащими $M - \Lambda$. Множество $\alpha(C_1, C_2, \dots, C_m) = \bigcup_{x \in \bigcup_{i=1}^m C_i} (x, \vartheta x)^s \cup \bigcup_{i=1}^m C_i$ называется областью связки. Заметим, что в каждом $C_i, 1 \leq i \leq m$, найдется такая периодическая точка p_i , для которой одна из компонент связности множества $W^s p_i - p_i$ не будет иметь общих точек с Λ , и поэтому не будет открытых дуг, соединяющих эти исключительные точки с другими точками достижимой границы. Точки $p_i, 1 \leq i \leq m$, называются граничными периодическими точками. Каждая компонента связности множества $D(M - \Lambda)$ во внутренней топологии гомеоморфна $\mathbb{R}^{n-1}$.

Если Λ – растягивающийся аттрактор диффеоморфизма $f: M \rightarrow M$, то достижимая граница $D(M - \Lambda)$ состоит из конечного множества связок. Если $\dim M > 2$, то степени связок, входящих в $D(M - \Lambda)$, не превосходят двух, а в случае ориентируемости аттрактора Λ в точности равны двум. Конструкции диффеоморфизмов, порождающих растягивающиеся аттракторы, приводятся в следующей теореме.

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РАСТЯГИВАЮЩИХСЯ АТТРАКТОРОВ [25]. Автоморфизму A тора T^n коразмерности 1 (т.е. порожденному унимодулярной матрицей, спектр которой разбивается единичной окружностью комплексной плоскости с центром в 0 на два множества, одно из которых состоит из единственного вещественного числа, по модулю меньшего единицы) и конечному A -инвариантному множеству P соответствует структурно устойчивый DA -диффеоморфизм $f^{A,P}$, удовлетворяющий следующим условиям.

- 1) $f^{A,P}$ диффеотопен A .
- 2) Для неблуждающего множества $\Omega(f^{A,P})$ справедливо представление $\Omega(f^{A,P}) = \Lambda \cup \bigcup_{i=1}^l q_i$, где $\Lambda = \Lambda(A, P)$ – растягивающийся ориентируемый

аттрактор с достижимой границей $D(\mathbb{T}^n - \Lambda) = \bigcup_{i=1}^l \bigcup_{j=1}^{k_i} (C_j^i \cup \partial C_j^i)$, где C_j^i , ∂C_j^i гомеоморфны $\mathbb{R}^{n-1}$, попарно не пересекаются и

$$C_{j+1}^i \cup \partial C_{j+1}^i = f^{A,P}(C_j^i \cup \partial C_j^i), \quad j < k_i, \quad C_1^i \cup \partial C_1^i = f^{A,P}(C_{k_i}^i \cup \partial C_{k_i}^i),$$

здесь $q_i = \{q_1^i, q_2^i, \dots, q_{k_i}^i\}$ – отталкивающая периодическая траектория диффеоморфизма $f^{A,P}$, переходящая при диффеотопии, связывающей A и $f^{A,P}$, в периодическую траекторию множества $P = \bigcup P_i$.

3) Устойчивые многообразия диффеоморфизма $f^{A,P}$ совпадают с устойчивыми многообразиями автоморфизма A , за исключением конечного множества устойчивых многообразий автоморфизма A , проходящих через точки q_j^i . Каждое устойчивое многообразие из этого исключительного множества, разбиваясь точкой q_j^i , образует два устойчивых многообразия граничных периодических точек $p_j^i \in C_j^i$, $\partial p_j^i \in \partial C_j^i$ диффеоморфизма $f^{A,P}$. Область притяжения $W^s(\Lambda)$ аттрактора $\Lambda = \Lambda(A, P)$ совпадает с $\mathbb{T}^n - \bigcup q_i$.

4) Если автоморфизм A перестановочен с непрерывной инволюцией $\Theta: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$, обладающий непустым конечным множеством неподвижных точек $\text{Fix } \Theta$, и множество P инвариантно относительно Θ и включает в себя $\text{Fix } \Theta$, то инволюция имеет структуру $\Theta(x) = -x + a$, где $A(a) = a$, а отображение $f^{A,P}$ может быть сконструировано таким образом, что будет также перестановочно с Θ . При этом на многообразии $\mathbb{T}_\Theta^n$, полученном из $\mathbb{T}^n - \text{Fix } \Theta$ отождествлением пар точек $\{x, \Theta x\}$, возникает диффеоморфизм $f^{A,P,\Theta}$, порождающий неориентируемый растягивающий аттрактор $\Lambda(A, P, \Theta)$, область притяжения которого $W^s \Lambda(A, P, \Theta)$ совпадает с $\mathbb{T}_\Theta^n - \pi_\Theta(\bigcup q_i)$, где $\pi_\Theta: \mathbb{T}^n - \text{Fix } \Theta \rightarrow \mathbb{T}_\Theta^n$ – двулистное накрытие с группой преобразования накрытия, порожденной инволюцией Θ .

Заметим, что “теорема существования” является обобщением “хирургической операции” С. Смейла. Связки и их области, сконструированные в “теореме существования”, обладают звездной выпуклостью и Θ -симметрией. Это означает, что множество прообразов связок степеней 1 и 2 относительно отображений накрытия областей $W^s \Lambda(A, P)$ и $W^s \Lambda(A, P, \Theta)$ на накрываемой, гомеоморфной пространству $\mathbb{R}^n$ минус дискретное множество точек (которое совпадает с прообразом множества $\bigcup q_i$ относительно отображения накрытия), инвариантно относительно сдвигов на элементы полной целочисленной решетки $\mathbb{R}^n$, а также инвариантно относительно преобразования $\bar{\Theta}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ вида $\bar{\Theta}(x) = -x + a$, накрывающего инволюцию Θ . Далее будет приведена классификационная теорема, демонстрирующая общий характер примеров “теоремы существования”.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Рассмотрим множества Γ пар (A, P) и $\bar{\Gamma}$ троек (A, P, Θ) , где A – гиперболический автоморфизм n -тора, $n > 1$, коразмерности один, P – конечное A -инвариантное подмножество тора, Θ – линейная инволюция того же тора, перестановочная с A , обладающая конечным множеством неподвижных точек $\text{Fix } \Theta \subset P$. Согласно [25] Θ имеет структуру $\Theta x = -x + a$, причем $Aa = a$. Введем в Γ $[\bar{\Gamma}]$ отношение эквивалентности $\sim$, считая, что $(A_1, P_1) \sim (A_2, P_2)$ $[(A_1, P_1, \Theta_1) \sim (A_2, P_2, \Theta_2)]$, если существует такое линейное отображение $\Psi: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$, являющееся суперпозицией группового автоморфизма и торового сдвига, что $A_2 = \Psi A_1 \Psi^{-1}$, $P_2 = \Psi P_1$

$[A_2 = \Psi A_1 \Psi^{-1}, P_2 = \Psi P_1, \Theta_2 = \Psi \Theta_1 \Psi^{-1}]$. Класс эквивалентности пары [тройки] называется классом ориентируемого [неориентируемого] аттрактора.

ТЕОРЕМА ДИНАМИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ [27]. *Каждому ориентируемому [неориентируемому] растягивающемуся гиперболическому аттрактору Λ коразмерности один диффеоморфизма $f: M \rightarrow M$, $\dim M > 1$, достижимая граница которого состоит из связок степеней, не больших двух, соответствует класс ориентируемого [неориентируемого] аттрактора. Пусть аттракторы рассматриваемого вида Λ_i , $i = 1, 2$, порождаются диффеоморфизмами $f_i: M_i \rightarrow M_i$, тогда ограничения диффеоморфизмов f_i на области притяжения их аттракторов топологически сопряжены тогда и только тогда, когда совпадают классы аттракторов Λ_1 и Λ_2 .*

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\dim M > 2$, то достижимые границы аттракторов рассматриваемого вида удовлетворяют условиям сформулированной теоремы [25].

Далее будем обозначать через $\Lambda(A, P)$ [$\Lambda(A, P, \Theta)$] ориентируемый [неориентируемый] аттрактор, порожденный парой (A, P) [тройкой (A, P, Θ)], через $W^s \Lambda(A, P)$ [$W^s \Lambda(A, P, \Theta)$] будем обозначать области притяжения аттракторов $\Lambda(A, P)$ [$\Lambda(A, P, \Theta)$].

Через $\overline{W^s \Lambda(A, P)}$ будем обозначать конечноточечную компактификацию области притяжения ориентируемого аттрактора $\Lambda(A, P)$, которая существует и гомеоморфна тору [24].

2. О структуре централизаторов целочисленных матриц с гиперболическим спектром

2.1. ТЕОРЕМА [26]. *Пусть $\mathbf{A}$ – гиперболический автоморфизм тора, определяемый целочисленной матрицей, обладающей неприводимым характеристическим многочленом и спектром*

$$\text{Spec } \mathbf{A} = \{\lambda_1(\mathbf{A}), \lambda_2(\mathbf{A}), \dots, \lambda_k(\mathbf{A}), \mu_1(\mathbf{A}), \overline{\mu}_1(\mathbf{A}), \dots, \mu_s(\mathbf{A}), \overline{\mu}_s(\mathbf{A})\},$$

где $\lambda_i(\mathbf{A})$ – вещественные, $\mu_i(\mathbf{A})$ – комплексные числа. Тогда централизатор $Z(\mathbf{A})$ изоморфен группе $\mathbb{Z}^m \oplus F$, где $1 \leq m \leq k + s - 1$, F – конечная коммутативная группа ($s = 0$ – случай вещественного спектра, $k = 0$ – случай комплексного спектра). Заметим, что вследствие леммы Гаусса [8] условия о неприводимости характеристического многочлена выполнены для всех целочисленных матриц, соответствующих гиперболическим автоморфизмам тора коразмерности один.

Доказательство теоремы использует следующую лемму.

2.2. ЛЕММА. *Пусть $\mathbf{A}$ удовлетворяет условиям теоремы, $\mathbf{B} \in Z(\mathbf{A})$ – целочисленная невырожденная матрица. Тогда $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имеют одинаковый набор собственных векторов, задающих базис в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, и обратно, если невырожденная целочисленная матрица $\mathbf{B}$ имеет хотя бы один общий с $\mathbf{A}$ собственный вектор, то $\mathbf{B} \in Z(\mathbf{A})$. Координаты собственного вектора матрицы $\mathbf{A}$ рационально независимы. Если целочисленные невырожденные*

матрицы $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \in Z(\mathbf{A})$ и их собственные числа при каком-то общем собственном векторе совпадают или отличаются знаком, то $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$ или $\mathbf{B}_1 = -\mathbf{B}_2$.

Доказательство леммы вытекает из того, что если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{f}_1, \bar{\mathbf{f}}_1, \dots, \mathbf{f}_s, \bar{\mathbf{f}}_s$ – базис, составленный из собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$, то $\mathbf{B}\mathbf{e}_1, \mathbf{B}\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{B}\mathbf{e}_k, \mathbf{B}\mathbf{f}_1, \mathbf{B}\bar{\mathbf{f}}_1, \dots, \mathbf{B}\mathbf{f}_s, \mathbf{B}\bar{\mathbf{f}}_s$ – также базис собственных векторов $\mathbf{A}$ с теми же собственными значениями. Докажем рациональную независимость координат любого собственного вектора $\mathbf{e}$. Заметим, что $(\mathbf{e}, \bar{\mathbf{x}}) = 0$ определяет инвариантное относительно сопряженного преобразования $\mathbf{A}'$ $(n-1)$ -мерное подпространство Π . Если координаты $\mathbf{e}$ не являются рационально независимыми, то существует такой целочисленный вектор $\bar{\mathbf{m}}$, что $(\mathbf{e}, \bar{\mathbf{m}}) = 0$, т.е. $\bar{\mathbf{m}} \in \Pi$. Из размерностных соображений существует зависимость $\mathbf{A}'^{(n-1)}\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{c}\mathbf{A}'^{(n-2)}\bar{\mathbf{m}} + \dots + \mathbf{d}\mathbf{A}'\bar{\mathbf{m}} + \mathbf{l}\bar{\mathbf{m}}$, откуда следует существование многочлена $\mathbf{p}(\lambda)$ $(n-1)$ -й степени с рациональными коэффициентами такого, что матрица $\mathbf{p}(\mathbf{A})$ аннулирует вектор. Этим же свойством обладает характеристический многочлен, который, таким образом, делится на $\mathbf{p}(\lambda)$ вопреки неприводимости. Отсюда следует, что если матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имеют общий собственный вектор $\mathbf{e}$, то в случае $\mathbf{A}\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\mathbf{A}$ соотношение $(\mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{e} = 0$ порождает нетривиальную рациональную зависимость между координатами $\mathbf{e}$, что невозможно. Аналогично доказывается заключительное утверждение леммы.

Для доказательства теоремы заметим, что согласно лемме спектр

$$\text{Спекс } \mathbf{B} = \{\lambda_1(\mathbf{B}), \dots, \lambda_k(\mathbf{B}), \rho_1(\mathbf{B})e^{i2\pi\varphi_1(\mathbf{B})}, \dots, \rho_s(\mathbf{B})e^{i2\pi\varphi_s(\mathbf{B})}, \rho_s(\mathbf{B})e^{-i2\pi\varphi_s(\mathbf{B})}\}$$

матрицы $\mathbf{B} \in Z(\mathbf{A})$ восстанавливает $\mathbf{B}$, при этом перемножению матриц соответствует покоординатное перемножение их спектров, которые, таким образом, образуют группу $\text{Спекс } Z(\mathbf{A})$, являющуюся подгруппой группы $\mathbb{R}_*^k \oplus \mathbb{C}_*^s$, где $\mathbb{R}_*$ ($\mathbb{C}_*$) – мультипликативная группа вещественных (комплексных) чисел.

Группа $\text{Спекс } Z(\mathbf{A})$ как подгруппа топологической группы дискретна, в чем убеждаемся, применяя теорему Виета к сходящейся последовательности точек $\text{Спекс } Z(\mathbf{A})$ и замечая вследствие целочисленности коэффициентов характеристических полиномов, соответствующих точкам этой последовательности, что число различных полиномов конечно вопреки бесконечности выбранной последовательности. Заметим также, что более короткие последовательности $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}, \rho_1, \dots, \rho_s, e^{i2\pi\varphi_1}, \dots, e^{i2\pi\varphi_s}\}$ в случае $k \geq 1$ (или $\{\rho_1, \dots, \rho_{s-1}, e^{i2\pi\varphi_1}, \dots, e^{i2\pi\varphi_s}\}$ при $k = 0$) также образуют дискретную подгруппу группы $\mathbb{R}_+^{k-1} \oplus \mathbb{R}_+^s \oplus \mathbb{T}^s$, где $\mathbb{R}_+$ – мультипликативная группа положительных вещественных чисел, $\mathbb{T}$ – мультипликативная группа комплексных чисел, равных по модулю 1. Эта группа изоморфна $\mathbb{R}^{k+s-1} \oplus \mathbb{Z}_2^{k-1} \oplus \mathbb{T}_1^s$ (соответственно $\mathbb{R}^{s-1} \oplus \mathbb{T}_1^s$), где $\mathbb{R}$ – аддитивная группа вещественных чисел, $\mathbb{T}_1$ – аддитивная группа классов вещественных чисел по модулю 1. Теорема вытекает из того, что структура дискретной подгруппы группы этого типа имеет вид $\mathbb{Z}^l \oplus F$, $1 \leq l \leq k+s-1$, F – коммутативная конечная группа [7; гл. 7, с. 182]. Заметим также, что в случае вещественного спектра ($s = 0$) централизатор $Z(\mathbf{A})$ изоморфен $\mathbb{Z}^l \oplus \mathbb{Z}_2^m$, $1 \leq l \leq k-1$, $1 \leq m \leq k-1$.

ПРИМЕР. Аносовский диффеоморфизм $\mathbf{A}: \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ задается матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

с характеристическим полиномом $p_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 1$ и

$$\text{Спес } \mathbf{A} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}, \quad \lambda_1 \in (-1, 0), \quad \lambda_2 \in (0, 1), \quad \lambda_3 = \frac{-1}{\lambda_1 \lambda_2} \in (2, 3).$$

Автоморфизм $\mathbf{B} = \mathbf{A} - I$ принадлежит $Z(\mathbf{A})$,

$$\text{Спес } \mathbf{B} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\},$$

$$\mu_1 = \lambda_1 - 1 \in (-2, -1), \quad \mu_2 = \lambda_2 - 1 \in (-1, 0), \quad \mu_3 = \lambda_3 - 1 \in (1, 2).$$

Рассмотрим последовательность автоморфизмов $\mathbf{A}^{k_i} \mathbf{B}^{l_i}$ такую, чтобы числовая последовательность $\lambda_1(\mathbf{A}^{k_i} \mathbf{B}^{l_i}) = \lambda_1^{k_i} \mu_1^{l_i}$ имела конечный предел, отличный от 0, при $k_i \rightarrow +\infty, l_i \rightarrow +\infty$. При этом $\lambda_2(\mathbf{A}^{k_i} \mathbf{B}^{l_i}) = \lambda_2^{k_i} \mu_2^{l_i} \rightarrow 0, \lambda_3(\mathbf{A}^{k_i} \mathbf{B}^{l_i}) = \lambda_3^{k_i} \mu_3^{l_i} \rightarrow \infty$.

Если бы было $Z(\mathbf{A}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, то $\mathbf{A}^{k_i} \mathbf{B}^{l_i} = \mathbf{C}^{m_i}$, $\mathbf{C}$ – гиперболический автоморфизм тора, и ни одна из последовательностей собственных чисел $\mathbf{C}^{m_i}$ не могла бы иметь конечного предела, отличного от нуля. Таким образом, $Z(\mathbf{A}) = \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_2^m$. Так как любая из образующих бесконечной подгруппы $Z(\mathbf{A})$ может быть взята со знаком + или –, то $m = 2$.

Заметим, что в рассмотренном примере $Z(\mathbf{A})$ состоит из гиперболических автоморфизмов тора и это всегда так, когда $\text{Спес } \mathbf{A}$ вещественный.

3. Соответствие связок при гомеоморфизме аттракторов и продолжение этих гомеоморфизмов на окружающие слоения

3.1. ТЕОРЕМА. Пусть $g: \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$ – гомеоморфизм растягивающихся аттракторов коразмерности один. Под действием g связка степени k аттрактора Λ_1 переходит в связку той же степени аттрактора Λ_2 .

Теорема следует из равномерной непрерывности отображения g и из доказанной ниже геометрической леммы.

Сначала приведем описание универсальной накрывающей области притяжения $W^s \Lambda$ растягивающегося аттрактора Λ , порожденного диффеоморфизмом $f: M \rightarrow M$, если $\dim M = n > 2$. Согласно [24] область притяжения $W^s \Lambda$ ориентируемого аттрактора Λ гомеоморфна n -тору, из которого выколото k точек по числу связок (в рассматриваемом случае все связки имеют степень 2), причем диффеоморфизм $f: M \rightarrow M$, ограниченный на область притяжения $W^s \Lambda$ аттрактора Λ , продолжается до гомеоморфизма $\bar{f}: \bar{W}^s \Lambda \rightarrow \bar{W}^s \Lambda$, где $\bar{W}^s \Lambda$ – конечноточечная компактификация $W^s \Lambda$, гомеоморфная n -тору.

Если Λ – неориентируемый аттрактор, то существует двуслойное накрытие его области притяжения областью притяжения ориентируемого аттрактора, причем накрытие переводит ориентируемый аттрактор на неориентируемый.

В результате приходим к структуре универсального накрытия $\pi: U \rightarrow W^s \Lambda$ с универсальной накрывающей U , гомеоморфной пространству $\mathbb{R}^n$, из которого выколото дискретное множество точек.

3.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЛЕММА. Пусть Λ – растягивающийся аттрактор ко-размерности один диффеоморфизма $f: M \rightarrow M$, где M – компактное многообразие. Справедливы следующие утверждения.

1) Для любой последовательности точек $\{x_i\}$, принадлежащих прообразу компоненты связности достижимой границы $D(M - \Lambda)$ относительно универсального накрытия $\pi: U \rightarrow W^s\Lambda$, удовлетворяющей условию $d(x_i, x_1) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, где d является метрикой U , индуцированной накрытием π (метрика $d(x, y)$ локально изометрична метрике, наследуемой $W^s\Lambda$ из M), длины дуг $[x_i, \vartheta x_i]^s$ стремятся к 0 при $i \rightarrow \infty$.

2) Существует такое число $r > 0$, что если C_1 и C_2 – компоненты связности множества $\pi^{-1}\Lambda$, хотя бы одна из которых (скажем, C_1) отлична от π -прообразов связки достижимой границы, то найдется такая последовательность $\{y_i\}$, $y_i \in C_1$, $d(y_i, y_1) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, что $d(y_i, C_2) \geq r$, где $d(y_i, C_2) = \inf_{y \in C_2} d(y_i, y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для установления справедливости первого утверждения леммы убедимся в том, что всякая компонента связности C достижимой границы $D(M - \Lambda)$ содержит граничную периодическую точку. Пусть $x_0 \in C$, не является граничной; воспользовавшись локальной структурой произведения множества Λ , найдем открытую дугу устойчивого многообразия этой точки $(x_0, x)^s \subset M - \Lambda$. Выберем сходящуюся последовательность $\{f^{-n_k}x_0\}$ с пределом $z_0 \in \Lambda$ и заметим, что одна из компонент связности множества $W^s(z_0) - z_0$ не содержит точек Λ и, следовательно, z_0 – граничная периодическая точка. Вследствие локальной структуры прямого произведения Λ найдется такое n_0 , что $f^{-n_0}x_0 \in W^u(z_0)$, откуда $W^u(f^{n_0}z_0) \subset C$, т.е. $f^{n_0}z_0 \in C$. Таким образом, каждая компонента связности C достижимой границы $D(M - \Lambda)$ содержит граничную периодическую точку. Если затем выбрать в C точку x , отличную от граничной, и провести через нее внутрь $M - \Lambda$ отрезок $[x, \vartheta x]^s \subset W^s(x)$ до первого выхода из области $M - \Lambda$ в точке $\vartheta x \in D(M - \Lambda)$, то в случае $\dim M > 2$ множество $C - p$ (p – граничная точка) связно, и поэтому точки ϑx принадлежат одной и той же компоненте $\vartheta C \subset D(M - \Lambda)$, которая, в частности, может совпасть с C .

В случае $\dim M = 2$ каждой из компонент $C - p$ будет соответствовать ϑ -компонента $D(M - \Lambda)$. Пусть k – период точки p , тогда ограничение диффеоморфизма f^k на некоторую окрестность точки p в многообразии C подобно линейному растяжению. Поэтому найдется замкнутая область $B \subset C - p$, ограниченная топологическими сферами $S, f^k S$, такая, что $C - p = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} f^{mk} B$. (Заметим, что в случае $\dim M = 2$ множество S состоит из пары точек.) При $\dim M > 2$ и если C – компонента 2-связки, приходим также к представлению $\vartheta C - \vartheta p = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} f^{mk} \vartheta B$, где ϑC – другая компонента рассматриваемой связки, а ϑp – принадлежащая ей граничная периодическая точка. Воспользовавшись свойствами диффеоморфизма f , удовлетворяющего на множестве Λ аксиоме А Смейла, приходим к выводу о неограниченном удалении произвольной точки множества $f^{mk} B$ от точки p во внутренней метрике $d_C(x, y)$ на многообразии C при росте m . Длины отрезков $f^{mk}[x, \vartheta x]^s$ (а следовательно, и длины $f^m[x, \vartheta x]^s$) равномерно убывают к нулю при $m \rightarrow +\infty$, причем $d_C(f^{mk}x, p) \rightarrow \infty$. Переходя на универсальную накрывающую множества $\bar{W}^s\Lambda$, получаем доказательство первого утверждения леммы.

Для доказательства второго утверждения также перейдем на универсальную на-

крывающую области притяжения аттрактора. Рассмотрим сначала случай $\dim M = n > 2$. Если рассмотреть часть Π универсальной накрывающей, заключенную между двумя связными прообразами неустойчивых многообразий, не образующих связки, то внутри ее обязательно найдутся пары связных прообразов неустойчивых многообразий аттрактора, отличные от границы Π и являющиеся прообразом связки степени 2. Каждый слой, ограниченный подобной парой, не содержит внутри прообразов точек аттрактора, и существует такое $r > 0$, что внутри слоя расположится шар радиуса r . Утверждение леммы вытекает из того, что подобных слоев внутри Π бесконечное множество.

Если $\dim M = 2$, то в случае пространной расположенности аттрактора прообразы неустойчивых многообразий при отражении универсального накрытия будут разбивать эту универсальную накрывающую, реализуемую в виде евклидовой или неевклидовой плоскости. (Напомним, что пространная расположенность равносильна нестягиваемости петли, проходящей через точки аттрактора и образованной двумя отрезками устойчивого и неустойчивого многообразий. Пространная расположенность не может случиться на сфере, проективной плоскости, на бутылке Клейна [22], [23].) Поэтому сохраняют силу аргументы, приведенные при рассмотрении случая $\dim M > 2$.

Невыполнение свойства пространной расположенности равносильно существованию стягиваемой петли, составленной отрезком устойчивого и отрезком неустойчивого многообразий какой-либо точки аттрактора. В этом случае из теоремы 2.1 [22] вытекает существование граничной периодической точки аттрактора, расположенной внутри или на границе рассматриваемой петли. Отсюда вытекает существование связки степени 1 рассматриваемого аттрактора. Изменяя диффеоморфизм внутри каждой 1-связки и ее образов под действием диффеоморфизма так, чтобы у нового диффеоморфизма внутри 1-связок появились нульмерные источники (по одному на каждую траекторию 1-связки), а затем выкалывая эти нульмерные источники из многообразия, приходим к пространной расположенности аттрактора на поверхности с конечным числом проколов, откуда и будет следовать применимость аргументов случая пространной расположенности. Лемма доказана полностью.

Для доказательства теоремы заметим, что из леммы следует инвариантность связок степени 2 при гомеоморфизме аттракторов. В случае $\dim M > 2$, поднимая гомеоморфизм до гомеоморфизма ориентируемых аттракторов, являющихся двуслойными накрытиями исходных, можно убедиться, что 1-связка также имеет в качестве образа компоненту линейной связности связки, которая составляет 1-связку вследствие характеристики связок степени 2 первым пунктом леммы. Случай $\dim M = 2$ и степени связки $k > 2$ рассматривается аналогично, вследствие того, что длины отрезков вида $[x, \partial x]^s$ стремятся к 0 по мере удаления x от граничной периодической точки.

Доказываемая ниже теорема редуцирует вопрос о гомеоморфизме аттракторов к вопросу о гомеоморфизме слоений коразмерности 1 на торе.

3.3. ТЕОРЕМА (о продолжении). *Если $g: \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$ — гомеоморфизм растягивающихся аттракторов Λ_1, Λ_2 , то g продолжается на области притяжения этих аттракторов. Если аттракторы Λ_1, Λ_2 ориентируемые и $\dim M = n > 2$, то гомеоморфизм f продолжается на конечноточечные компактификации этих областей притяжения, гомеоморфные n -торам.*

В соответствии с теоремой существования аттракторов и теоремой динамической классификации каждая из областей связки, будучи поднята на подходящее накрытие области притяжения (в случае $\dim M > 2$ это накрытие универсальное), обладает свойством звездной выпуклости и Θ -инвариантности. (Напомним, что инволюция Θ участвует в определении неориентируемых аттракторов.) Отсюда следует, что область любой связки степени > 1 может быть так расположена в $\mathbb{R}^n$ (или внутри круга при $\dim M = 2$), что отрезки, соединяющие начало координат с точками связок, будут целиком расположены внутри области связки, и к тому же область связки будет центральносимметрична относительно начала координат (или центра круга). В случае связки степени 1 область может рассматриваться как результат факторизации некоторой связки степени 2, симметричной относительно начала координат (или центра круга).

Зафиксируем для наглядности какое-либо представление 2-связки $\{C, \vartheta C\}$ в $\mathbb{R}^n$, например, посредством гиперповерхностей $x_n = \exp\{-\alpha^2 \sum_1^{n-1} x_k^2\}$ для C и $x_n = -\exp\{-\alpha^2 \sum_1^{n-1} x_k^2\}$ для ϑC , тогда область 2-связки будет состоять из множества точек $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих неравенству $|x_n| \leq \exp\{-\alpha^2 \sum_1^{n-1} x_k^2\}$, $\sum_1^n x_k^2 \neq 0$. При этом точка, добавляемая в каждую область 2-связки при конечноточечной компактификации, превращающей область притяжения ориентируемого аттрактора, достижимая граница которого состоит лишь из 2-связок, в тор, может быть выбрана совпадающей с началом координат.

Область 1-связки можно считать гомеоморфной во внутренней метрике результату факторизации области 2-связки относительно центральной симметрии. Что касается области k -связки при $k > 2$ (в этом случае $\dim M = 2$), то ее можно описать в виде центрально-симметричной области, порожденной вращением на угол $\frac{2\pi}{k}$ фигуры, образованной углом, равным $\frac{2\pi}{k}$, с центром в начале координат, и кривой, асимптотической в двух своих направлениях сторонам угла, — она будет компонентой связки.

Заметим, что гомеоморфизм аттракторов порождает равномерно непрерывный гомеоморфизм прообразов связок при отображении универсального накрытия. Воспользовавшись описанной выше формой связок, будем отображать отрезок $[0, a]$, соединяющий начало координат с точкой a прообраза связки, аффинным образом на отрезок $[0, f(a)]$, где $f(a)$ — прообраз точки $f\pi(a)$, ближайшей к началу координат (здесь π — универсальное накрытие). Полученное отображение не определено на множестве точек $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$. В случае, когда аттрактор обладает связками степеней, превосходящих 2, оно не определено также на прямых, соединяющих начало координат с точками абсолюта, порожденными связками (в этом случае $\dim M = 2$ и M отлично от сферы, проективной плоскости, тора и бутылки Клейна). Однако это отображение представляет собой равномерный гомеоморфизм области своего определения и поэтому может быть продолжено по непрерывности до гомеоморфизма областей, порожденных прообразами областей связок. Затем воспользуемся гомеоморфизмом внутренних ядер прообразов областей связок и придем к существованию продолжения гомеоморфизма $f: \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$ со связок на области связок, откуда и вытекает справедливость утверждения теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один включается в слоение коразмерности один (как это следует из формулируемой

ниже теоремы 3.4), то доказанная теорема о продолжении сводит вопрос о гомеоморфизме аттракторов данного типа к вопросу о топологической эквивалентности этих слоений.

3.4. ТЕОРЕМА (о вложении ориентируемого растягивающегося аттрактора коразмерности один в инвариантное слоение). Пусть Λ – связный ориентируемый аттрактор растягивающегося типа коразмерности один диффеоморфизма $f: M \rightarrow M$, $\dim M = n > 1$, и пусть достижимая граница $D(M - \Lambda)$ состоит из связок степени 2. Тогда:

- 1) многообразие $W^s \Lambda$ гомеоморфно n -тору, из которого выколото k точек;
- 2) существует конечноточечная компактификация $\overline{W}^s \Lambda \supset W^s \Lambda$, гомеоморфная n -тору, при этом ограничение диффеоморфизма f на $W^s \Lambda$ продолжается до гомеоморфизма $\bar{f}: \overline{W}^s \Lambda \rightarrow \overline{W}^s \Lambda$;
- 3) многообразие $\overline{W}^s \Lambda$ допускает два $\bar{f}$ -инвариантных слоения: одно размерности один с листами, гомеоморфными $\mathbb{R}$ во внутренней метрике, включающее в качестве листов устойчивые многообразия точек аттрактора Λ , другое – коразмерности один с листами, гомеоморфными во внутренней метрике $\mathbb{R}^{n-1}$, включающее в качестве листов неустойчивые многообразия аттрактора Λ ;
- 4) если дополнительно на $W^s \Lambda$ действует непрерывная инволюция φ , не имеющая неподвижных точек и перестановочная с f , то она продолжается до непрерывной инволюции $\bar{\varphi}: \overline{W}^s \Lambda \rightarrow \overline{W}^s \Lambda$, перестановочной с $\bar{f}$;
- 5) если в каждой φ -инвариантной области, порожденной φ -инвариантной связкой достижимой границы $D(M - \Lambda)$, найдется φ -инвариантное многообразие, трансверсальное одномерным устойчивым многообразиям точек аттрактора Λ , которое, будучи пополнено точкой, добавляемой при компактификации, гомеоморфно $\mathbb{R}^{n-1}$ и инвариантно относительно некоторой итерации диффеоморфизма f , то вышеуказанные слоения могут быть сделаны $\bar{\varphi}$ - и $\bar{f}$ -инвариантными, причем слоение коразмерности один будет содержать в качестве листов эти φ -инвариантные многообразия, пополненные периодическими точками, добавляемыми при компактификации $W^s \Lambda$.

4. О топологической классификации слоений коразмерности один без предельных циклов на торах

В доказательстве основных теорем будут использованы результаты теории Перова–Эгле–Жужомы, посвященной топологической классификации слоений без предельных циклов на n -торе [20], [45]. Тор рассматривается как фактор-группа $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$, $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ – универсальное накрытие.

Пусть задано уравнение $\omega = dy - \sum_i p_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y) dx_i = 0$ на $\mathbb{R}^n$, где коэффициенты p_i удовлетворяют условиям полной интегрируемости, $p_i(x_1 + m_1, \dots, x_{n-1} + m_{n-1}, y + m) = p_i(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$, m_i, m – целые числа. Уравнение $\omega = 0$ на $\mathbb{R}^n$ определяет слоение $\overline{S}$, накрывающее слоение S на $\mathbb{T}^n$. Слой слоения $\overline{S}$ определяется уравнением вида $y = y(x_1, \dots, x_{n-1}, \eta)$, удовлетворяющим условиям:

$$\begin{aligned} y(0) &= \eta, & y(x_1 + m_1, \dots, x_{n-1} + m_{n-1}, \eta) &= y(x_1, \dots, x_{n-1}, y(m_1, \dots, m_{n-1}, \eta)), \\ y(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \eta + m) &= y(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \eta) + m. \end{aligned}$$

В работе [45] доказаны существование и единственность линейного функционала $\lambda_S: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ (так называемого функционала вращения слоения S), для которого

$$y(x_1, \dots, x_{n-1}, \eta) = \eta + \lambda_S(x_1, \dots, x_{n-1}) + \alpha(x_1, \dots, x_{n-1}, \eta),$$

где

$$\lambda_S(x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_i \lambda_i x_i, \quad \frac{\alpha(x_1, \dots, x_{n-1}, \eta)}{\sqrt{\sum x_i^2}} \rightarrow 0, \quad \sum x_i^2 \rightarrow \infty,$$

причем функционал λ_S не зависит от слоя. Нам понадобятся функционалы иррационального типа, т.е. такие, что при любом наборе $(m_1, \dots, m_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ число $\sum \lambda_i m_i$ иррационально.

Форма ω называется элементарной, если ее коэффициенты p_i константы.

Слоение называется транзитивным, если существует всюду плотный в $\mathbb{T}^n$ слой, и сингулярным, если имеется минимальное множество слоения, нигде не плотное в $\mathbb{T}^n$ и не имеющее компактного слоя. Транзитивное слоение на $\mathbb{T}^n$ с функционалом вращения иррационального типа является слоением без предельных циклов, причем каждый слой гомеоморфен $\mathbb{R}^{n-1}$. В работе [20] доказано, что транзитивное слоение на $\mathbb{T}^n$ с функционалом вращения иррационального типа топологически эквивалентно слоению, задаваемому элементарной формой с тем же функционалом вращения. В сингулярном случае полная топологическая классификация слоений получена в работе [45], результаты которой цитируются ниже.

В лемме 3.1 [45] для сингулярного слоения S на $\mathbb{T}^n$ без предельных циклов с функционалом вращения иррационального типа и слоения S_0 , задаваемого элементарной формой с тем же функционалом вращения, определено непрерывное гомотопное тождественному отображение $h: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$, которое переводит слои слоения S на слои слоения S_0 , а также отображает минимальное множество Ω слоения S на весь тор $\mathbb{T}^n$. Кроме того, если $D(\mathbb{T}^n - \Omega)$ – достижимая граница множества $\mathbb{T}^n - \Omega$, то отображение h является гомеоморфизмом множества $\Omega - D(\mathbb{T}^n - \Omega)$. Пусть $\chi(S) = hD(\mathbb{T}^n - \Omega)$. Это множество, состоящее из целых слоев слоения S_0 , называется характеристическим множеством слоения S . Основная теорема Жужомы [45] утверждает, что сингулярные слоения S_1 и S_2 на $\mathbb{T}^n$ без предельных циклов гомеоморфны тогда и только тогда, когда их характеристические множества $\chi(S_1), \chi(S_2)$ соизмеримы, т.е. существует такое линейное отображение $\Psi: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ вида $\Psi x = Cx + \xi$, где C – целочисленная матрица с определителем, равным 1 по абсолютной величине, что $\Psi(\chi(S_1)) = \chi(S_2)$.

Применим изложенную теорию к слоениям, возникающим при действии гиперболических автоморфизмов тора коразмерности 1. Уравнения слоев этих слоений имеют вид $y = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i + \eta$. Пусть A – подобный автоморфизм. Слой неустойчивого (для определенности) слоения, проходящий через нулевую точку, может быть записан в виде $(\bar{x}, \bar{a}) = 0$, где $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y)$, $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, -1)$, $(\bar{x}, \bar{y})$ – стандартное скалярное произведение. Условие A -инвариантности этой плоскости имеет вид $(A\bar{x}, \bar{a}) = (\bar{x}, A'\bar{a}) = (\bar{x}, \alpha\bar{a}) = 0$, где A' – сопряженный оператор оператору A . Отсюда приходим к выводу о том, что $\bar{a}$ – собственный вектор оператора A' , соответствующий минимальному по модулю собственному значению. Действительно, пусть $e, e_1, \dots, e_{n-1}$ – собственные векторы оператора A , соответствующие собственным значениям $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, где $|\lambda| < 1, |\lambda_i| > 1$. Матрица $A'A'$ имеет тот же самый спектр собственных значений, причем можно считать, что соответственный набор собственных векторов $f, f_1, \dots, f_{n-1}$ обладает следующими свойствами:

$(e, f) = (e_i, f_i) = 1, i = 1, 2, \dots, n-1, (e, f_i) = (f, e_i) = (f_i, f_j) = 0, i \neq j$. Поэтому если $\alpha \neq \lambda$, то $\alpha = \lambda_i, \bar{a} = f_i, (e_i, \bar{a}) = \left(\frac{Ae_i}{\lambda_i}, \bar{a}\right) = (e_i, f_i) = 1$, вопреки тому, что e_i принадлежит неустойчивому многообразию $(\bar{x}, \bar{a}) = 0$.

Пусть $\Lambda(A, P)$ – ориентируемый аттрактор, $\overline{W}^s \Lambda(A, P)$ – компактификация его области притяжения, гомеоморфная n -тору [24], [25]. Пусть $f^{A, P}: \overline{W}^s \Lambda(A, P) \rightarrow \overline{W}^s \Lambda(A, P)$ есть DA -дiffeоморфизм, порождающий этот аттрактор. Определим, следуя Р. Френксу [10], отображение $h: \overline{W}^s \Lambda(A, P) \rightarrow \overline{W}^s \Lambda(A, P)$. Для него справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} hf^{A, P} &= Ah, \quad hW^s(x, f^{A, P}) = W^s(hx, A), \\ hW^u(x, f^{A, P}) &= W^u(hx, A), \quad h\Lambda(A, P) = \overline{W}^s \Lambda(A, P), \end{aligned}$$

кроме того, h – гомеоморфизм на множестве $\Lambda(A, P) - D(\overline{W}^s \Lambda(A, P) - \Lambda(A, P))$ [25].

В случае, когда на множестве $\overline{W}^s \Lambda(A, P)$ действует инволюция Θ , перестановочная с $f^{A, P}$ и A , имеем дополнительно $h\Theta = \Theta h$. Из перечисленных свойств следует, что для граничных периодических точек одной 2-связки $p_j^i, \vartheta p_j^i$ имеет место $hp_j^i = h\vartheta p_j^i$ и $P = \cup hp_j^i$. Если при этом $\vartheta p_j^i = \Theta p_j^i$, то $hp_j^i \in \text{Fix } \Theta$. В соответствии с теоремой 3.4 возможно включение аттрактора $\Lambda(A, P)$ в слоение $S\Lambda(A, P)$ многообразия $\overline{W}^s \Lambda(A, P)$, причем если на $\overline{W}^s \Lambda(A, P)$ и $\Lambda(A, P)$ действует инволюция Θ , то полученное слоение будет также Θ -инвариантным. Аттрактор $\Lambda(A, P)$ является минимальным множеством сингулярного слоения $S\Lambda(A, P)$, а соответствующее этому слоению элементарное слоение $S(A)$ будет определено семейством неустойчивых многообразий $W^u(x, A), x \in \overline{W}^s \Lambda(A, P)$. В качестве характеристического множества слоения $S\Lambda(A, P)$ действует множество $hD(\overline{W}^s \Lambda(A, P) - \Lambda(A, P))$, совпадающее с объединением $\bigcup_{p \in P} (W^u(0, A) + p)$. Сформулируем теорему Жужомы [45] применительно к слоению тора, включающему в себя неустойчивые многообразия аттрактора $\Lambda(A, P)$, образующие минимальное множество этого слоения.

4.1. ТЕОРЕМА ЖУЖОМЫ. Пусть ориентируемые аттракторы $\Lambda(A_1, P_1)$ и $\Lambda(A_2, P_2)$ погружены в сингулярные слоения торов $S\Lambda(A_1, P_1)$ и $S\Lambda(A_2, P_2)$ соответственно. Эти слоения (а вместе с ними и аттракторы) гомеоморфны тогда и только тогда, когда существует такое линейное отображение n -тора $\Psi(x) = Cx + \xi$, что $\Psi W^u(0, A_1) = W^u(0, A_2)$, $\Psi P_1 = P_2$.

5. Доказательство основных теорем. Примеры

Перейдем к точным формулировкам и доказательству основных теорем.

5.1. ТЕОРЕМА. Рассмотрим ориентируемые (неориентируемые) растягивающиеся аттракторы $\Lambda(A_1, P_1)$ и $\Lambda(A_2, P_2)$ ($\Lambda(A_1, P_1, \Theta_1)$ и $\Lambda(A_2, P_2, \Theta_2)$) коразмерности один, достижимые границы которых состоят из связок степеней, не превосходящих двух. Рассматриваемые пары ориентируемых (неориентируемых) аттракторов гомеоморфны тогда и только тогда, когда существует такое линейное отображение n -тора $\Psi(x) = Cx + \xi$, что $\Psi A_1 \Psi^{-1} \in Z(A_2)$, $\Psi P_1 = P_2$ (а в неориентируемом случае дополнительно $\Theta_2 = \Psi \Theta_1 \Psi^{-1}$), и при этом собственные числа одинаковых собственных векторов матриц $\Psi A_1 \Psi^{-1}$

и A_2 одинаково расположены по отношению к единичной окружности с центром в нуле комплексной плоскости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем необходимость условий теоремы для случая ориентируемых аттракторов.

Пусть $g: \Lambda(A_1, P_1) \rightarrow \Lambda(A_2, P_2)$ – гомеоморфизм ориентируемых аттракторов. Согласно теореме 3.3 о продолжении существует гомеоморфизм $G: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$, продолжающий g . Гомеоморфизм G переводит слоение $S\Lambda(A_1, P_1)$, существующее согласно теореме 3.4, в сингулярное слоение $GS\Lambda(A_1, P_1)$ тора $\mathbb{T}^n$, которое содержит в качестве слоев неустойчивые многообразия точек аттрактора $\Lambda(A_2, P_2)$. Элементарные слоения слоений $S\Lambda(A_1, P_1)$ и $GS\Lambda(A_1, P_1)$ обозначим соответственно через $S(A_1)$ и $S(A_2)$. Вследствие теоремы 4.1 существует такое линейное отображение $\Psi x = Cx + \xi$, что

$$\Psi \left(\bigcup_{p \in P_1} [W^u(0, A_1) + p] \right) = \bigcup_{p \in P_2} [W^u(0, A_2) + p],$$

откуда следует, что $\Psi P_1 = P_2$ и $CW^u(0, A_1) = W^u(0, A_2)$. Переходя в случае необходимости к соответствующим степеням A_1, A_2 , можно считать, что $\xi \cup P_1 \cup P_2 \subset \text{Fix } CA_1C^{-1} \cap \text{Fix } A_2$, поэтому $\Psi A_1 \Psi^{-1} = CA_1C^{-1}$ и матрицы CA_1C^{-1} и A_2 имеют общие собственные векторы, собственные числа которых лежат вне стандартной единичной окружности комплексной плоскости, откуда следует $\Psi A_1 \Psi^{-1} \in Z(A_2)$ и одинаковая расположенность собственных чисел этих матриц по отношению к стандартной окружности.

Убедимся в достаточности условий теоремы в ориентируемом случае. Если для аттракторов $\Lambda(A_1, P_1), \Lambda(A_2, P_2)$ существует такое линейное отображение $\Psi x = Cx + \xi$, что $\Psi A_1 \Psi^{-1} \in Z(A_2)$, $\Psi P_1 = P_2$ и собственные числа матриц $\Psi A_1 \Psi^{-1}$ и A_2 одинаково расположены по отношению к стандартной единичной окружности, то, заменяя в случае необходимости матрицы A_1, A_2 некоторыми их степенями, можно считать, что $P_1 \cup P_2 \cup \xi \subset \text{Fix } CA_1C^{-1} \cap \text{Fix } A_2$. Отсюда следует, что

$$\Psi A_1 \Psi^{-1} = CA_1C^{-1} \in Z(A_2), \quad W^u(0, CA_1C^{-1}) = CW^u(0, A_1) = W^u(0, A_2).$$

Но тогда $\Psi(W^u(0, A_1) + P_1) = W^u(0, A_2) + CP_1 + \xi = P_2$ и согласно теореме 4.1 имеем гомеоморфизм слоений $S\Lambda(A_1, P_1), S\Lambda(A_2, P_2)$, откуда следует гомеоморфность порождающих их аттракторов.

Перейдем к рассмотрению неориентируемых аттракторов. Докажем необходимость условий теоремы.

Пусть неориентируемые аттракторы $\Lambda(A_1, P_1, \Theta_1)$ и $\Lambda(A_2, P_2, \Theta)$ гомеоморфны. Согласно теореме 3.3 существует гомеоморфизм $g: W^s\Lambda(A_1, P_1, \Theta_1) \rightarrow W^s\Lambda(A_2, P_2, \Theta)$, продолжающий этот гомеоморфизм до гомеоморфизма областей притяжения рассматриваемых аттракторов. Гомеоморфизм g поднимается на двуслойные накрытия этих областей, т.е. существует гомеоморфизм $G: W^s\Lambda(A_1, P_1) \rightarrow W^s\Lambda(A_2, P_2)$, для которого $\pi G = g\pi$, где π – отображение двуслойного накрытия. (Существование двуслойного накрытия и его свойства обсуждаются в [25].) Согласно уже доказанной части теоремы существует линейное отображение Ψ , действующее на торе, являющемся компактификацией областей притяжения накрывающих ориентируемых аттракторов, такое, что $\Psi(W^u(0, A_1) + P_1) = W^u(0, A_2) + P_2$,

$\Psi A_1 \Psi^{-1} \in Z(A_2)$, $\Psi P_1 = P_2$. При этом имеется соответствие друг другу 1-связок при гомеоморфизме g , переходящее в соответствие при отображении Ψ Θ -инвариантных 2-связок, принадлежащих $\overline{W}^s \Lambda(A, P)$. Согласно теореме 3.4 аттрактор $\Lambda(A_1, P_1)$ погружается в Θ_1 -инвариантное слоение многообразия $\overline{W}^s \Lambda(A_1, P_1)$. В соответствии с теоремой 3.3 найдется гомеоморфизм $\overline{G}: \overline{W}^s \Lambda(A_1, P_1) \rightarrow \overline{W}^s \Lambda(A_2, P_2)$, осуществляющий гомеоморфизм уже описанного слоения на слоение многообразия $\overline{W}^s \Lambda(A_2, P_2)$, включающего в себя аттрактор $\Lambda(A_2, P_2)$.

При этом если $h_i: \overline{W}^s \Lambda(A_i, P_i) \rightarrow \mathbb{T}^n$ — отображение Френкса [10], то множества $h_i D(\overline{W}^s \Lambda(A_i, P_i) - \Lambda(A_i, P_i))$ как характеристические множества этих слоений отображаются друг на друга посредством линейного отображения Ψ Жужомы. Отображение h_i склеивает Θ_i -инвариантные связки, превращая их в неустойчивое многообразие автоморфизма A_i , проходящее через неподвижную точку инволюции, откуда следует

$$\Psi \operatorname{Fix} \Theta_1 = \operatorname{Fix} \Theta_2. \quad (1)$$

Воспользуемся структурой инволюции, переходя при необходимости на универсальную накрывающую. Имеем

$$\Theta_i x = -x + a_i, \quad a_i \in \operatorname{Fix} A_i, \quad \operatorname{Fix} \Theta_i = \left\{ \frac{a_i}{2} + \frac{i_1, i_2, \dots, i_n}{2} \right\}$$

(см. [25]). Докажем, что

$$\Psi \Theta_1 \Psi^{-1} = \Theta_2. \quad (2)$$

Действительно,

$$\Psi \Theta_1 (C^{-1}x - C^{-1}\xi) = \Psi(-C^{-1}x + C^{-1}\xi + a_1) = -x + 2\xi + Ca_1.$$

Из (1) следует

$$\Psi \left(\frac{a_1}{2} \right) = \frac{a_2}{2} + \frac{i_1, i_2, \dots, i_n}{2}, \quad \text{или} \quad C \frac{a_1}{2} + \xi = \frac{a_2}{2} + \frac{i_1, i_2, \dots, i_n}{2}.$$

Но тогда $\Psi \Theta_1 \Psi^{-1}(x) = -x + a_2 + (i_1, i_2, \dots, i_n) - 2C \frac{a_1}{2} + Ca_1$, откуда и следует (2).

Убедимся теперь в достаточности условий теоремы 5.1 для гомеоморфности неориентируемых аттракторов. Пусть $\Lambda(A_1, P_1, \Theta_1)$ и $\Lambda(A_2, P_2, \Theta_2)$ — растягивающиеся неориентируемые аттракторы, для которых существует такое линейное отображение $\Psi(x) = Cx + \xi$, что $\Psi A_1 \Psi^{-1} \in Z(A_2)$, $\Psi P_1 = P_2$, $\Psi \Theta_1 \Psi^{-1} = \Theta_2$ и выполнено условие одинаковости расположения спектров рассматриваемых матриц относительно стандартной окружности. Без ограничения общности можно считать, переходя в случае надобности к другому аттрактору того же класса топологической сопряженности, что $A_1 \in Z(A_2)$, $P_1 = P_2 = P$, $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$.

Пусть $\pi_{\Theta_i} W^s \Lambda(A_i, P) \rightarrow W^s \Lambda(A_i, P, \Theta)$ — двуслойные накрытия областей притяжения этих аттракторов областями притяжения соответствующих им ориентируемых аттракторов [25]. Пусть $h_i: \overline{W}^s \Lambda(A_i, P) \rightarrow \mathbb{T}^n$ — отображения Френкса, для которых выполнены условия коммутативности

$$h_i f^{A_i, P} = A_i h_i. \quad (3)$$

Рассмотрим отображение $g = h_2^{-1}h_1$. Повторяя аргументы доказательства теоремы 3 [24], приходим к выводу о возможности продолжения g до гомеоморфизма $G: \Lambda(A_1, P) \rightarrow \Lambda(A_2, P)$. Дело в том, что отображение h_i переводит устойчивые и неустойчивые многообразия точек аттрактора $\Lambda(A_i, P)$ соответственно на устойчивые и неустойчивые многообразия автоморфизма A_i , проходящие через h_i -образы точек $\mathbb{T}^n$. Из доказанных в [24] свойств h_i следует, что если отрезок $[x, y]^s \subset W^s(x_0, f^{A_i, P})$ содержит внутри себя точку из $\Lambda(A_i, P)$, то $[x, y]^s \cap \Lambda(A_i, P)$ представляет собой канторов дисконтинуум, в котором всюду плотным множеством будут точки пересечения этого отрезка с неустойчивыми многообразиями периодических точек $\Lambda(A_i, P)$, при этом равенство $h_i(x) = h_i(y)$ возможно, лишь если $y = \vartheta x$, т.е. x и y принадлежат различным компонентам 2-связки.

Отображение h_i вдоль всех отрезков $[x, y]^s$, $x \in W^u(x_0, f^{A_i, P})$, $y \in W^u(y_0, f^{A_i, P})$, $x_0, y_0 \in \Lambda(A_i, P)$, подобно монотонной функции типа “канторовой лестницы”, оно монотонно отображает множество $\Lambda(A_i, P) - D(M - \Lambda(A_i, P))$ в множество, состоящее из неустойчивых многообразий гиперболического автоморфизма A_i , среди которых отсутствуют связки достижимых границ. Учитывая эту структуру h_i , можно считать, что его можно продолжить на весь аттрактор $\Lambda(A_i, P)$, при этом $h_i\Lambda(A_i, P) = \mathbb{T}^n$.

Отображение $h_i\Theta h_i^{-1}$, определенное на $\mathbb{T}^n - \bigcup_{p \in P} W^u(p, A_i)$, также может быть продолжено по непрерывности до отображения $\bar{\Theta}_i: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$, являющегося инволюцией. Воспользовавшись соотношением (3), убеждаемся в справедливости цепочки равенств

$$A_i h_i \Theta h_i^{-1} = h_i f^{A_i, P} \Theta h_i^{-1} = h_i \Theta h_i^{-1} h_i f^{A_i, P} h_i^{-1},$$

которая, будучи продолжена “по непрерывности”, даст $A_i \bar{\Theta}_i = \bar{\Theta}_i A_i$. Отсюда согласно теореме Арова [4] следует, что $\bar{\Theta}_i$ — линейная инволюция, совпадающая вследствие гомотопности отображения h_i тождественному с Θ . Из равенства $G\Theta = \Theta G$, которое получается из предельного перехода в цепочке равенств

$$g\Theta = h_2^{-1}h_1\Theta = h_2^{-1}h_1\Theta h_1^{-1}h_1 = h_2^{-1}\Theta h_1 = h_2^{-1}\Theta h_2 h_2^{-1}h_1 = \Theta g,$$

следует, что G порождает гомеоморфизм $\bar{G}: \Lambda(A_1, P, \Theta) \rightarrow \Lambda(A_2, P, \Theta)$. Теорема 5.1 доказана полностью.

ТЕОРЕМА 5.2. *Ориентируемые аттракторы $\Lambda(A_1, P_1)$ и $\Lambda(A_2, P_2)$, где P_i — неподвижные точки A_i , $i = 1, 2$, гомеоморфны тогда и только тогда, когда найдется такое отображение $\Psi(x) = C(x + \xi)$, что $\Psi A_1 \Psi^{-1} \in Z(A_2)$ и точки спектров матриц $\Psi A_1 \Psi^{-1}$ и A_2 , соответствующие одинаковым собственным векторам, одинаково расположены относительно стандартной единичной окружности комплексной плоскости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если эти аттракторы гомеоморфны, то согласно теореме 5.1 подобное отображение Ψ существует. Докажем обратное утверждение.

Пусть существует такое линейное отображение $\Psi(x) = C(x + \xi)$, что $\Psi A_1 \Psi^{-1} \in Z(A_2)$ и выполнено условие одинаковой расположенности спектров матриц $\Psi A_1 \Psi^{-1}$ и A_2 относительно стандартной единичной окружности.

Докажем, что найдется такое линейное отображение Ψ_1 , которое будет обладать всеми свойствами отображения Ψ и дополнительно $\Psi_1(P_1) = P_2$, откуда и будет следовать гомеоморфность аттракторов $\Lambda(A_1, P_1)$ и $\Lambda(A_2, P_2)$. Заменим пару $\{A_1, P_1\}$

эквивалентной ей (в смысле класса аттрактора) парой $\{A, P\}$, где $A = \Psi A_1 \Psi^{-1}$, $P = \Psi(P_1)$ (напомним, что $\Psi A_1 \Psi^{-1}$ – матрица при условии $A_1 \xi = \xi$). Подберем такое отображение $\varphi(x) = x + \eta$, что $\varphi A \varphi^{-1} \in Z(A_2)$, $\varphi(P) = P_2$. Переходя в случае необходимости к некоторым степеням матриц A и A_1 , можно считать, что $P \cup P_2 \subset \text{Fix } A \cap \text{Fix } A_2$. Так как $\varphi A \varphi^{-1}(x) = Ax - A\eta + \eta$, необходимо, чтобы $\eta \in \text{Fix } A$. Положим $\eta = P_2 - P$, тогда

$$\varphi(P) = P + P_2 - P = P_2, \quad A(\eta) = A(P_2) - A(P) = P_2 - P = \eta.$$

Отображение $\Psi_1(x) = \varphi \circ \Psi(x)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 5.1, поэтому рассматриваемые аттракторы гомеоморфны.

ТЕОРЕМА 5.3. *Неориентируемые аттракторы $\Lambda(A_1, P_1, \Theta_1)$ и $\Lambda(A_2, P_2, \Theta_2)$, где $P_i = \text{Fix } \Theta_i$, $i = 1, 2$, гомеоморфны тогда и только тогда, когда найдется такое линейное отображение n -тора Ψ , что $\Psi A_1 \Psi^{-1} \in Z(A_2)$, при этом точки спектров матриц $\Psi A_1 \Psi^{-1}$ и A_2 , соответствующие одинаковым собственным векторам, одинаково расположены относительно стандартной единичной окружности комплексной плоскости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если рассматриваемые аттракторы гомеоморфны, то утверждение теоремы следует из теоремы 5.1. Докажем обратное: если существует такое линейное отображение $\Psi(x) = C(x + \xi)$, что $\Psi A \Psi^{-1} \in Z(A_2)$ и спектры матриц $\Psi A_1 \Psi^{-1}$ и A_2 обладают указанным в теореме свойством, то найдется линейное отображение Ψ_1 , которое обладает свойствами Ψ и дополнительно $\Psi_1 \text{Fix } \Theta_1 = \text{Fix } \Theta_2$, $\Psi_1 \Theta_1 \Psi_1^{-1} = \Theta_2$. Заменим тройку $\{A_1, \text{Fix } \Theta_1, \Theta_1\}$ эквивалентной ей тройкой из того же класса аттрактора $\{A, \text{Fix } \Theta, \Theta\}$, где $A = \Psi A_1 \Psi^{-1}$, $\text{Fix } \Theta = \Psi \text{Fix } \Theta_1$, $\Theta = \Psi \Theta_1 \Psi^{-1}$. Тогда $A \in Z(A_2)$ и можно считать, переходя при необходимости к соответствующим степеням матриц A , A_2 , что выполнено

$$\text{Fix } \Theta \cup \text{Fix } \Theta_2 \subset \text{Fix } A \cap \text{Fix } A_2. \quad (4)$$

Подберем линейное отображение $\varphi(x) = x + \eta$ таким образом, чтобы $\varphi A \varphi^{-1} \in Z(A_2)$, $\varphi \text{Fix } \Theta = \text{Fix } \Theta_2$. Напомним, что

$$\text{Fix } \Theta = \left\{ \frac{a}{2} + \frac{i_1, i_2, \dots, i_n}{2} \right\}, \quad \text{Fix } \Theta_2 = \left\{ \frac{a_2}{2} + \frac{i_1, i_2, \dots, i_n}{2} \right\},$$

$$i_k \in \{0, 1\}, \quad a \in \text{Fix } A, \quad a_2 \in \text{Fix } A_2, \quad \Theta x = -x + a, \quad \Theta_2 x = -x + a_2.$$

Выберем $\eta = \frac{a_2}{2} - \frac{a}{2}$, тогда

$$\varphi \left(\frac{a}{2} + \frac{i_1, i_2, \dots, i_n}{2} \right) = \frac{a}{2} + \frac{i_1, i_2, \dots, i_n}{2} + \frac{a_2}{2} - \frac{a}{2} \in \text{Fix } \Theta_2,$$

т.е. $\varphi \text{Fix } \Theta = \text{Fix } \Theta_2$. Остается проверить равенства $\varphi \Theta \varphi^{-1} = \Theta_2$, $\varphi A \varphi^{-1} \in Z(A_2)$. Заметим, что согласно (4) $A \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$, $A_2 \frac{a_2}{2} = \frac{a_2}{2}$, поэтому

$$\varphi \Theta \varphi^{-1}(x) = \varphi \Theta \left(x - \frac{a_2}{2} + \frac{a}{2} \right) = -x + \frac{a_2}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a_2}{2} - \frac{a}{2} = \Theta_2(x).$$

Вычисляя $\varphi A \varphi^{-1}(x) = Ax - \frac{a_2}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a_2}{2} - \frac{a}{2} = Ax$, приходим к $\varphi A \varphi^{-1} \in Z(A_2)$. Отображение $\Psi_1 = \varphi \circ \Psi$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 5.1, откуда и следует гомеоморфность рассматриваемых аттракторов. Теорема доказана.

Примеры

ПРИМЕР 1. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

которые являются образующими централизатора $Z(A) = \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_2^2$ в соответствии с разделом II.2. Пусть e_1, e_2, e_3 – общий для этих матриц базис собственных векторов. Если $C \in Z(A)$, то будем обозначать через $\lambda_i(C)$ собственное значение матрицы C при собственном векторе e_i . Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \lambda_1(A) &\in (-1, -0.5), & \lambda_2(A) &\in (0.5, 1), & \lambda_3(A) &\in (2, 3), \\ \lambda_1(B) &\in (-2, -1.5), & \lambda_2(B) &\in (-0.5, 0), & \lambda_3(B) &\in (1, 2), \\ \lambda_1(AB^2) &\in (-2, -1), & \lambda_2(AB^2) &\in (0, 0.25), & \lambda_3(AB^2) &\in (10, 11), \\ \lambda_1(B^3) &\in (-8, -4), & \lambda_2(B^3) &\in (-0.2, 0), & \lambda_3(B^3) &\in (1, 8). \end{aligned}$$

Таким образом, матрицы AB^2, A^2B^4, B^3 , имеющие общий централизатор, обладают свойством одинаковой расположенности соответственных собственных значений относительно окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Нетрудно проверить также, что точки

$$P_1 = -P_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \text{ составляют единственную периодическую траекторию периода 2 автоморфизма тора } A \text{ и являются неподвижными для } B, \text{ точка } P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

входит в множество неподвижных точек аносовского диффеоморфизма, порожденного матрицей B , состоящее из 27 точек вида $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix}, \delta_i \in \{0, 1, 2\}$.

Заметив, что в соответствии с теоремой 5.2 ориентируемые аттракторы $\Lambda(A^2B^4, 0)$ и $\Lambda(B^3, P_1)$ гомеоморфны, несмотря на то что порождающие их матрицы не являются степенью какой-либо одной матрицы, докажем негомеоморфность аттракторов $\Lambda_1 = \Lambda(A^2B^4, \{0, P_2\})$ и $\Lambda_2 = \Lambda(B^3, \{P_1, P_3\})$. Для этого в соответствии с теоремой 5.1 необходимо привести к противоречию возможность существования такого линейного отображения $\Psi(x) = C(x + \delta)$, что $\Psi B^3 \Psi^{-1} \in Z(A)$ и $\Psi(P_1) \cup \Psi(P_3) = \{0, P_2\}$. Так как $\Psi B^3 \Psi^{-1}(x) = C B^3 C^{-1} x - C(B^3 \delta - \delta)$ – матрица, то $B^3 \delta = \delta$, и точка δ – одна из 27 неподвижных точек отображения тора B^3 . Вследствие того, что $\Psi B^3 \Psi^{-1} = C B^3 C^{-1} \in Z(A) = Z(B)$, имеем $C B^3 C^{-1} = \pm A^k B^m$, где k, m – целые числа. Но тогда $\lambda(B^3) = \lambda_1^3(B) = \pm \lambda_1^k(A) \lambda_1^m(B)$, что возможно лишь при $m = 3, k = 0$, поэтому $C B^3 C^{-1} = \pm B^3$, т.е. $C \in Z(B)$ и $C = \pm A^n B^r, \Psi(x) = \pm A^n B^r(x + \delta)$. Для гомеоморфности аттракторов Λ_1 и Λ_2 необходимо выполнение хотя бы одной из следующих возможностей: 1) $\Psi(P_1) = 0, \Psi(P_3) = P_2$, 2) $\Psi(P_3) = 0, \Psi(P_1) = P_2$. Рассмотрим первую возможность:

$$\Psi(P_1) = \pm A^n B^r(P_1 + \delta) = 0 \quad \text{или} \quad \pm \frac{1}{3} A^n B^r \begin{pmatrix} 1 + \delta_1 \\ 2 + \delta_2 \\ 1 + \delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \\ k_1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что применение матриц A и B к целочисленным векторам может привести к целочисленному вектору с общим делителем его координат, равным 3 лишь в случае, когда исходный вектор обладает этим свойством, поэтому $\delta_1 = 2$, $\delta_2 = 1$, $\delta_3 = 2$. Но тогда $\Psi(P_3) = \pm A^n B^r \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} = P_2$ или $\pm A^n \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} = P_2$.

При n четном (нечетном) справедливо противоречивое равенство $P_2 = \pm \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ ($P_1 = \pm \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}$), что приводит к противоречию возможность выполнения первого случая. Аналогично проверяется невозможность выполнения второго случая.

ПРИМЕР 2. В соответствии с теоремой 5.3 аттракторы

$$\Lambda_1 = \Lambda(A^2 B^4, \{\text{Fix } \Theta\}, \Theta), \quad \Lambda_2 = \Lambda(B^3, \{\text{Fix } \Theta\}, \Theta),$$

где

$$\Theta(x) = -x, \quad \text{Fix } \Theta = \left\{ \frac{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}}{2} \right\}, \quad a_i \in \{0, 1\},$$

гомеоморфны. Убедимся в негомеоморфности аттракторов

$$\Lambda^1 = \Lambda(A^2 B^4, \{P_1, -P_1, \text{Fix } \Theta\}, \Theta), \quad \Lambda^2 = \Lambda(B^3, \{P_3, -P_3, \text{Fix } \Theta\}, \Theta).$$

Аналогично рассуждениям примера 1 приходим к выводу о том, что линейное отображение Ψ , существующее в случае гомеоморфности этих аттракторов, должно иметь вид $\Psi(x) = \pm A^n B^r(x + \delta)$, где для точки δ должна быть выполнена хотя бы одна из 27 возможностей, описанных в примере 1. Для гомеоморфности аттракторов Λ^1 и Λ^2 необходимо, чтобы для отображения Ψ выполнялась хотя бы одна из следующих возможностей: 1) $\Psi(P_3) = \pm P_1$, 2) $\Psi(P_3) \in \text{Fix } \Theta$. В первом случае имеем $P_1 = \pm A^n B^r(P_3 + \delta)$ или $P_1 = \pm A^n(P_3 + \delta)$. В зависимости от четности n имеем $P_1 = \pm(P_3 + \delta)$, откуда $\delta = \pm P_1 - P_3$, т.е. $\delta \neq 0$ и имеет структуру $\delta = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \delta_{i_1} \\ \delta_{i_2} \\ \delta_{i_3} \end{pmatrix}$, противоречащую равенству

$$\Psi(0) = \pm \frac{1}{3} A^n B^r \begin{pmatrix} \delta_{i_1} \\ \delta_{i_2} \\ \delta_{i_3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{i_1} \\ a_{i_2} \\ a_{i_3} \end{pmatrix} \in \text{Fix } \Theta, \quad \delta_i \in \{0, 1, 2\}, \quad a_i \in \{0, 1\}.$$

Второй случай также приводит к противоречивому равенству $\Psi(P_3) = \pm A^n B^r(P_3 + \delta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{i_1} \\ a_{i_2} \\ a_{i_3} \end{pmatrix}$, так как $\Psi(P_3)$ имеет структуру $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$, где числа m_i не могут иметь

общего делителя, равного 3, если $\delta \neq -P_3$. Если же $\delta = -P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$, то не выполнено условие теоремы 5.1 $\Theta = \Psi \Theta \Psi^{-1}$.

6. Доказательство теоремы о вложении ориентируемого растягивающегося аттрактора в инвариантное слоение

Сначала докажем ослабленный вариант теоремы, когда справедливы все ее заключения, но при этом $\overline{W^s \Lambda}$ имеет гомотопический тип тора.

Построим фундаментальные системы окрестностей точек, добавляемых при компактификации $W^s \Lambda$. Пусть

$$\{C_1 \cup \vartheta C_1\}, \{C_2 \cup \vartheta C_2\}, \dots, \{C_{k_1} \cup \vartheta C_{k_1}\}, \dots, \\ \{C_{k_1+k_2+\dots+k_i+j} \cup \vartheta C_{k_1+k_2+\dots+k_i+j}\}, \dots, \{C_{\sum_{i=1}^r k_i} \cup \vartheta C_{\sum_{i=1}^r k_i}\}$$

(r – число орбит связок, k_i – период i -й орбиты, $k = \sum k_i$) – совокупность всех связок достижимой границы $\mathcal{D}(M - \Lambda)$. Связки занумерованы так, что

$$fC_{k_1+k_2+\dots+k_i+j} = C_{k_1+k_2+\dots+k_i+j+1} f \vartheta C_{k_1+k_2+\dots+k_i+j} = \vartheta C_{k_1+k_2+\dots+k_i+j+1}, \\ f(C_{k_1+k_2+\dots+k_{i+1}} \cup \vartheta C_{k_1+k_2+\dots+k_{i+1}}) = C_{k_1+k_2+\dots+k_{i+1}} \cup \vartheta C_{k_1+k_2+\dots+k_{i+1}}, \\ j \leq k_{i+1} - 1.$$

Выберем в каждом C_{m_i} , $m_i = \sum_{j=1}^i k_j$, $i \in \overline{1, r}$, множество B_{m_i} , содержащее граничную точку p_{m_i} вместе с ее окрестностью во внутренней метрике C_{m_i} , так, чтобы множество $D := \bigcup_{m=1}^k D_m$, где

$$D_m = \bigcup_{x \in B_{m_i+1}} f^{m-m_{i+1}} \{[x, \vartheta x]^s \cup W_1^s(p_{m_{i+1}}) \cup W_1^s(\vartheta p_{m_{i+1}})\}$$

($m_i + 1 \leq m \leq m_{i+1}$, $m_0 = 0$), удовлетворяло условию $f(D) \supset D$. (Здесь $W_1^s(p_{m_i})$ – компонента линейной связности множества $W^s(p_{m_i}) - \{p_{m_i}\}$, не содержащая точек Λ , к которой присоединена точка p_{m_i} , ϑp_{m_i} – граничная периодическая точка компоненты ϑC_{m_1} , множество $W_1^s(\vartheta p_{m_i})$ определено аналогично $W_1^s(p_{m_i})$ с заменой C_{m_i} на ϑC_{m_i} .) Для этого заметим сначала, что k_{i+1} – наименьшее положительное целое число, для которого $f^{k_{i+1}}(D_m) \cap D_m \neq \emptyset$, если $m_i + 1 \leq m \leq m_{i+1}$, и что общий период точек p_m , ϑp_m равен k_{i+1} либо $2k_{i+1}$, причем в последнем случае $f^{k_{i+1}}p_m = \vartheta p_m$.

Рассмотрим случай, когда период $p_{m_{i+1}}$ равен k_{i+1} . В качестве $B_{m_{i+1}}$ выберем открытый шар во внутренней метрике $C_{m_{i+1}}$, содержащий $p_{m_{i+1}}$, для которого $f^{k_{i+1}}B_{m_{i+1}} \supset B_{m_{i+1}}$, и положим $B_m = f^{m-m_{i+1}}B_{m_{i+1}}$, $m_i + 1 \leq m \leq m_{i+1}$.

Если же период $p_{m_{i+1}}$ равен $2k_{i+1}$, то

$$f^{k_{i+1}}p_m = \vartheta p_m, \quad f^{k_{i+1}}\vartheta p_m = p_m.$$

Обозначим через $B'_{m_{i+1}}$ открытый шар многообразия $C_{m_{i+1}}$, содержащий $p_{m_{i+1}}$, для которого $f^{k_{i+1}}B'_{m_{i+1}} \supset \vartheta B'_{m_{i+1}}$, $f^{2k_{i+1}}B'_{m_{i+1}} \supset B'_{m_{i+1}}$, и положим $B_{m_{i+1}} = B'_{m_{i+1}} \cap f^{k_{i+1}}\vartheta B'_{m_{i+1}}$, $B_m = f^{m-m_{i+1}}B_{m_{i+1}}$, $m_i + 1 \leq m \leq m_{i+1}$, $i \in \overline{0, r}$. Включение $f(D) \supset D$ выполнено вследствие указанных выше включений.

Воспользовавшись гиперболическостью Λ , выберем для каждого j , $m_j + 1 \leq j \leq m_{j+1}$, такую пару множеств $D_j^1 = \bigcup_{x \in B_j} [x, \alpha(x)]^s$, $D_j^2 = \bigcup_{x \in \vartheta B_j} [x, \alpha(x)]^s$, чтобы область $G_j = D_j - (D_j^1 \cup D_j^2)$ удовлетворяла условию $f^{-k_{i+1}}G_j \subset G_j$, при этом

можно считать, что $\alpha(x) \in W^s \Lambda - \Lambda$ непрерывно зависит от x . Совокупность множеств $f^{-m_{i+1}} G_j$, $m_i + 1 \leq j \leq m_{i+1}$, может быть выбрана в качестве фундаментальной системы окрестностей, добавляемой при компактификации точки q_j , соответствующей связке $\{C_j \cup \partial C_j\}$. Нетрудно видеть, что диффеоморфизм $f: W^s \Lambda \rightarrow W^s \Lambda$ продолжается до гомеоморфизма $\bar{f}: \bar{W}^s \Lambda \rightarrow \bar{W}^s \Lambda$, $\bar{W}^s \Lambda = W^s(\Lambda) \cup \bigcup_{j=1}^k q_j$, при этом $\bar{f}q_j = q_{j+1}$, если $m_i + 1 \leq j < m_{i+1}$, $\bar{f}q_{m_{i+1}} = q_{m_i+1}$. Кроме того, нетрудно убедиться также в том, что если на $W^s(\Lambda)$ действует непрерывная инволюция φ , перестановочная с f , то она продолжается в также непрерывную инволюцию $\bar{\varphi}$ многообразия $\bar{W}^s \Lambda$, при этом неподвижными относительно $\bar{\varphi}$ станут те из добавляемых при компактификации точек, которые соответствуют φ -инвариантным связкам достижимой границы $\mathcal{D}(M - \Lambda)$.

Требуемое одномерное слоение многообразия $\bar{W}^s \Lambda$ составлено либо устойчивыми многообразиями относительно диффеоморфизма f точек, отличных от граничных периодических, либо объединениями пар устойчивых многообразий соответственных граничных периодических точек, к которым добавляются соответствующие этим парам точки q_i .

Построение слоения коразмерности 1 проведем сначала в случае отсутствия инволюции, перестановочной с f . Построим на каждом из множеств $D_{m_{i+1}} \cup q_{m_{i+1}}$ слоение $\{w_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ коразмерности 1, удовлетворяющее для слоев w_t , $0 \leq t \leq 1$, условию инвариантности $\bar{f}^{-k_{i+1}} w_t \subset w_{t'}$, распространяя далее это слоение на множество

$$\bigcup_{i=0}^{r-1} \bigcup_{j=m_i+1}^{m_{i+1}} \bigcup_{l \geq 0} f^{lk_{i+1}+j} D_{m_{i+1}}.$$

Если добавить к слоям построенного слоения неустойчивые многообразия точек Λ , то придем к $\bar{f}$ -инвариантному слоению коразмерности 1 многообразия $\bar{W}^s \Lambda$, каждый из слоев которого гомеоморфен $\mathbb{R}^{n-1}$, так как может быть получен как объединение возрастающей последовательности топологических $(n-1)$ -шаров. Поэтому в рассматриваемом случае без ограничения общности можно считать, что $\bar{f}D_{m_{i+1}} \supset D_{m_{i+1}}$, $\bar{f}q_{m_{i+1}} = q_{m_i+1}$, и строить на $D_{m_{i+1}}$ $\bar{f}$ -инвариантное слоение.

Введем в $D_{m_{i+1}} \cup q_{m_{i+1}}$ систему координат (x, t) , $x \in V \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $0 \leq t \leq 1$, такую, что V гомеоморфно $B_{m_{i+1}}$. Пусть $U = \{(x, t) : x \in V, t \in [0, 1]\}$, $V_t = \{(x, t) : x \in V\}$, определим гомеоморфизм

$$F: U \rightarrow D_{m_{i+1}} \cup q_{m_{i+1}}, \quad i \in \overline{0, r-1},$$

такой, что

$$\begin{aligned} F(0, 0) &= p_{m_{i+1}}, & F(0, 1/2) &= q_{m_{i+1}}, & F(0, 1) &= \vartheta p_{m_{i+1}}, \\ F(x, t) &\in W^s(F(x, 0); \bar{f}), & FV_0 &= B_{m_{i+1}}, & FV_1 &= \vartheta B_{m_{i+1}} \end{aligned}$$

(здесь $W^s(y; \bar{f})$ – слой $\bar{f}$ -инвариантного одномерного слоения, проходящий через y).

Согласно сделанным предположениям достаточно построить на U слоение $\{W_t\}$ коразмерности 1, включающее в качестве слоев V_0 , V_1 , такое, что каждый его слой переводится гомеоморфизмом $g^{-1} = F^{-1} \circ \bar{f}^{-1} \circ F$ в слой того же слоения, а затем положить $w_t = FW_t$. Случай 1. Выполнены включения $g^{-1}V_i \subset V_i$, $i \in \{0, 1\}$.

Если выбрать достаточно малое число $\varepsilon \in (0, 1)$, то никакие два множества, принадлежащие семействам $\{g^{-m}V_\varepsilon\}$, $\{g^{-m}V_{1-\varepsilon}\}$, $m \geq 0$, не пересекутся и могут быть представлены соответственно в виде графиков двух непрерывных функций $\{f_m(x)\}$, $\{\bar{f}_m(x)\}$, $m \geq 0$, определенных на множестве $g^{-m}V_0$. При этом $g^{-m}V_\varepsilon$ и $g^{-m}V_{1-\varepsilon}$, гомеоморфные $(n-1)$ -шарам, будут сходиться в хаусдорфовой метрике при $m \rightarrow \infty$ к точке $(0, 1/2)$. Для $m \geq 0$ определим включения $g^{-m}V_\varepsilon \subset V^m$, $g^{-m}V_{1-\varepsilon} \subset \bar{V}^m$, где V^m и $\bar{V}^m$ суть графики непрерывных функций $F_m: V_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{F}_m: V_0 \rightarrow \mathbb{R}$, продолжающих соответственно функции f_m и $\bar{f}_m$ и удовлетворяющих следующим условиям:

$$\varepsilon \leq F_m(x) \leq 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon \leq \bar{F}_m(x) \leq 1 - \varepsilon, \quad x \in V_0, \quad m \geq 0; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \inf(F_{m+1}(x) - F_m(x)) &> 0, \\ \inf(\bar{F}_m(x) - \bar{F}_{m+1}(x)) &> 0, \quad x \in V_0; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \inf(\bar{F}_m(x) - F_m(x)) &> 0, \\ \sup(\bar{F}_m(x) - F_m(x)) &\rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty; \end{aligned} \quad (3)$$

$$g^{-1}V^m \subset V^{m+1}, \quad g^{-1}\bar{V}^m \subset \bar{V}^{m+1}. \quad (4)$$

Заметим, что последовательности $\{f_m(x)\}$ и $\{\bar{f}_m(x)\}$ могут быть заменены двумя последовательностями непрерывных функций $\{f_{m,0}(x)\}$ и $\{\bar{f}_{m,0}(x)\}$ соответственно, такими, что $f_{m,0}(x)$ и $\bar{f}_{m,0}(x)$ определены на открытом множестве $g^{-m}V'_0$, причем $V'_0 \supset \text{clos } V_0$ и при этом $f_m(x) = f_{m,0}(x)$, $\bar{f}_m(x) = \bar{f}_{m,0}(x)$, $x \in V_0$, и графики $V^{m,0}$, $\bar{V}^{m,0}$ этих функций образуют последовательности $\{V^{m,0}\}_{m \geq 0}$, $\{\bar{V}^{m,0}\}_{m \geq 0}$ попарно непересекающихся множеств, удовлетворяющих условию $gV^{m+1,0} = V^{m,0}$, $g\bar{V}^{m+1,0} = \bar{V}^{m,0}$.

Пусть $F_0(x) = f_0(x)$, $\bar{F}_0(x) = \bar{f}_0(x)$. Если $m \geq 1$, то функции $F_m(x)$, $\bar{F}_m(x)$ определим с помощью последовательностей непрерывных функций $f_{m,0}, f_{m,1}, \dots, f_{m,m}(x) = F_m(x)$, $\bar{f}_{m,0}, \bar{f}_{m,1}, \dots, \bar{f}_{m,m}(x) = \bar{F}_m(x)$ таких, что $f_{m,k}(x)$, $\bar{f}_{m,k}(x)$ определены на $g^{k-m}V'_0$, $f_{m,k+1}(x) = f_{m,k}(x)$, $\bar{f}_{m,k+1}(x) = \bar{f}_{m,k}(x)$, $x \in g^{k-m}V'_0$, и выполнены следующие условия:

(a₁) существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$\varepsilon \leq f_{m,k}(x) \leq 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon \leq \bar{f}_{m,k}(x) \leq 1 - \varepsilon, \quad x \in g^{k-m}V'_0;$$

(a₂)

$$\begin{aligned} \inf(f_{m+1,k+1}(x) - f_{m,k}(x)) &> 0, \\ \inf(\bar{f}_{m,k}(x) - f_{m,k}(x)) &> 0, \quad x \in g^{k-m}V'_0, \quad 0 \leq k \leq m; \\ \inf(\bar{f}_{m,k}(x) - \bar{f}_{m+1,k+1}(x)) &> 0, \end{aligned}$$

(a₃)

$$\sup_{x \in g^{k-m}V'_0} (\bar{f}_{m,k}(x) - f_{m,k}(x)) \leq \sup_{x \in g^{-m}V'_0} (\bar{f}_{m,0}(x) - f_{m,0}(x)) + \varepsilon_m,$$

где $\varepsilon_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$;

(a_4) если $V^{m,k}$ ($\bar{V}^{m,k}$) — график функции $f_{m,k}(x)$ ($\bar{f}_{m,k}(x)$), то

$$V^{m,k} = gV^{m+1,k}, \quad \bar{V}^{m,k} = g\bar{V}^{m+1,k}.$$

Если для некоторого $m \geq 1$ определены последовательности $\{f_{m,k}(x)\}$ и $\{\bar{f}_{m,k}(x)\}$, $0 \leq k \leq m$, то можно определить одновременно последовательности $\{f_{m-1,l}(x)\}$, $\{\bar{f}_{m-1,l}(x)\}$, $0 \leq l \leq m-1$, следующим образом. Пусть $g(x,t) = (g_1(x), g_2(x,t))$, положим

$$f_{m-1,k}(x) = g_2(g_1^{-1}(x), f_{m,k}(g_1^{-1}x)), \quad \bar{f}_{m-1,k}(x) = g_2(g_1^{-1}(x), \bar{f}_{m,k}(g_1^{-1}x))$$

(заметим, что g_1^{-1} существует, так как g_1 совпадает с ограничением диффеоморфизма g на $g^{k+1-m}V'_0$).

В предположении, что уже построены последовательности

$$f_{m,0}(x), f_{m,1}(x), \dots, f_{m,k}(x); \bar{f}_{m,0}(x), \bar{f}_{m,1}(x), \dots, \bar{f}_{m,k}(x),$$

$k < m$, а вместе с ними и последовательности

$$f_{m-1,0}(x), f_{m-1,1}(x), \dots, f_{m-1,k}(x); \bar{f}_{m-1,0}(x), \bar{f}_{m-1,1}(x), \dots, \bar{f}_{m-1,k}(x)$$

и при этом

$$\begin{aligned} f_{m,i+1}(x) &= f_{m,i}(x), \quad \bar{f}_{m,i+1}(x) = \bar{f}_{m,i}(x), \quad x \in g^{i-m}V'_0, \\ \inf(f_{m,k}(x) - f_{m-1,k-1}(x)) &> 0, \\ \inf(\bar{f}_{m-1,k-1}(x) - \bar{f}_{m,k}(x)) &> 0, \\ \inf(\bar{f}_{m,k}(x) - f_{m,k}(x)) &> 0, \\ \sup_{x \in g^{k-m}V'_0} (\bar{f}_{m,k}(x) - f_{m,k}(x)) &\leq \sup_{x \in g^{-m}V'_0} (\bar{f}_{m,0}(x) - f_{m,0}(x)) + \sum_{i=1}^{k-1} \tau_{m,i}, \end{aligned}$$

где числа $\tau_{m,i} \in (0,1)$ могут быть выбраны сколь угодно малыми, выберем непрерывную функцию $\alpha_{m,k}(x)$, определенную на V'_0 и удовлетворяющую следующим требованиям:

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha_{m,k}(x) \leq 1, \quad x \in V'_0, \quad g^{k-m}V_0 \subset \text{supp } \alpha_{m,k}(x) \subset g^{k-m}V'_0, \\ \alpha_{m,k}(x) = 1, \quad x \in \text{clos } g^{k-m}V'_0. \end{aligned}$$

Число $\tau_{m,k} \in (0,1)$ найдем в процессе проверки свойств функций $f_{m,k+1}(x)$ и $\bar{f}_{m,k+1}(x)$, продолжающих соответственно функции $f_{m,k}(x)$, $\bar{f}_{m,k}(x)$ и определенных по формулам:

$$\begin{aligned} f_{m,k+1}(x) &= \alpha_{m,k}(x)f_{m,k}(x) + (1 - \alpha_{m,k}(x))(1 - \tau_{m,k})\bar{f}_{m-1,k}(x), \\ \bar{f}_{m,k+1}(x) &= \alpha_{m,k}(x)\bar{f}_{m,k}(x) + (1 - \alpha_{m,k}(x))(1 + \tau_{m,k})f_{m,k+1}(x). \end{aligned}$$

Докажем неравенства

$$\begin{aligned}\inf(f_{m,k+1}(x) - f_{m-1,k}(x)) &> 0, \\ \inf(\bar{f}_{m-1,k}(x) - \bar{f}_{m,k+1}(x)) &> 0, \\ \inf(\bar{f}_{m,k+1}(x) - \bar{f}_{m,k+1}(x)) &> 0,\end{aligned}$$

$$x \in g^{k+1-m}V'_0,$$

$$\sup_{x \in g^{k+1-m}V'_0} (\bar{f}_{m,k+1}(x) - f_{m,k+1}(x)) \leq \sup_{x \in g^{-m}V'_0} (\bar{f}_{m,0}(x) - f_{m,0}(x)) + \sum_{i=1}^k \tau_{m,i}.$$

Так как

$$\begin{aligned}f_{m,k+1}(x) - f_{m-1,k}(x) &= \alpha_{m,k}(x)(f_{m,k}(x) - f_{m-1,k}(x)) \\ &+ (1 - \alpha_{m,k}(x))((1 - \tau_{m,k})\bar{f}_{m-1,k}(x) - f_{m-1,k}(x))\end{aligned}$$

и

$$\inf_{x \in \text{supp } \alpha_{m,k}(x)} (f_{m,k}(x) - f_{m-1,k}(x)) = \inf_{x \in \text{supp } \alpha_{m,k}(x)} (f_{m,k}(x) - f_{m-1,k-1}(x)) > 0,$$

то, выбирая $\tau_{m,k} \leq \inf(\bar{f}_{m-1,k}(x) - f_{m-1,k}(x))$, приходим к справедливости первого неравенства.

Аналогичным образом доказывается, что

$$\beta_{m,k} = \inf_{x \in g^{k+1-m}V'_0} (\bar{f}_{m-1,k}(x) - f_{m,k+1}(x)) > 0$$

и если $\tau_{m,k} \leq \beta_{m,k}$, то

$$\inf(\bar{f}_{m-1,k}(x) - \bar{f}_{m,k+1}(x)) > 0, \quad x \in g^{k+1-m}V'_0.$$

Воспользовавшись тождеством

$$\bar{f}_{m,k+1}(x) - f_{m,k+1}(x) = \alpha_{m,k}(x)(\bar{f}_{m,k}(x) - f_{m,k+1}(x)) + (1 - \alpha_{m,k}(x))\tau_{m,k}f_{m,k+1},$$

убедимся в справедливости

$$\inf_{x \in g^{k+1-m}V'_0} (\bar{f}_{m,k+1}(x) - f_{m,k+1}(x)) > 0.$$

Наконец,

$$\sup_{x \in g^{k+1-m}V'_0} (\bar{f}_{m,k+1}(x) - f_{m,k+1}(x)) \leq \sup_{x \in g^{k-m}V'_0} (\bar{f}_{m,k}(x) - f_{m,k}(x)) + \tau_{m,k},$$

откуда следует

$$\sup_{x \in g^{k+1-m}V'_0} (\bar{f}_{m,k+1}(x) - f_{m,k+1}(x)) \leq \sup_{x \in g^{-m}V'_0} (\bar{f}_{m,0}(x) - f_{m,0}(x)) + \sum_{i=1}^k \tau_{m,i}.$$

Для $l \leq m-1$ функция $f_{l,i}$ (соответственно $\bar{f}_{l,i}$) получается из $f_{l+1,i}$ ($\bar{f}_{l+1,i}$) тем же путем, каким $f_{m-1,i}$ ($\bar{f}_{m-1,i}$) получалась из $f_{m,i}$ ($\bar{f}_{m,i}$), при этом

$$f_{0,0}(x) < f_{l,i}(x) < \bar{f}_{l,i}(x) < \bar{f}_{0,0}(x),$$

$x \in g^{i-l}V'_0$, $i \leq l$, и, выбирая $\varepsilon := \min\{\inf_{x \in V'_0} f_{0,0}(x), 1 - \sup_{x \in V'_0} \bar{f}_{0,0}(x)\}$, приходим к справедливости условий $(a_1)-(a_4)$ для функций $f_{k,i}(x)$, $\bar{f}_{k,i}(x)$ при $k \leq m$.

Построение функций $F_k(x) = f_{k,k}(x)$, $\bar{F}_k(x) = \bar{f}_{k,k}(x)$ при $k > m$ осуществим следующим образом. Беря в качестве отправных функций $F_m(x) = f_{m,m}(x)$, $\bar{F}_m(x) = \bar{f}_{m,m}(x)$, определим последовательности непрерывных функций (используя методику построения последовательностей $f_{m,0}(x)$, $\bar{f}_{m,0}(x)$)

$$\begin{aligned} \Phi_{0,0}^m(x) &= F_m(x), \Phi_{1,0}^m(x), \dots, \Phi_{k,0}^m(k), \dots, \\ \bar{\Phi}_{0,0}^m(x) &= \bar{F}_m(x), \bar{\Phi}_{1,0}^m(x), \dots, \bar{\Phi}_{k,0}^m(k), \dots, \end{aligned}$$

определенных соответственно на последовательности множеств

$$V'_0 \supset g^{-1}V'_0 \supset \dots \supset g^{-k}V'_0 \supset \dots,$$

причем графики $V_m^{k,0}$ (а также $\bar{V}_m^{k,0}$) функций $\Phi_{k,0}^m$ (соответственно $\bar{\Phi}_{k,0}^m$) связаны условиями $g(V_m^{k+1,0}) = V_m^{k,0}$, $g(\bar{V}_m^{k+1,0}) = \bar{V}_m^{k,0}$.

Применяя к функциям $\Phi_{m_1,0}^m$, $\bar{\Phi}_{m_1,0}^m$ уже известный процесс продолжения, придем к функциям $F_{m+m_1}(x)$, $\bar{F}_{m+m_1}(x)$, продолжаящим $f_{m+m_1}(x)$ и $\bar{f}_{m+m_1}(x)$, при этом способом, аналогичным уже использованному, определим $F_l(x)$, $\bar{F}_l(x)$ при $m+1 \leq l \leq m+m_1$. Согласно построению выполнены свойства, аналогичные $(a_1)-(a_4)$, причем

$$\bar{F}_l(x) - F_l(x) < \bar{F}_m(x) - F_m(x), \quad l > m,$$

и

$$\bar{F}_{m+m_1}(x) - F_{m+m_1}(x) \leq \sup(\bar{\Phi}_{m_1,0}^m(x) - \Phi_{m_1,0}^m(x)) + \sum_{i=1}^{m_1} \tau_{m,m_1,i},$$

где числа $\tau_{m,m_1,i} \in (0,1)$ могут быть выбраны произвольно малыми. Заметим также, что

$$\lim_{m_1 \rightarrow \infty} \sup_{x \in g^{-m_1}V'_0} |\bar{\Phi}_{m_1,0}^m(x) - \Phi_{m_1,0}^m(x)| = 0.$$

Продолжая далее указанный процесс, придем к двум бесконечным последовательностям функций

$$\begin{aligned} F_1(x), \dots, F_m(x), \dots, F_{m+m_1}(x), \dots, \\ \bar{F}_1(x), \dots, \bar{F}_m(x), \dots, \bar{F}_{m+m_1}(x), \dots, \end{aligned}$$

удовлетворяющим условиям (1)-(4), которые суть следствия условий $(a_1)-(a_4)$.

Пусть

$$F_\infty(x) := \lim_{m \rightarrow \infty} F_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \bar{F}_m(x).$$

Непрерывность функции $F_\infty(x)$ следует из того, что она, являясь одновременно пределом возрастающей и убывающей последовательностей непрерывных функций, будет полунепрерывной сверху и снизу. График V^∞ функции $F_\infty(x)$ проходит через точку $(0, \frac{1}{2})$ и удовлетворяет условию $g^{-1}(V^\infty) \subset V^\infty$.

Переходя на многообразие $\overline{W}^s \Lambda$ и воспользовавшись включениями $\overline{f}F(V^m) \supset F(V^{m-1})$, $\overline{f}F(\overline{V}^m) \supset F(\overline{V}^{m-1})$, приходим к существованию инвариантного относительно $\overline{f}$ счетного семейства многообразий

$$W^\infty = \bigcup_{m \geq 0} \overline{f}^m F(V^\infty),$$

$$W^k := \bigcup_{m=k}^{\infty} \overline{f}^{m-k} F(V^m), \quad W^{-k} = \overline{f}^k(W^0),$$

$$\overline{W}^k = \bigcup_{m=k}^{\infty} \overline{f}^{m-k} F(\overline{V}^m), \quad \overline{W}^{-k} = \overline{f}^k(\overline{W}^0)$$

($k \geq 0$), каждое из которых гомеоморфно $\mathbb{R}^{n-1}$, так как может быть получено как объединение возрастающей последовательности $(n-1)$ -шаров. Каждая из пар W^k , W^{k+1} (или $\overline{W}^k$, $\overline{W}^{k+1}$) определяет подмножество M^k (соответственно $\overline{M}^k$) многообразия $\overline{W}^s \Lambda$, состоящее из отрезков одномерного слоения, концы которых принадлежат элементам пары, при этом $\overline{f}(M^k) = M^{k-1}$, $\overline{f}(\overline{M}^k) = \overline{M}^{k-1}$. Напомним, что в рассматриваемом случае

$$\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (M^k \cup \overline{M}^k) \cup W^\infty = \bigcup_{l \geq 0} f^l(D_{m_{i+1}}) - (W^u(p_{m_{i+1}}) \cup W^u(\vartheta p_{m_{i+1}})).$$

Расслаивая M^1 (соответственно $\overline{M}^1$) слоями, гомеоморфными $\mathbb{R}^{n-1}$, так, чтобы многообразия W^1 , W^2 (соответственно $\overline{W}^1$, $\overline{W}^2$) также были слоями, определим слоения на всех остальных M^k (соответственно $\overline{M}^k$). Добавляя к построенным слоям W^∞ , $W^u(p_{m_{i+1}})$, $W^u(\vartheta p_{m_{i+1}})$, получим $\overline{f}$ -инвариантное слоение множества $\bigcup_{l \geq 0} f^l(D_{m_{i+1}})$. Заметим, что область $\overline{W}^s(\Lambda) - \Lambda$ представима в виде конечного объединения подобных множеств, и, добавляя к уже построенным слоям неустойчивые многообразия, входящие в состав Λ , получим требуемое слоение на всем $\overline{W}^s \Lambda$.

Рассмотрим теперь случай 2, когда выполнены включения $g^{-1}(V_0) \subset V_1$, $g^{-1}(V_1) \subset V_0$. Используя систему координат (x, t) , задаваемую гомеоморфизмом $F: U \rightarrow D_{m_{i+1}} \cup \{q_{m_{i+1}}\}$, определим для достаточно малого $\varepsilon \in (0, 1)$ множество $V_\varepsilon := \{(x, \varepsilon), x \in V\}$ таким образом, чтобы последовательность V_ε , $g^{-1}(V_\varepsilon), \dots, g^{-m}(V_\varepsilon), \dots$ состояла из множеств, замыкания которых попарно не пересекаются. Эти множества могут быть представлены как графики последовательности $\{f_m(x) : m \geq 0\}$ функций таких, что $f_0(x) \equiv \varepsilon$ определена на V_0 , $f_1(x)$ определена на $g^{-1}(V_1)$, $f_{2k}(x)$ определена на $g^{-2k}(V_0)$, $f_{2k+1}(x)$ определена на $g^{-2k-1}(V_1)$ и выполнены включения

$$V_0 \supset g^{-1}(V_1) \supset g^{-2}(V_0) \supset \dots \supset g^{-2k}(V_0) \supset g^{-2k-1}(V_1) \supset \dots$$

Аналогично предыдущему доказательство теоремы использует следующую лемму.

ЛЕММА. *Существует последовательность продолжающих функций $\{F_m(x) : m \geq 0\}$, $F_0(x) = f_0(x)$, определенных на множестве V_0 и удовлетворяющих условиям:*

$$\text{существует такое } \delta \in (0, 1), \text{ что } \delta \leq F_m(x) \leq 1 - \delta, \quad m \geq 0; \quad (1')$$

$$\begin{aligned} \inf_{x \in V_0} (F_{2l+1}(x) - F_{2l}(x)) &> 0, \\ \inf_{x \in V_0} (F_{2l+2}(x) - F_{2l}(x)) &> 0; \\ \inf_{x \in V_0} (F_{2l-1}(x) - F_{2l+1}(x)) &> 0; \end{aligned} \quad (2')$$

$$\sup |F_m(x) - F_{m+1}(x)| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty; \quad (3')$$

$$\text{если } V^m \text{ — график } F_m(x), \text{ то } g^{-1}(V^m) \subset V^{m+1}. \quad (4')$$

Как и выше, можно считать, что функции $\{f_m(x)\}$ определены с сохранением их свойств на последовательности открытых множеств

$$V'_0 \supset g^{-1}(V'_1) \supset g^{-2}(V'_0) \supset \dots \supset g^{-2k+1}(V'_1) \supset g^{-2k}(V'_0) \supset \dots$$

таких, что $V'_0 \supset \text{clos } V_0$, $V'_1 \supset \text{clos } V_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Функцию $F_m(x)$, $m \geq 1$, определим с помощью последовательности функций $f_{m,0}(x) = f_m(x)$, $f_{m,1}(x), \dots, f_{m,m}(x)$, заданных соответственно на множествах последовательности

$$g^{-m}(V'_{\sigma(m)}) \subset g^{-m+1}(V'_{\sigma(m+1)}) \subset \dots \subset V'_{\sigma(2m)} = V'_0,$$

где

$$\sigma(m) = \begin{cases} 0 & \text{при } m = 2k, \\ 1 & \text{при } m = 2k + 1. \end{cases}$$

При этом

$$f_{m,k}(x) = f_{m,k+1}(x), \quad x \in g^{-m+k}(V'_{\sigma(m+k)}).$$

Сформулируем условия, которым должны удовлетворять функции $f_{m,k}$, чтобы для $F_m(x) = f_{m,m}(x)$ были выполнены условия (1')–(4'):

$$\text{существует } \delta \in (0, 1), \text{ для которого } \delta \leq f_{k,l}(x) \leq 1 - \delta, \quad x \in g^{l-k}(V'_{\sigma(k+l)}); \quad (a'_1)$$

$$\begin{aligned} \inf (f_{2k+1,l+1}(x) - f_{2k,l}(x)) &> 0, \quad x \in g^{-2k+l}(V'_{\sigma(2k+l)}), \\ \inf (f_{2k,l+1}(x) - f_{2k-2,l-1}(x)) &> 0, \quad x \in g^{-2k+l+1}(V'_{\sigma(2k+l+1)}), \\ \inf (f_{2k-1,l}(x) - f_{2k+1,l+2}(x)) &> 0, \quad x \in g^{-2k+l+1}(V'_{\sigma(2k+l+1)}); \end{aligned} \quad (a'_2)$$

$$\sup_{x \in g^{-m+l}(V'_{\sigma(m+1)})} |f_{m+1,l+1}(x) - f_{m,l}(x)| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty; \quad (a'_3)$$

$$\text{если } V^{m,k} \text{ — график функции } f_{m,k}, \text{ то } V^{m,k} = g(V^{m+1,k}). \quad (a'_4)$$

Построим для некоторого k две последовательности функций

$$\{f_{2k+1,l}(x) : 0 \leq l \leq 2k+1\}, \quad \{f_{2k,l}(x) : 0 \leq l \leq 2k\},$$

воспользовавшись рекуррентной формулой

$$\begin{aligned} f_{2k+1,0}(x) &:= f_{2k+1}(x), & f_{2k,0}(x) &= f_{2k}(x), \\ f_{2k+1,l+1}(x) &= \alpha_{2k+1,l}(x)f_{2k+1,l}(x) + (1 - \alpha_{2k+1,l})(1 + \tau_{2k+1,l})f_{2k,l}. \end{aligned}$$

Функция $f_{2k,l}(x)$ определяется из $f_{2k+1,l}(x)$ таким образом, чтобы было выполнено (a'_4) , непрерывная функция $\alpha_{2k+1,l}(x)$ удовлетворяла неравенствам

$$0 \leq \alpha_{2k+1,l}(x) \leq 1$$

при всех x , причем

$$\alpha_{2k+1,l}(x) = 1$$

при $x \in g^{-2k-1+l}(V_{\sigma(2k+1+l)}')$, и имела носитель, для которого

$$g^{-2k-1+l}(V_{\sigma(2k+1+l)}') \subset \text{supp } \alpha_{2k+1,l} \subset g^{-2k-1+l}(V_{\sigma(2k+1+l)}'),$$

а числа $\tau_{k,l} \in (0, 1)$ выбираются в процессе проверки условий $(a'_1)-(a'_4)$.

Сначала убедимся в возможности такого выбора $\tau_{2k+1,l}$, чтобы

$$\inf(f_{2k+1,l+1}(x) - f_{2k,l}(x)) > 0$$

при $x \in g^{-2k+l}(V_{\sigma(2k+l)}')$. Имеет место неравенство

$$\begin{aligned} f_{2k+1,1}(x) - f_{2k,0}(x) &= \alpha_{2k+1,0}(x)(f_{2k+1,0}(x) - f_{2k,0}(x)) \\ &+ (1 - \alpha_{2k+1,0}(x))[(1 + \tau_{2k+1,0})f_{2k,0}(x) - f_{2k,0}(x)] \geq \tau_{2k+1,0}f_{2k,0}(x), \end{aligned}$$

если $\tau_{2k+1,0}$ выбрать удовлетворяющим неравенству

$$\tau_{2k+1,0} \leq \inf(f_{2k+1,0}(x) - f_{2k,0}(x)), \quad x \in g^{-2k-1}(V_1').$$

Предполагая, что $\inf(f_{2k+1,0}(x) - f_{2k,0}(x)) > 0$ при $x \in g^{-2k-1+l}(V_{\sigma(1+l)}')$, получим

$$\begin{aligned} f_{2k+1,l+1}(x) - f_{2k,l}(x) &= \alpha_{2k+1,l}(x)(f_{2k+1,l}(x) - f_{2k,l}(x)) \\ &+ (1 - \alpha_{2k+1,l}(x))\tau_{2k+1,l}f_{2k,l}(x) \geq \tau_{2k+1,l} \inf f_{2k,l}(x), \end{aligned}$$

если $\tau_{2k+1,l} \leq \inf(f_{2k+1,l}(x) - f_{2k,l}(x))$, $x \in g^{-2k-1+l}(V_{\sigma(l+1)}')$. Отсюда следует также

$$\inf_{x \in g^{-2k+l}(V_{\sigma(l)}')} (f_{2k+1,l+1}(x) - f_{2k,l+1}(x)) = \inf(f_{2k+1,l+1}(x) - f_{2k,l}(x)) > 0.$$

Если $f_{m,l}(x)$, $m < 2k+1$, получено из $f_{2k+1,l}(x)$ так, чтобы выполнялось соотношение $V^{m,l} = g^{-2k+1-m}(V^{2k+1,l})$, $l \leq m$, то имеет место

$$\inf(f_{2r+1,l+1}(x) - f_{2r,l}(x)) > 0$$

при $x \in g^{-2r+l}(V'_{\sigma(l)})$, $r < k$, и

$$\inf(f_{2r-1,l}(x) - f_{2r,l+1}(x)) > 0$$

при $x \in g^{-2r+1+l}(V'_{\sigma(l+1)})$. Теперь убедимся в том, что выбором $\tau_{2k+1,l}$ можно получить также неравенство

$$\inf_{x \in g^{-2k+1+l}(V'_{\sigma(l+1)})} (f_{2k-1,l}(x) - f_{2k+1,l+2}(x)) > 0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} f_{2k-1,l}(x) - f_{2k+1,l+2}(x) &= \alpha_{2k+1,l+1}(x)(f_{2k-1,l}(x) - f_{2k+1,l+1}(x)) \\ &+ (1 - \alpha_{2k+1,l+1}(x))(f_{2k-1,l}(x) - (1 + \tau_{2k+1,l+1})f_{2k,l+1}(x)). \end{aligned}$$

Далее,

$$f_{2k-1,l}(x) - f_{2k+1,l+1}(x) = f_{2k-1,l-1}(x) - f_{2k+1,l+1}(x)$$

при $x \in g^{-2k+l}V'_{\sigma(l)}$, поэтому если потребовать дополнительно, чтобы $\tau_{2k+1,l+1} \leq \inf(f_{2k-1,l}(x) - f_{2k,l+1}(x))$ при $x \in g^{-2k+1+l}(V'_{\sigma(l+1)})$, то по индукции получим требуемое неравенство.

Неравенство

$$\inf_{x \in g^{-2k+l+2}(V'_{\sigma(l)})} (f_{2k,l+2}(x) - f_{2k-2,l}(x)) > 0$$

является следствием доказанного неравенства в силу определения $f_{m,l}(x)$ при $m < 2k+1$. Аналогичным образом убеждаемся в справедливости неравенств

$$\begin{aligned} \inf_{x \in g^{-2r+l_1+2}(V'_{\sigma(l_1)})} (f_{2r,l_1+2}(x) - f_{2r-2,l_1}(x)) &> 0, \\ \inf_{x \in g^{-2r+l_2+1}(V'_{\sigma(l_2+1)})} (f_{2r-1,l_2}(x) - f_{2r+1,l_2+2}(x)) &> 0 \end{aligned}$$

при $r \leq k$, $l_1 \leq 2r-2$, $l_2 \leq 2r-1$.

Наконец, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} &\sup_{x \in g^{-2k+l}(V'_{\sigma(l)})} (f_{2k+1,l+1}(x) - f_{2k,l}(x)) \\ &\leq \sup_{x \in g^{-2k-1+l}(V'_{\sigma(l-1)})} (f_{2k+1,l}(x) - f_{2k,l-1}(x)) + \tau_{2k+1,l}, \end{aligned}$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \sup(f_{2k+1,l+1}(x) - f_{2k,l}(x)) &\leq \sup(f_{2k+1,1}(x) - f_{2k,0}(x)) + \sum_{i=1}^l \tau_{2k+1,i} \\ &\leq \sup_{x \in g^{-2k-1}(V'_1)} (f_{2k+1,0}(x) - f_{2k,0}(x)) + \sum_{i=1}^l \tau_{2k+1,i}. \end{aligned}$$

Заметив, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in g^{-2k-1}(V'_1)} (f_{2k+1,0}(x) - f_{2k,0}(x)) = 0$$

и сумма $\sum_{i=1}^l \tau_{2k+1,i}$ может быть сделана сколь угодно малой, мы можем в дальнейшем построении повторить аргументацию уже рассмотренного случая и придти к последовательности $\{F_m(x) : m \geq 0\}$, удовлетворяющей условиям (1')–(4').

Лемма доказана.

Дальнейшие рассуждения, также аналогичные рассмотренному выше случаю, приводят к существованию $\bar{f}$ -инвариантного слоения многообразия $\bar{W}^s \Lambda$, листы которого гомеоморфны $\mathbb{R}^{n-1}$ и включают в свой состав неустойчивые многообразия точек Λ .

Утверждения о гомотопическом типе многообразия $\bar{W}^s \Lambda$ выполнено вследствие [19].

Таким образом, доказаны утверждения 1)–3) ослабленного варианта теоремы, а также доказано, что $\bar{W}^s \Lambda$ гомотопически эквивалентно тору.

Обратимся теперь к рассмотрению случая, когда на $\bar{W}^s \Lambda$ действует непрерывная инволюция φ , перестановочная с f , и в каждой φ -инвариантной области $\bigcup_{x \in C} [x, \vartheta x]^s$, порожденной φ -инвариантной связкой $\{C, \vartheta C\}$, имеется φ -инвариантное многообразие, трансверсальное устойчивому слоению, гомеоморфное $\mathbb{R}^{n-1} - \{0\}$ и инвариантное относительно некоторой итерации диффеоморфизма f . Пусть $W_1^\infty, W_2^\infty, \dots, W_r^\infty$ – совокупность пополненных $\bar{\varphi}$ -инвариантных многообразий, гомеоморфных $\mathbb{R}^{n-1}$ (где $\bar{\varphi}$ – продолжение φ).

Заметим, что порядок итерации диффеоморфизма f , относительно которой инвариантно многообразие W_i^∞ , совпадает с периодом n_i точки нароста компактификации, принадлежащей W_i^∞ . Пусть $\bar{f}$ и $\bar{\varphi}$ – продолжения отображений f и φ на $\bar{W}^s \Lambda$. Построение слоения коразмерности один, одновременно $\bar{f}$ - и $\bar{\varphi}$ -инвариантного, проведем по уже применявшейся схеме, заметив, что одно из отображений $\bar{f}$, $\bar{\varphi} \circ \bar{f}$ сохраняет ориентацию одномерного слоения и слоение, инвариантное относительно $\bar{\varphi}$ и $\bar{\varphi} \circ \bar{f}$, также инвариантно относительно $\bar{\varphi}$ и $\bar{f}$ (заметим также, что аттрактор Λ диффеоморфизма f является в наших условиях также аттрактором отображения $\bar{\varphi} \circ \bar{f}$). Поэтому можно считать, что $\bar{f}$ сохраняет ориентацию одномерного слоения, откуда следует, что если $C_i = C_i^1 \cup \vartheta C_i^1$ есть φ -инвариантная 2-связка и n_i – период точки нароста, то $f^{n_i}(C_i^1) \cap C_i^1 \neq \emptyset$ и $f^{n_i}(\vartheta C_i^1 \cap \vartheta C_i^1) \neq \emptyset$.

Достаточно рассмотреть случай связок, инвариантных относительно f , и ввести в множество $\bar{D}_i := D_i \cup \{q_i\}$, получающееся из связки C_i по изложенному выше способу, систему координат $\{(x, t)\}$ посредством гомеоморфизма $F_i: U \rightarrow \bar{D}_i$ (здесь $U = \{(x, t) : x \in V \subset \mathbb{R}^{n-1}, t \in [0, 1]\}$), переводящего куски устойчивого и неустойчивого многообразий в множества $V_x = \{(x, t) : t \in [0, 1]\}$, $V_t = \{(x, t) : x \in V\}$ соответственно.

Заметим, что в наших условиях прообраз при отображении F_i компоненты связности множества $\overline{D}_i \cap W_i^\infty$, проходящей через q_i , может быть представлен графиком непрерывной функции $f_\infty(x)$, $x \in V_0$, который проходит через точку $(0, \frac{1}{2}) = F_i^{-1}(q_i)$.

Пусть $g := F^{-1} \circ \overline{f} \circ F$. Необходимость построить (в соответствии с вышеуказанной процедурой) последовательность непрерывных функций $F_m: V_0 \rightarrow [0, 1]$, $m \geq 0$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\text{существует такое } \varepsilon \in (0, 1), \text{ что } \varepsilon \leq F_m(x) < f_\infty(x); \quad (1'')$$

$$\inf_{x \in V_0} (F_{m+1}(x) - F_m(x)) > 0, \quad m \geq 0; \quad (2'')$$

$$\sup_{x \in V_0} (f_\infty(x) - F_m(x)) \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty; \quad (3'')$$

$$\text{если } V^m \text{ — график } F_m(x), \text{ то } g^{-1}(V^m) \subset V^{m+1}. \quad (4'')$$

Напомним, что множество D_i удовлетворяет условию $f(D_i) \supset D_i$ и что достаточно построить $\overline{f}$ - и $\overline{\varphi}$ -инвариантные слоения множеств $E_i := \bigcup_{m \geq 0} \overline{f}^m(\overline{D}_i)$, порожденных связками $\{C_i, \vartheta C_i\}$, $i \in \overline{1, r}$. Но в наших условиях каждое E_i допускает представление $E_i = E_i^1 \cup E_i^2$, где E_i^1 порождено отрезками устойчивых многообразий, соединяющих точки множеств C_i и W_i^∞ , E_i^2 порождено отрезками, соединяющими ϑC_i и W_i^∞ , при этом $E_i^1 \cap E_i^2 = W_i^\infty$, $\overline{\varphi}(E_i^1) = E_i^2$.

Применяя приведенные ранее аргументы и воспользовавшись системой функций $\{F_m(x) : m \geq 0\}$, получим семейство $\{\sigma_i^1 : i \in \overline{1, r}\}$ $\overline{f}$ -инвариантных слоений множеств E_i^1 многообразиями, гомеоморфными $\mathbb{R}^{n-1}$. Слоения $\sigma_i = \sigma_i^1 \cup \overline{\varphi}(\sigma_i^1)$ являются $\overline{f}$ - и $\overline{\varphi}$ -инвариантными слоениями множеств E_i и вместе с неустойчивыми многообразиями точек Λ порождают $\overline{f}$ - и $\overline{\varphi}$ -инвариантное слоение многообразия $\overline{W}^s \Lambda$.

Для завершения доказательства наметим индуктивное построение системы функций $\{F_m(x) : m \geq 0\}$.

Выберем такое $\varepsilon \in (0, 1)$, что ни одно из совокупности непересекающихся множеств $\{g^{-m}(V_\varepsilon) : m \geq 0\}$ не имеет общих точек с множеством V^∞ , являющимся графиком $f_\infty(x)$. Далее определим по индукции последовательность функций $\{f_{m,k}(x) : 0 \leq k \leq m\}$ следующим образом:

$$f_{m,k+1}(x) := \alpha_{m,k}(x)f_{m,k}(x) + (1 - \alpha_{m,k}(x))(1 - \tau_{m,k})f_\infty(x).$$

Функции $\alpha_{m,k}(x)$ и числа $\tau_{m,k} \in (0, 1)$ можно выбрать таким образом, чтобы для $F_m(x) = f_{m,m}(x)$ и функций $F_k(x)$, $k < m$, получающихся из $F_m(x)$ так, чтобы $g^{-1}(V^k) \subset V^{k+1}$, были выполнены условия (1''), (2''). Повторяя проведенные ранее рассуждения, построим $F_{m+m_1}(x)$ и всю бесконечную последовательность $\{F_m(x)\}$, удовлетворяющую условиям (1'')–(4'').

Это завершает доказательство пунктов 4) и 5) теоремы в ослабленном варианте. Гомеоморфность многообразий $\overline{W}^s \Lambda$ торам вытекает из теоремы 3 [24], которая использует лишь только что доказанный ослабленный вариант теоремы 3.4.

Теорема доказана полностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Aarts, R. J. Fokkink. The classification of solenoids // Proc. Amer. Math. Soc. 1991. V. 111, № 4. P. 1161–1163.

- [2] В. С. Афраимович, В. В. Быков, Л. П. Шильников. О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца // Труды ММО. 1982. Т. 44. С. 150–212.
- [3] П. С. Александров. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.
- [4] Д. З. Аров. О топологическом подобию автоморфизмов и сдвигов компактных коммутативных групп // УМН. 1963. Т. 18. № 5. С. 133–138.
- [5] M. Barge. Horseshoe maps and inverse limits // Pacific J. Math. 1986. V. 121. № 1. P. 29–39.
- [6] H. G. Bothe. Transversely Wild Attractors. Report R-MATH-03/83. Berlin: Akad. Wiss. DDR, Inst. Math., 1983.
- [7] Н. Бурбаки. Общая топология. Числа и связанные с ними группы и пространства. М.: Физматгиз, 1959.
- [8] Д. Касселе. Введение в теорию диофантовых приближений. М.: ИЛ, 1961.
- [9] R. J. Fokink. The Structure of Trajectories. Amsterdam, 1991.
- [10] R. J. Franks. Anosov diffeomorphisms // Proc. Sympos. Pure Math. 1970. V. 14. P. 61–93.
- [11] A. S. Gorodetski, Yu. S. Ilyashenko. Minimal and strange attractors // J. Bifurcations and Chaos. 1996. V. 6. № 6. P. 1177–1183.
- [12] J. Guckenheimer, R. F. Williams. Structural stability of Lorenz attractors // Inst. Hautes Étud. Sci. Publ. Math. 1979. V. 50. P. 59–72.
- [13] Э. Хьюитт, К. Росс. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. М.: Наука, 1975.
- [14] Н. Клинишпонт. Неустойчивость ячеистой структуры аттракторов Лоренца // Сборник трудов учащихся Обнинска. Обнинск: ОИАТЭ, 1989. С. 11–30.
- [15] Н. Клинишпонт. Топологический инвариант аттрактора Лоренца // УМН. 1992. Т. 47. № 2. С. 195–196.
- [16] Э. Н. Лоренц. Детерминированное непериодическое движение // Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 88–116.
- [17] M. C. McCord. Inverse limit sequences with covering maps // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 114. P. 197–209.
- [18] J. Milnor. On the concept of attractor // Comm. Math. Phys. 1985. V. 99. P. 177–195.
- [19] С. П. Новиков. Топология слоений // Труды ММО. 1965. Т. 14. С. 248–278.
- [20] А. Перов, И. Эгле. К теории Пуанкаре–Данжуа многомерных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 5. С. 801–810.
- [21] Ya. B. Pesin. Dynamical systems with generalized hyperbolic attractors: Hyperbolic, ergodic and topological properties // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1992. V. 12. P. 123–151.
- [22] Р. В. Плыкин. Источники и стоки A -диффеоморфизмов поверхностей // Матем. сб. 1974. Т. 34. С. 243–264.
- [23] Р. В. Плыкин. О существовании притягивающих (отталкивающих) точек A -диффеоморфизмов проективной плоскости и бутылки Клейна // УМН. 1977. Т. 32. № 3. С. 179.
- [24] Р. В. Плыкин. О гиперболических аттракторах диффеоморфизмов // УМН. 1980. Т. 35. № 3. С. 94–104.
- [25] Р. В. Плыкин. О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов // УМН. 1984. Т. 39. № 6. С. 75–113.
- [26] R. V. Plykin, A. Yu. Zhirov. Some problems of attractors of dynamical systems // Topology Appl. 1993. V. 54. № 1–3. P. 19–46.
- [27] Р. В. Плыкин. О структуре централизаторов аносовских диффеоморфизмов тора // УМН. 1998. Т. 53. № 6. С. 259–260.
- [28] Р. В. Плыкин, Е. А. Сатаев, С. В. Шлячков. Странные аттракторы // Итоги науки и техники. Т. 66. Совр. проблемы матем. Фундам. напр. М.: ВИНТИ, 1991. С. 100–147.
- [29] Д. Рэнд. Топологическая классификация аттракторов Лоренца // Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 239–251.
- [30] D. Ruelle, F. Takens. On the nature of turbulence // Comm. Math. Phys. 1971. V. 20. P. 167–192.
- [31] Е. А. Сатаев. Инвариантные меры для гиперболических отображений с особенностями // УМН. 1992. Т. 47. № 1. С. 147–202.
- [32] S. Smale. Differentiable dynamical systems. I–IV // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. P. 747–817.

- [33] S. Smale. Mathematical problems for the next century // Math. Intelligencer. 1997. V. 20. № 2. P. 1–20.
- [34] Ю. Устинов. Алгебраические инварианты топологической сопряженности соленидов // Матем. заметки. 1987. Т. 42. № 1. С. 132–144.
- [35] D. van Dantzig. Über topologisch Homogene Kontinua // Fund. Math. 1930. V. 15. P. 102–125.
- [36] L. Vietoris. Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen // Math. Ann. 1927. V. 97. P. 454–472.
- [37] W. T. Watkins. Homeomorphic classification of certain inverse limit spaces with open bonding maps // Pacific J. Math. 1982. V. 103. № 2. P. 589–601.
- [38] R. F. Williams. The zeta function of an attractor // Conference on the Topology of Manifolds / ed. J. Hocking. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1968. P. 155–161.
- [39] R. F. Williams. Expanding attractors // Publ. Inst. Hautes Étud. Sci. Publ. Math. 1973. V. 43. P. 169–203.
- [40] R. F. Williams, O. Lanford. The structure of Lorenz attractors // Lecture Notes in Math. 1977. V. 615. P. 94–116.
- [41] А. Ю. Жиров. Гиперболические аттракторы диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей, часть 1. Кодирование, классификация и накрытия // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 6. С. 3–50.
- [42] А. Ю. Жиров. Гиперболические аттракторы диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей, часть 2. Перечисления и применения к псевдоаносовским диффеоморфизмам // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 9. С. 29–80.
- [43] А. Ю. Жиров. Гиперболические аттракторы диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей, часть 3. Алгоритм классификации // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 2. С. 69–82.
- [44] A. Yu. Zhironov. Complete combinatorial invariants of conjugacy of hyperbolic attractors of diffeomorphisms of surfaces // J. Dynam. Control Systems. 2000. V. 6. P. 397–430.
- [45] Е. В. Жужома. Сингулярные слоения Рибба на n -торе // Матем. заметки. 1981. Т. 30. № 1. С. 123–127.

Обнинский государственный
технический университет
атомной энергетики

Поступила в редакцию
17.10.2000