Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Гапеев, Задачи последовательного различения гипотез для составного пуассоновского процесса с экспоненциальными скачками, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 6, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm577>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 18:34:49

ЗАДАЧИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО РАЗЛИЧЕНИЯ ГИПОТЕЗ ДЛЯ СОСТАВНОГО ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ СКАЧКАМИ

П. В. ГАПЕЕВ

Задача последовательного различения двух простых гипотез о распределении наблюдаемого процесса состоит в том, чтобы последовательно и с наименьшими потерями определить, какая из гипотез на самом деле выполнена. Постановка данной задачи для случая наблюдаемой последовательности независимых случайных величин была дана в [1]. С помощью байесовского подхода в статьях [2], [3] доказывалась оптимальность критерия отношения вероятностей в вариационной постановке задачи для наблюдаемой последовательности величин. В работах [4; гл. IV] и [5] были даны точные решения байесовских и вариационных задач последовательного различения гипотез о среднем значении наблюдаемого винеровского процесса и об интенсивности наблюдаемого пуассоновского процесса соответственно. В данной работе дается *точное решение* байесовской задачи и *явный вид границ критерия отношения правдоподобия* в вариационной задаче последовательного различения гипотез для составного пуассоновского процесса с экспоненциальными скачками. Также даются *точные формулы* для вероятностей ошибок первого и второго рода и средней продолжительности наблюдений для указанного критерия.

1. Предположим, что имеется некоторый стохастический базис $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P_0, P_1)$ и доступный наблюдению непрерывно поступающий процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$, $X_t = \sum_{j=1}^{N_t} \xi_j$, $t > 0$, $X_0 = 0$, где относительно меры P_i , $i = 0, 1$, $N = (N_t)_{t \geq 0}$ — пуассоновский процесс интенсивности $1/\lambda_i$, $\lambda_i > 0$, и $(\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ — последовательность независимых случайных величин, экспоненциально распределенных с параметром λ_i (N и $(\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ предполагаются взаимно независимыми относительно P_i). Процесс X будем называть *составным пуассоновским процессом с экспоненциальными скачками* (с параметром $\lambda_i > 0$, $i = 0, 1$).

Для постановки *байесовской задачи* предположим, что на данном стохастическом базисе задана $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина $\lambda \in \{\lambda_0, \lambda_1\}$, имеющая относительно меры $P_\pi = \pi P_1 + (1 - \pi)P_0$ распределение $P_\pi[\lambda = \lambda_1] = \pi$, $P_\pi[\lambda = \lambda_0] = 1 - \pi$, $\pi \in [0, 1]$. Задача состоит в том, чтобы последовательно и с наименьшими потерями различить гипотезы $H_1: \lambda = \lambda_1$ и $H_0: \lambda = \lambda_0$ (без ограничения общности $\lambda_0 > \lambda_1 > 0$). Для этого рассмотрим решающее правило (τ, d) , состоящее из момента остановки $\tau = \tau(\omega)$ относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$, где $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$, $t \geq 0$, и $\mathcal{F}_\tau^X$ -измеримой функции $d = d(\omega) \in \{0, 1\}$. Будем полагать, что при остановке наблюдений в момент τ функция терминального решения показывает, какую из гипотез — H_1 или H_0 — следует принять, согласно правилу: если $d = 1$, принимаем H_1 , а если $d = 0$, то принимаем H_0 .

Байесовская задача последовательного различения гипотез состоит в нахождении функции риска $V(\pi) = \inf_{(\tau, d)} \{E_\pi[\tau] + a\pi P_1[d = 0] + b(1 - \pi)P_0[d = 1]\}$, минимизирующей общие средние потери, связанные с решающим правилом (τ, d) , состоящие из средней продолжительности наблюдений $E_\pi[\tau]$ и потерь, связанных с неправильным выбором заключительного решения, $a\pi P_1[d = 0] + b(1 - \pi)P_0[d = 1]$, где $a, b > 0$ — некоторые постоянные. Также требуется определить оптимальное (π -байесовское) решающее правило (τ_*, d_*) , при котором данный инфимум достигается.

Согласно рассуждениям в [4; гл. IV] данная задача сводится к задаче об оптимальной остановке $V(\pi) = \inf_\tau E_\pi[\tau + a\pi \wedge b(1 - \pi)]$ для *процесса апостериорной вероятности* $\pi = (\pi_t)_{t \geq 0}$, $\pi_t = P_\pi[\lambda = \lambda_1 \mid \mathcal{F}_t^X]$, $t \geq 0$, $\pi_0 = \pi$, и оптимальная решающая функция имеет вид: $d_* = 1$ при $\pi_{\tau_*} \geq b/(a + b)$ и $d_* = 0$ при $\pi_{\tau_*} < b/(a + b)$.

Отметим, что процесс $\pi = (\pi_t)_{t \geq 0}$ допускает представление $\pi_t = \pi e^{Z_t}/(1 - \pi + \pi e^{Z_t})$, где *процесс логарифма отношения правдоподобия* $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$, $Z_t = \ln[P_1 \mid \mathcal{F}_t^X]/[P_0 \mid \mathcal{F}_t^X]$, в данном случае имеет вид $Z_t = (\lambda_0 - \lambda_1)X_t - [(\lambda_0 - \lambda_1)/(\lambda_0 \lambda_1)]t$, $t \geq 0$.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что $1/\lambda_1 - 1/\lambda_0 > 1/a + 1/b$. Тогда в данной байесовской задаче функция риска $V(\pi) = f(\pi; B_*)$ при $\pi \in (A_*, B_*)$ и $V(\pi) = a\pi \wedge b(1 - \pi)$*

при $\pi \in [0, A_*] \cup [B_*, 1]$, где $f(\pi; B_*) = b(1 - \pi) + \lambda_0 \lambda_1 [\lambda_1(1 - B_*) - \lambda_0 B_*](B_* - \pi) / [(\lambda_0 - \lambda_1)^2 B_*(1 - B_*)] + \lambda_0 \lambda_1 [\lambda_0(1 - \pi) - \lambda_1 \pi] \ln[\pi(1 - B_*) / ((1 - \pi)B_*)] / (\lambda_0 - \lambda_1)^2$, оптимальное решающее правило (τ_*, d_*) имеет вид $\tau_* = \inf\{t \geq 0 : \pi_t \notin (A_*, B_*)\}$, $d_* = 1$, если $\pi_{\tau_*} \geq B_*$, $d_* = 0$, если $\pi_{\tau_*} = A_*$, и границы A_* и B_* , $0 < A_* < b/(a+b) < B_* < 1$, однозначно определяются из системы трансцендентных уравнений $f(A_*; B_*) = aA_*$ и $f'_\pi(A_*; B_*) = a$.

Заметим, что в случае $1/\lambda_1 - 1/\lambda_0 \leq 1/a + 1/b$ оптимальное π -байесовское решающее правило (τ_*, d_*) тривиально, т.е. $\tau_* \equiv 0$, $d_* = 1$, если $\pi_{\tau_*} \geq b/(a+b)$, и $d_* = 0$, если $\pi_{\tau_*} < b/(a+b)$.

2. Для постановки соответствующей вариационной задачи будем предполагать, что заданы числа $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta < 1$, и рассмотрим класс решающих правил $\Delta(\alpha, \beta) = \{(\tau, d) : P_1[d = 0] \leq \alpha, P_0[d = 1] \leq \beta\}$.

Вариационная задача последовательного различения гипотез состоит в нахождении в классе $\Delta(\alpha, \beta)$ решающего правила $(\hat{\tau}, \hat{d})$ такого, что $E_i[\hat{\tau}] \leq E_i[\tau]$, $i = 0, 1$, одновременно для всех $(\tau, d) \in \Delta(\alpha, \beta)$. Отметим, что в данной постановке не делается никаких предположений о распределении случайной величины λ .

Рассмотрим решающее правило $(\hat{\tau}, \hat{d})$, в котором $\hat{\tau} = \inf\{t \geq 0 : Z_t \notin (A, B)\}$, $\hat{d} = 1$, если $Z_{\hat{\tau}} \geq B$, и $\hat{d} = 0$, если $Z_{\hat{\tau}} = A$, с некоторыми A и B , $A < 0 < B$. Такого рода решающее правило $(\hat{\tau}, \hat{d})$ называют *критерием отношения правдоподобия*. Оптимальность критерия отношения правдоподобия для случая, когда процесс $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ имеет стационарные независимые приращения, была доказана в работе [6].

Пару границ (α, β) будем называть *допустимой*, если для них найдутся такие A и B , $A < 0 < B$, что вероятности ошибок первого и второго рода $P_1[\hat{d} = 0] = \alpha$ и $P_0[\hat{d} = 1] = \beta$. Множество всех допустимых пар (α, β) в соответствующей вариационной задаче для пуассоновского процесса было описано в статье [5].

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что заданные α и β принадлежат множеству допустимых пар $\mathcal{A} = \{(\alpha, \beta) : 0 < \alpha < 1, 0 < \beta < \lambda_1(1 - \alpha)/\lambda_0\}$. Тогда определенный выше критерий отношения правдоподобия $(\hat{\tau}, \hat{d})$ с $A = \ln[\alpha/(1 - \beta)]$ и $B = \ln(\lambda_1/\lambda_0) + \ln[(1 - \alpha)/\beta]$ является оптимальным в данной вариационной задаче.

Заметим, что если $(\alpha, \beta) \notin \mathcal{A}$, то решающее правило $(\hat{\tau}, \hat{d})$ не является оптимальным в данной вариационной задаче.

ТЕОРЕМА 3. В условиях теоремы 2 для решающего правила $(\hat{\tau}, \hat{d})$ имеют место выражения $P_1[\hat{d} = 0] = e^A(\lambda_0 e^B - \lambda_1)/(\lambda_0 e^B - \lambda_1 e^A)$, $P_0[\hat{d} = 1] = \lambda_1(1 - e^A)/(\lambda_0 e^B - \lambda_1 e^A)$ и средняя продолжительность наблюдений при гипотезах H_0 и H_1 имеет вид $E_0[\hat{\tau}] = \lambda_0 \lambda_1 [\lambda_1(1 - e^A)(\lambda_1 - \lambda_0(1 + B)) - \lambda_0 A(\lambda_0 e^B - \lambda_1)] / [(\lambda_0 - \lambda_1)^2(\lambda_0 e^B - \lambda_1 e^A)]$ и $E_1[\hat{\tau}] = \lambda_0 \lambda_1 [\lambda_0 e^B(\lambda_0 + \lambda_1(B - 1)) - \lambda_1^2 e^A A - \lambda_0 e^{A+B}(\lambda_0 + \lambda_1(B - A - 1))] / [(\lambda_0 - \lambda_1)^2(\lambda_0 e^B - \lambda_1 e^A)]$ соответственно.

Доказательства вышеуказанных утверждений содержатся в диссертации [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Вальд. Последовательный анализ. М.: Физматгиз, 1960. [2] A. Wald, J. Wolfowitz // Ann. Math. Statist. 1948. V. 19. P. 326–339. [3] A. Wald, J. Wolfowitz // Ann. Math. Statist. 1950. V. 21. P. 82–99. [4] А. Н. Ширяев. Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976. [5] G. Peskir, A. N. Shiryaev // Ann. Statist. 2000. V. 28. P. 837–859. [6] A. Irle, N. Schmitz // Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Statist. 1984. V. 15. № 1. P. 91–104. [7] П. В. Гапеев // Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 2001.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
23.09.2002