Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Куракин, А. А. Нечаев, Квазифробениусовы бимодули функций на полугруппе, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 6, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm575>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 15:46:24

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

КВАЗИФРОБЕНИУСОВЫ БИМОДУЛИ ФУНКЦИЙ НА ПОЛУГРУППЕ

В. Л. КУРАКИН, А. А. НЕЧАЕВ

Пусть ${}_A M_B$ – бимодуль над кольцами A и B с единицами, $(G, \cdot)$ – полугруппа с нейтральным элементом (моноид). Множество M^G всех функций $u: G \rightarrow M$ естественным образом наделено структурой (A, B) -бимодуля. Определим умножение функции $u \in M^G$ на элемент $g_1 \in G$ слева и на элемент $g_2 \in G$ справа правилом $(g_1 u g_2)(g) = u(g_2 g g_1)$, $g \in G$. Это определение индуцирует на M^G структуру (AG, BG) -бимодуля над полугрупповыми кольцами AG и BG .

В частном случае, когда $G = (\mathbb{N}_0^k, +)$, где $\mathbb{N}_0$ – множество натуральных чисел с нулем, функции $u \in M^G$, $u: \mathbb{N}_0^k \rightarrow M$, называются k -последовательностями над M (см. [1], [2]), а полугрупповые кольца AG и BG изоморфны кольцам многочленов $A[x_1, \dots, x_k]$ и $B[x_1, \dots, x_k]$ соответственно.

Следуя [3], бимодуль ${}_A M_B$ будем называть QF -бимодулем, если модули ${}_A M$ и M_B точны (т.е. аннуляторы $l_A(M)$ и $r_B(M)$ равны 0) и для любого максимального левого идеала I кольца A и любого максимального правого идеала J кольца B каждый из аннуляторов $r_M(I)$ и $l_M(J)$ либо равен 0, либо является неприводимым правым B -модулем, соответственно неприводимым левым A -модулем. Если ${}_A M_B$ есть QF -бимодуль, то следующие условия эквивалентны [3; теорема 6]: (1) кольцо A артиново слева и левый A -модуль M конечно порожден; (2) кольцо B артиново справа и правый B -модуль M конечно порожден; (3) кольцо A артиново слева и кольцо B артиново справа. В этом случае будем называть ${}_A M_B$ артиновым QF -бимодулем.

Левый (а также двусторонний) идеал $I \subseteq AG$ назовем конечно копорожденным, если левый A -модуль AG/I конечно порожден. Правый (двусторонний) идеал $J \subseteq BG$ назовем конечно копорожденным, если правый B -модуль BG/J конечно порожден. Левый AG -подмодуль $L \subseteq M^G$, конечно порожденный как левый A -модуль, назовем левым AG -семейством. Правый BG -подмодуль $R \subseteq M^G$, конечно порожденный как правый B -модуль, назовем правым BG -семейством.

Основной результат является обобщением соответствующих результатов работ [1], [4] со случая k -последовательностей, т.е. функций на полугруппе $(\mathbb{N}_0^k, +)$, на случай функций на произвольной полугруппе $(G, \cdot)$ с нейтральным элементом. Ниже через $r_{M^G}(I)$, $l_{AG}(R)$, $r_{BG}(L)$, $l_{M^G}(J)$ обозначаются аннуляторы подмножеств $I \subseteq AG$, R , $L \subseteq M^G$, $J \subseteq BG$ в множествах M^G , AG , BG и M^G соответственно.

ТЕОРЕМА. Пусть ${}_A M_B$ – бимодуль, кольцо A артиново слева, кольцо B артиново справа, G – полугруппа с нейтральным элементом, ${}_A M_B^G$ – множество всех функций на полугруппе G со значениями в M , рассматриваемое как бимодуль над полугрупповыми кольцами AG и BG . Тогда следующие условия эквивалентны.

(а) ${}_A M_B$ есть артинов QF -бимодуль.

(б) Каждый левый идеал $I \subseteq AG$ и каждое правое BG -семейство $R \subseteq M^G$ удовлетворяют аннуляторным соотношениям

$$I = l_{AG}(r_{M^G}(I)), \quad R = r_{M^G}(l_{AG}(R));$$

каждый правый идеал $J \subseteq BG$ и каждое левое AG -семейство $L \subseteq M^G$ удовлетворяют аннуляторным соотношениям

$$J = r_{BG}(l_{M^G}(J)), \quad L = l_{M^G}(r_{BG}(L));$$

левый идеал $l_{AG}(R)$ кольца AG и правый идеал $r_{BG}(L)$ кольца BG конечно копорожжены.

(в) Отображения $I \rightarrow r_{M^G}(I)$, $R \rightarrow l_{AG}(R)$ являются взаимно обратными биективными соответствиями Галуа между множеством конечно копорожжденных левых идеалов $I \subseteq AG$ и множеством правых BG -семейств $R \subseteq M^G$; отображения $J \rightarrow l_{M^G}(J)$, $L \rightarrow r_{BG}(L)$ являются взаимно обратными биективными соответствиями Галуа между множеством конечно копорожжденных правых идеалов $J \subseteq BG$ и множеством левых AG -семейств $L \subseteq M^G$.

(г) Модули ${}_A M$ и M_B конечно порождены; если $S \subseteq M^G$ является одновременно левым AG - и правым BG -семейством, $I = l_{AG}(S)$, $J = r_{BG}(S)$, то $(AG/I, BG/J)$ -бимодуль S является артиновым QF -бимодулем.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть ${}_A M_B$ – артинов QF -бимодуль. Тогда отображения $I \rightarrow r_{M^G}(I)$, $S \rightarrow l_{AG}(S)$ и отображения $J \rightarrow l_{M^G}(J)$, $S \rightarrow r_{BG}(S)$ являются двумя парами взаимно обратных биективных соответствий Галуа между тремя множествами: множеством конечно копорожжденных двусторонних идеалов $I \triangleleft AG$, множеством подбимодулей $S \subseteq M^G$, являющихся одновременно левыми AG - и правыми BG -семействами, и множеством конечно копорожжденных двусторонних идеалов $J \triangleleft BG$.

Пусть I_1, I_2 – левые идеалы кольца AG , R_1, R_2 – правые B -подмодули в M^G , J_1, J_2 – правые идеалы кольца BG , L_1, L_2 – левые A -подмодули в M^G . Тогда

$$r_{M^G}(I_1 \cap I_2) \supseteq r_{M^G}(I_1) + r_{M^G}(I_2), \quad l_{AG}(R_1 \cap R_2) \supseteq l_{AG}(R_1) + l_{AG}(R_2), \quad (1)$$

$$l_{M^G}(J_1 \cap J_2) \supseteq l_{M^G}(J_1) + l_{M^G}(J_2), \quad r_{BG}(L_1 \cap L_2) \supseteq r_{BG}(L_1) + r_{BG}(L_2). \quad (2)$$

В общем случае указанные включения могут быть строгими.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть ${}_A M_B$ – артинов QF -бимодуль; I_1, I_2 – конечно копорожжденные левые идеалы кольца AG ; R_1, R_2 – правые BG -семейства в M^G ; J_1, J_2 – конечно копорожжденные правые идеалы кольца BG ; L_1, L_2 – левые AG -семейства в M^G . Тогда включения в (1), (2) обращаются в равенства.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если ${}_A M_B$ – артинов QF -бимодуль, G – конечная полугруппа с нейтральным элементом, то (AG, BG) -бимодуль M^G является артиновым QF -бимодулем. В частности, если A – квазифробениусово кольцо, то и кольцо AG квазифробениусово.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Нечаев // Фундамент. и прикл. матем. 1995. Т. 1. № 1. С. 229–254. [2] V. L. Kurakin, A. S. Kuzmin, A. V. Mikhalev, A. A. Nechaev // J. Math. Sci. (New York). 1995. V. 76. № 6. P. 2793–2915. [3] G. Azumaya // Amer. J. Math. 1959. V. 81. № 1. P. 249–278. [4] V. L. Kurakin, A. V. Mikhalev, A. A. Nechaev, V. N. Tsypyshev // J. Math. Sci. (New York). 2000. V. 102. № 6. P. 4598–4627.

Принято редколлегией
12.11.2002