Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Гриненко, Замечание к статье В. А. Исковских “Простое доказательство нерациональности трехмерной квартики”, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 6, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm579>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 15:36:19

**ЗАМЕЧАНИЕ К СТАТЬЕ В. А. ИСКОВСКИХ
“ПРОСТОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО
НЕРАЦИОНАЛЬНОСТИ ТРЕХМЕРНОЙ КВАРТИКИ”**

М. М. Гриненко

В работе [1] приводилось простое доказательство нерациональности трехмерной гладкой квартики, при этом вывод одного из ключевых неравенств, именно, что

$$\left(\sum r_i + 1\right)^2 > 4 \sum r_i^2,$$

не учитывал всех возможных значений коэффициентов r_i . Данная заметка исправляет пробел в доказательстве.

Напомним схему рассуждений работы [1]. Задача состоит в доказательстве нерациональности гладкой квартики $X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$. Для этого достаточно показать, что линейная система без неподвижных компонент на X (скажем, $\mathcal{H} \subset |nH|$, где H — класс гиперплоского сечения) не имеет максимальных особенностей. Если рассуждать от противного и предположить, что, в частности, $\mathcal{H}$ имеет так называемую бесконечно близкую особенность над точкой $B \in X$, то, используя теорему Шокурова о связности и ограничивая $\mathcal{H}$ на общее гиперплоское сечение S через точку B , легко вывести, что пара $K_S + \frac{1}{n}\mathcal{H}|_S$ имеет нелогканоническую особенность над точкой $B_0 = B \in S$. Это означает, что существует нормирование ν поля функций на S или, что то же самое, цепочка раздутий $S_N \rightarrow S_{N-1} \rightarrow \dots \rightarrow S_1 \rightarrow S_0 = S$ со следующими свойствами. Во-первых, на каждом шаге раздувается только одна точка $B_i \in S_i$, причем лежащая на исключительной кривой e_i предыдущего раздутия. Во-вторых, нормирование ν реализуется исключительной кривой $e_N \subset S_N$, и пара $K_S + \frac{1}{n}\mathcal{H}|_S$ имеет дискрепантность строго меньше -1 относительно e_N . Указанной цепочке раздутий сопоставляется ориентированный граф Γ , состоящий из вершин $1, 2, \dots, N$, при этом существует стрелка $j \rightarrow i$, если $j > i$ и собственный прообраз e_i^{j-1} кривой e_i на поверхности S_{j-1} содержит точку B_{j-1} . Определим число r_i как количество всех путей в Γ из вершины N в вершину i , если $i < N$; r_N положим равным единице. Легко видеть, что числа r_i в [1] определены точно так же, но в обратном порядке перечисления. Заметим, что $r_i = \sum_{j: j \rightarrow i} r_j$. Как теперь следует из статьи В. А. Исковских, все, что нам надо сделать (и этому посвящена оставшаяся часть данной работы), это доказать следующий факт:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Всегда выполнено неравенство*

$$\left(\sum_{i=1}^N r_i + 1\right)^2 > 4 \sum_{i=1}^N r_i^2. \quad (1)$$

Предложенное в [1] доказательство опирается на предположение, что $r_i \leq r_{i+1} + r_{i+2}$, которое, однако, в общем случае не выполняется. Предлагаемые ниже рассуждения не используют данного предположения.

Вначале отметим, что если есть стрелка $j \rightarrow i$, то существуют стрелки $k \rightarrow i$ для всех $j > k > i$. Таким образом, для каждой вершины i определена наибольшая вершина $\hat{i} \leq N$ такая, что существуют стрелки $k \rightarrow i$ для всех $\hat{i} \geq k > i$ и нет стрелок $k \rightarrow i$ для $k > \hat{i}$. Очевидно, что $r_i = r_{i+1} + \dots + r_{\hat{i}}$. Заметим еще, что всегда есть стрелка $i+1 \rightarrow i$.

Вершина i в графе Γ обязательно имеет один из следующих типов:

А: $\hat{i} = i+1$. В этом случае $r_{\hat{i}} = r_i$.

Б: $\hat{i} > i+1$, а вершина $\hat{i}-1$ имеет тип **А**. Здесь, очевидно, $r_{i+1} = r_{i+2} = \dots = r_{\hat{i}}$.

В: $\hat{i} > i+1$, но вершина $\hat{i}-1$ не имеет тип **А**. Тогда $r_{i+1} = \dots = r_{\hat{i}-1} > r_{\hat{i}}$.

Отметим важное свойство графа Γ : если идти от N к 1, то первой вершиной, отличной от типа **А**, будет имеющая тип **Б**.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 02-01-00441, 00-15-96085), NWO-RFBR (047-008-005), INTAS (№ 00-0269, 00-0259).

ЛЕММА. Для всех вершин i типа **B** выполнено $r_i \leq r_{i+2} + \dots + r_N + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Применяем индукцию по вершинам типа **B** “сверху вниз”. Пусть i – самая “верхняя” вершина типа **B** (т.е. первая, если идти от N к 1). Тогда $\hat{i} - 1$ имеет тип **B**, $r_{\hat{i}-1} = r_{\hat{i}} + \dots + r_k$, $r_{\hat{i}} = r_{\hat{i}+1} = \dots = r_k$ для некоторого $\hat{i} < k \leq N$. Предположим сначала, что $k = N$. Тогда $r_{\hat{i}} = \dots = r_N = 1$, и мы имеем

$r_{i+2} + \dots + r_{\hat{i}} + r_{\hat{i}+1} + \dots + r_N + 1 = r_{i+2} + \dots + r_{\hat{i}} + r_{\hat{i}-1} = r_{i+2} + \dots + r_{\hat{i}} + r_{i+1} = r_{\hat{i}}$. Пусть $k < N$. Тогда $r_{\hat{i}} = \dots = r_k \leq r_{k+1} + \dots + r_N$, и

$$\begin{aligned} & r_{i+2} + \dots + r_{\hat{i}} + r_{\hat{i}+1} + \dots + r_k + r_{k+1} + \dots + r_N + 1 \\ & > r_{i+2} + \dots + r_{\hat{i}} + r_{\hat{i}+1} + \dots + r_k + r_{\hat{i}} \\ & = r_{i+2} + \dots + r_{\hat{i}} + r_{\hat{i}-1} = r_{i+2} + \dots + r_{\hat{i}} + r_{i+1} = r_{\hat{i}}. \end{aligned}$$

Теперь предположим, что для всех вершин типа **B**, расположенных выше i , утверждение леммы верно. Если $\hat{i} - 1$ имеет тип **B**, мы можем дословно воспользоваться только что проведенными рассуждениями для случая $k < N$. Пусть $\hat{i} - 1$ есть вершина типа **B**. Тогда, если $r_{\hat{i}-1} = r_{\hat{i}} + \dots + r_k$ для некоторого k , то $r_{\hat{i}-1} \leq r_{\hat{i}+1} + \dots + r_N + 1$ по предположению индукции, и

$$r_{i+2} + \dots + r_{\hat{i}} + r_{\hat{i}+1} + \dots + r_N + 1 \geq r_{i+2} + \dots + r_{\hat{i}} + r_{\hat{i}-1} = r_{i+2} + \dots + r_{\hat{i}} + r_{i+1} = r_{\hat{i}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ. Используем индукцию по количеству слагаемых под знаками сумм в неравенстве (1): суммы берутся от l до N , индукция по l от $N - 1$ до 1.

Начальный шаг индукции: пусть $l = N - 1$. Так как $r_{N-1} = r_N$, то требуемое неравенство выполняется очевидным образом: $9 = (1 + 1 + 1)^2 > 4 \cdot (1 + 1) = 8$.

Пусть (1) выполнено для всех $l < i \leq N - 1$. Предположим, что вершина l имеет тип **A**. Тогда, так как $r_{l+1} = r_l$ и всегда выполнено $r_{l+1} \leq r_{l+2} + \dots + r_N$, то $r_{l+1} + r_{l+2} + \dots + r_N \geq 2r_l$, и мы имеем

$$(r_l + \dots + r_N + 1)^2 = r_l^2 + 2r_l(r_{l+1} + \dots + r_N + 1) + (r_{l+1} + \dots + r_N + 1)^2 > 5r_l^2 + 4(r_{l+1}^2 + \dots + r_N^2).$$

Пусть l имеет тип **B**. Так как $r_l = r_{l+1} + \dots + r_{\hat{l}}$ и $r_{l+1} = \dots = r_{\hat{l}} \leq r_{\hat{l}+1} + \dots + r_N$, то

$$\begin{aligned} (r_l + \dots + r_N + 1)^2 &= (2(r_{l+1} + \dots + r_{\hat{l}}) + r_{\hat{l}+1} + \dots + r_N + 1)^2 \\ &= 4r_l^2 + 4(r_{l+1} + \dots + r_{\hat{l}})r_{\hat{l}} + (r_{\hat{l}+1} + \dots + r_N + 1)^2 \\ &= 4(r_l^2 + r_{l+1}^2 + \dots + r_{\hat{l}}^2) + (r_{\hat{l}+1} + \dots + r_N + 1)^2 > 4 \sum_{i=l}^N r_i^2. \end{aligned}$$

Пусть l имеет тип **B**. Здесь два варианта. Предположим, что $\hat{l} - 1$ типа **B**, $r_{\hat{l}-1} = r_{\hat{l}} + \dots + r_k$, $r_{\hat{l}} = r_{\hat{l}+1} = \dots = r_k \leq r_{k+1} + \dots + r_N$. Тогда $r_{\hat{l}+1} + \dots + r_N = r_{\hat{l}+1} + \dots + r_k + r_{k+1} + \dots + r_N \geq r_{\hat{l}+1} + \dots + r_k + r_{\hat{l}} = r_{\hat{l}-1}$. Если же $\hat{l} - 1$ имеет тип **B**, то $r_{\hat{l}-1} \leq r_{\hat{l}+1} + \dots + r_N + 1$ по лемме. В любом случае

$$\begin{aligned} (r_l + \dots + r_N + 1)^2 &= 4r_l^2 + 4(r_{l+1} + \dots + r_{\hat{l}})(r_{\hat{l}+1} + \dots + r_N + 1) + (r_{\hat{l}+1} + \dots + r_N + 1)^2 \\ &\geq 4r_l^2 + 4(r_{l+1} + \dots + r_{\hat{l}})r_{\hat{l}-1} + (r_{\hat{l}+1} + \dots + r_N + 1)^2 > 4 \sum_{i=l}^N r_i^2. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Исковских // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 5. С. 667–673.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: grin@mi.ras.ru

Принято редколлегией
23.09.2002