Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Голдаева, Некоторые неравенства для броуновского движения со сносом,
УМН, 2002, том 57, выпуск 6, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm578>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 14:41:26

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ СО СНОСОМ

А. А. ГОЛДАЕВА

Целью данной работы является установление следующего неравенства.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $B^\mu(t) = B(t) + \mu t$ – броуновское движение со сносом, $f: [0, 1] \rightarrow \{+1, -1\}$ – измеримая детерминированная функция. Тогда для любого $t \geq 0$ имеем:

$$\begin{aligned} P\left(\max_{0 \leq s \leq 1} |B^\mu(s)| \geq t\right) &\leq P\left(\max_{0 \leq s \leq 1} \left|\int_0^s f(u) dB^\mu(u)\right| \geq t\right) \\ &\leq P\left(\max_{0 \leq s \leq 1} |B^\mu(s)| \geq \frac{t}{2}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

Сначала докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.

$$\begin{aligned} P\left(\max_{0 \leq s \leq 1} |B(s)| \geq t\right) &\leq P\left(\max_{0 \leq s \leq 1} \left|\int_0^s f(u) dB(u)\right| \geq t\right) \\ &\leq P\left(\max_{0 \leq s \leq 1} |B(s)| \geq \frac{t}{2}\right), \end{aligned} \quad (2)$$

где $B(t)$ – броуновское движение.

Шаг 1. Предположим, что функция f имеет вид

$$f(t) = \sum_{k=0}^N \varepsilon_k I_{[a_k, a_{k+1})}(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3)$$

где $\varepsilon_k = \pm 1$, $0 = a_0 < \dots < a_N = 1$, $N < \infty$. Воспользуемся следующей теоремой из [1]:

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{2n})$ и $x = (x_1, \dots, x_{2n})$ – последовательности знаков. Возьмем в качестве P равномерное распределение на $\{\pi\}$, множестве всех перестановок чисел $\{1, \dots, 2n\}$. Тогда

$$P(|x_\pi| \geq t) \leq P(|\theta \cdot x_\pi| \geq t) \leq P\left(|x_\pi| \geq \frac{t}{2}\right) \quad \forall \theta \in \Theta, \quad \forall t \geq 0, \quad (4)$$

где $x_\pi = (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(2n)})$, $\theta \cdot x_\pi = (\theta_1 x_{\pi(1)}, \dots, \theta_{2n} x_{\pi(2n)})$ и

$$|x_\pi| = \max_{1 \leq k \leq 2n} \left\| \sum_{i=1}^k x_{\pi(i)} \right\|.$$

Определим для любого $n > 0$, $x \in \{x_\pi\}$ следующий процесс: $Z_n(t) = \frac{\sum_{i=1}^{[2nt]} x_i}{\sqrt{2n}}$, $0 \leq t \leq 1$,

где $[y]$ – целая часть y . Положим $Y_n(t) = \int_0^t f(u) dZ_n(u)$ и $Y(t) = \int_0^t f(u) dB(u)$, $0 \leq t \leq 1$.

Очевидно,

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq s \leq 1} |Y_n(s)| &= \max_{1 \leq k \leq 2n} \left| \frac{\sum_{i=1}^k f\left(\frac{i}{2n}\right) x_i}{\sqrt{2n}} \right|, \\ \max_{0 \leq s \leq 1} |Z_n(s)| &= \max_{1 \leq k \leq 2n} \left| \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{\sqrt{2n}} \right| = \frac{|x_i|}{\sqrt{2n}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из теоремы 3 следует, что $P(\max_{0 \leq s \leq 1} |Y_n(s)| \geq t) \geq P(\max_{0 \leq s \leq 1} |Z_n(s)| \geq t)$. Известно, что $Z_n \Rightarrow B$, где $\Rightarrow$ означает сходимость по распределению (см. [2]). Так как отображение $X(\cdot) \rightarrow \int_0^\cdot f(u) dX(u)$ непрерывно на пространстве ограниченных функций на $[0, 1]$, то $Y_n \Rightarrow Y$. Таким образом, $P(\max_{0 \leq s \leq 1} |Y(s)| \geq t) \geq P(\max_{0 \leq s \leq 1} |B(s)| \geq t)$.

Шаг 2. Общий случай. Измеримую детерминированную функцию $f: [0, 1] \rightarrow \{+1, -1\}$ аппроксимируем последовательностью функций типа (3): $\int_0^1 (f_n(u) - f(u))^2 du \rightarrow 0$. Используя неравенство Дуба:

$$E \left(\max_{0 \leq s \leq 1} \left| \int_0^s (f_n(u) - f(u)) dB(u) \right| \right)^2 \leq 4 \int_0^1 (f_n(u) - f(u))^2 du,$$

получаем

$$\max_{0 \leq s \leq 1} \left| \int_0^s (f_n(u) - f(u)) dB(u) \right| \xrightarrow{P} 0. \quad (6)$$

Таким образом, с помощью шага 1 и (6) первое неравенство в (2) доказано. Второе неравенство в (2) доказывается аналогично.

Для доказательства (1) применим теорему Гирсанова. Пусть

$$F(x) = \max_{0 \leq s \leq 1} |X(s)|, \quad G(X) = \max_{0 \leq s \leq 1} \left| \int_0^s f(u) dX(u) \right|,$$

где X – точка в пространстве непрерывных функций. Тогда

$$\begin{aligned} P^\mu(F(X) \geq t) &= E^\mu I(F(X) \geq t) = E^0 \frac{dP_1^\mu}{dP_1^0} I(F(X) \geq 1) = E^0 e^{\mu B_1 - \frac{\mu^2}{2}} I(F(B) \geq t) \\ &= E^0 E(e^{\mu B_1 - \frac{\mu^2}{2}} I(F(B) \geq t) | B_1) = E^0 e^{\mu B_1 - \frac{\mu^2}{2}} E(I(F(B) \geq t) | B_1), \end{aligned}$$

где P^0 и P^μ – меры, отвечающие броуновскому движению и броуновскому движению со сносом соответственно. Аналогично

$$P^\mu(G(X) \geq t) = E^0 e^{\mu B_1 - \frac{\mu^2}{2}} E(I(G(B) \geq t) | B_1)$$

и

$$P^\mu(F(X) \geq t/2) = E^0 e^{\mu B_1 - \frac{\mu^2}{2}} E((F(B) \geq t/2) | B_1).$$

Из теоремы 2 следует, что

$$E(I(F(B) \geq t) | B_1) \leq E(I(G(B) \geq t) | B_1) \leq E(I(F(B) \geq t/2) | B_1).$$

Таким образом, приходим к следующему результату:

$$P^\mu(F(X) \geq t) \leq P^\mu(G(X) \geq t) \leq P^\mu(F(X) \geq t/2). \quad (7)$$

Перепишем (7), используя обозначения для F и G :

$$P \left(\max_{0 \leq s \leq 1} |B^\mu(s)| \geq t \right) \leq P \left(\max_{0 \leq s \leq 1} \left| \int_0^s f(u) dB^\mu(u) \right| \geq t \right) \leq P \left(\max_{0 \leq s \leq 1} |B^\mu(s)| \geq t/2 \right).$$

Получаем требуемое неравенство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] S. Levental // Statist. Probab. Lett. 2000. V. 46. № 3. P. 271–276. [2] J. Hajek, Z. Sidak. Theory of Rank Tests. New York: Academic Press, 1967.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: gold-ann2002@mail.ru

Принято редколлегией
23.09.2002