Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Х. Арансон, Е. В. Жужома, Об асимптотических направлениях полутраекторий аналитических потоков на поверхностях, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 6, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm576>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:29:15

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЯХ ПОЛУТРАЕКТОРИЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПОТОКОВ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

С. Х. АРАНСОН, Е. В. ЖУЖОМА

Исследование нелокального асимптотического поведения полутраекторий потоков на поверхностях неположительной эйлеровой характеристики является одной из основных задач сравнительно недавно возникшей теории Аносова–Вейля (см. основные работы [1]–[5], а также обзоры [6], [7]). В настоящей работе описываются нелокальные асимптотические направления поднятий на универсальную накрывающую полутраекторий аналитических потоков на замкнутой гиперболической ориентируемой поверхности.

Пусть Δ – плоскость Лобачевского в виде модели Пуанкаре, т.е. Δ – единичный круг на комплексной z -плоскости, наделенный метрикой постоянной отрицательной кривизны, которая задается квадратичной формой $ds = 2|dz|/(1 - |z|^2)$. Окружность $S_\infty = \partial\Delta = \{|z| = 1\}$ называется *абсолютом*. Геодезическими плоскости Δ являются дуги евклидовых окружностей, перпендикулярные абсолюту. Известно, что для любой ориентируемой замкнутой поверхности M рода $g \geq 2$ найдется фуксова группа Γ сохраняющих ориентацию изометрий плоскости Δ такая, что $\Delta/\Gamma \cong M$. Обозначим через $\pi: \Delta \rightarrow \Delta/\Gamma \cong M$ естественную проекцию, которая является универсальным накрывающим отображением. С метрикой, индуцируемой отображением π , M является ориентируемой *гиперболической поверхностью*.

Пусть $l = \{m(t) \in M : t \geq 0\}$ – полубесконечная непрерывная кривая без самопересечений на M и $\tilde{l} = \{\tilde{m}(t) \in \Delta : t \geq 0\}$ – ее поднятие на Δ . Предположим, что $\tilde{l}$ стремится в евклидовой метрике на замкнутом диске $\Delta \cup S_\infty$ при $t \rightarrow +\infty$ ровно к одной точке σ абсолюта S_∞ . Будем говорить в этом случае, что *кривая $\tilde{l}$ имеет асимптотическое направление*, определяемое точкой σ (допуская некоторую вольность, будем говорить также, что l имеет асимптотическое направление), а точка σ *достигается* кривой $\tilde{l}$.

Обозначим через $A_\Delta, A_\infty, A_{\text{ап}} \subset S_\infty$ множества точек, достижимых полутраекториями топологических, C^∞ гладких и аналитических потоков на M соответственно. Согласно [2] (см. также [3]), $A_\Delta = A_\infty$.

Геодезическая ламинация есть семейство попарно непересекающихся геодезических, ни одна из которых не имеет трансверсальных самопересечений, и объединение всех геодезических образует замкнутое множество. Любая простая замкнутая геодезическая образует *тривиальную геодезическую ламинацию*. Обозначим через Λ_{triv} семейство тривиальных геодезических ламинаций на поверхности M . Ламинация называется *нетривиальной*, если она состоит из незамкнутых геодезических. Ламинация *минимальна*, если она не содержит собственных подламинаций. Нетривиальная минимальная ламинация на M называется *неприводимой*, если любая замкнутая геодезическая на M пересекается с G .

Пусть G – геодезическая ламинация на M . Введем на геодезических G ориентацию. Введенная ориентация называется *согласованной*, если для любой геодезической $l \in G$ и любой точки $t \in l$ существует отрезок без контакта Σ такой, что t принадлежит внутренности Σ , и все геодезические из G , пересекающие отрезок Σ , пересекают его с одинаковым индексом пересечения. Геодезическая ламинация называется *ориентируемой*, если на ее слоях можно ввести согласованную ориентацию.

Обозначим через $\Lambda_{\text{ог}}$ (соответственно $\Lambda_{\text{поп}}$) множество нетривиальных минимальных ориентируемых (соответственно неориентируемых) геодезических ламинаций на M . Семейства $\Lambda_{\text{ог}}, \Lambda_{\text{поп}}$ образуют множество нетривиальных минимальных геодезических ламинаций на M , $\Lambda = \Lambda_{\text{ог}} \cup \Lambda_{\text{поп}}$. В $\Lambda_{\text{поп}}$ выделим подмножество $\Lambda_{\text{поп}}^{\text{irr}}$ неприводимых геодезических ламинаций.

Пусть G – геодезическая ламинация на гиперболической поверхности M . Ясно, что прообраз $\pi^{-1}(G) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{G}$ является геодезической ламинацией на плоскости Δ . Обозначим через $G(\infty) \subset S_\infty$ множество точек абсолюта, достижимых ламинацией $\bar{G}$. Другими словами, $G(\infty)$ есть множество идеальных концевых точек всех геодезических из $\bar{G}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00098).

Основной результат данной статьи содержится в следующей теореме, которая обобщает результаты работы [8].

ТЕОРЕМА 1. Пусть M – ориентируемая замкнутая гиперболическая поверхность и S_∞ – абсолют плоскости Лобачевского Δ , которая является универсальной накрывающей для M . Тогда

- 1) $\Lambda_{\text{triv}}(\infty) \subset A_{\text{an}} \subset \Lambda_{\text{triv}}(\infty) \cup \Lambda_{\text{or}}(\infty)$;
- 2) $\emptyset \neq \Lambda_{\text{non}}(\infty) \subset A_\infty - A_{\text{an}}$; множество $\Lambda_{\text{non}}(\infty)$ континуальное, всюду плотное на S_∞ и имеет нулевую меру Лебега на S_∞ ;
- 3) любой C^∞ -поток f^t , достигающий точку из $\Lambda_{\text{non}}(\infty)$, содержит бесконечное множество точек покоя; более того, если f^t достигает точку из $\Lambda_{\text{non}}^{\text{irr}}(\infty)$, то f^t содержит континуальное множество точек покоя и f^t не имеет ни нетривиально рекуррентных полутраекторий, ни замкнутых негомотопных нулю циклов без контакта.

Как следствие получаем, что на замкнутой гиперболической ориентируемой поверхности имеется достаточно “большое” множество асимптотических направлений, которые реализуются полутраекториями C^∞ -гладких потоков, но которые не могут быть реализованы полутраекториями никаких аналитических потоков [8].

Для доказательства основной теоремы доказывается результат об ограниченности отклонений полутраекторий аналитических потоков, который имеет самостоятельный интерес. Дадим необходимые определения.

Рассмотрим поднятие $\bar{l} = \{\bar{m}(t) : t \geq 0\}$ кривой l на Δ . Предположим, что $\bar{l}$ стремится к точке σ абсолюта S_∞ . Пусть $\bar{g}$ – направленная к σ геодезическая с идеальной концевой точкой σ . Такая геодезическая называется *представителем* асимптотического направления σ . Кривая $\bar{l}$ обладает свойством *ограниченного* (соответственно *неограниченного*) *отклонения*, если для любой геодезической $\bar{g}$, представляющей асимптотическое направление σ , отклонение $\bar{l}$ от $\bar{g}$ ограничено (соответственно неограничено).

Ясно, что свойство ограниченного (или неограниченного) отклонения не зависит от выбора представителя асимптотического направления, а для фиксированной кривой l не зависит от выбора поднятия этой кривой. Поэтому можно говорить о свойстве ограниченного (или неограниченного) отклонения кривой l на M .

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть f^t – аналитический поток на замкнутой гиперболической ориентируемой поверхности M . Тогда любая полутраектория потока f^t , имеющая асимптотическое направление, обладает свойством ограниченного отклонения.

Для плоских замкнутых поверхностей (тор и бутылка Клейна) аналогичная теорема была доказана Аносовым [3].

Авторы благодарят Д. В. Аносова на полезные обсуждения. Второй автор работал над статьей во время визита в университет г. Рен (Франция), поддержанного CNRS. Он благодарит А. Зорича, И. Итенберга и В. Каймановича за плодотворные дискуссии и теплый прием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. В. Аносов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 1. С. 16–43. [2] Д. В. Аносов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 3. С. 451–478. [3] Д. В. Аносов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 2. С. 63–96. [4] С. Х. Арансон, И. А. Гореликова, Е. В. Жужома // Докл. РАН. 2001. Т. 379. № 2. С. 154–157. [5] S. Aranson, V. Grines, E. Zhuzhoma // Topology. 2001. V. 40. № 3. P. 475–502. [6] D. V. Anosov // J. Dynam. Control Systems. 1995. V. 1. № 1. P. 125–138. [7] I. Nikolaev, E. Zhuzhoma. Flows on 2-Dimensional Manifolds. Berlin: Springer-Verlag, 1999. (Lecture Notes in Math. V. 1705.) [8] С. Х. Арансон, Е. В. Жужома // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 6. С. 819–829.