Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Демидов, Об эволюции слабого возмущения окружности в задаче о течении Хил–Шоу, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 6, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm580>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 12:39:59

**ОБ ЭВОЛЮЦИИ СЛАБОГО ВОЗМУЩЕНИЯ
ОКРУЖНОСТИ В ЗАДАЧЕ О ТЕЧЕНИИ ХИЛ-ШОУ**

А. С. Демидов

Пусть область $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$ односвязна, симметрична относительно оси Ox , содержит начало координат $\{0\}$ и окружена достаточно гладкой (см. ниже) кривой Γ_0 . Пусть при $t \geq 0$ эта область деформируется [1] в область Ω_t так, что точка $\mathbf{s} = (x, y)$ границы Γ_t движется со скоростью $\dot{\mathbf{s}} = \nabla u$, где функция $u = u(t; x, y)$ удовлетворяет условиям: $u = 0$ на Γ_t и $u_{xx} + u_{yy} = 2\delta$ в Ω_t . Здесь δ — это δ -функция Дирака, сосредоточенная в $\{0\}$.

Пусть $v = v(t; x, y)$ гармонически сопряжена к $u(t; x, y)$ в области $\Omega_t \cap \{y > 0\}$, причем $v(t; x, 0) = 0$ для $x > 0$. Обозначим через $b(t, \sigma)$ угол между полуосью $\{x > 0\}$ и внешней нормалью к Ω_t в точке $\mathbf{s} \in \Gamma_t \cap \{y \geq 0\}$, в которой $v = \sigma \in [0, 1]$.

Пример: функция $(t, \sigma) \mapsto \hat{b}(t, \sigma) = \pi\sigma$ соответствует окружности.

Пусть $\mathbf{H}\beta(t, \sigma) = \sum_{n \geq 1} \beta_n(t) \cos \pi n \sigma$, где $\beta(t, \sigma) = \sum_{n \geq 1} \beta_n(t) \sin \pi n \sigma$.

ТЕОРЕМА 1. Функция $b = b(t, \cdot) \in H^1(0, 1)$, задающая контур Γ_t , представляется формулой $b(t, \sigma) = \hat{b}(t, \sigma) + \beta(t, \sigma)$, где $\beta(t, \sigma)$ удовлетворяет (ср. [2]) уравнению

$$\begin{aligned} (t + t_0)(1 - \mathbf{K}(b))\dot{\beta}(t, \sigma) &= e^{-2\alpha(t, \sigma)}\alpha'(t, \sigma) + b'(t, \sigma)e^{-\alpha(t, \sigma)} \\ &\quad \times \int_0^\sigma [\pi e^{\alpha(t, \xi)} - b'(t, \xi)e^{-\alpha(t, \xi)}] d\xi, \\ \mathbf{K}(b)\dot{\beta}(t, \sigma) &= b'(t, \sigma)e^{-\alpha(t, \sigma)} \int_0^\sigma e^{\alpha(t, \xi)} \mathbf{H}\dot{\beta}(t, \xi) d\xi, \\ \alpha &= \mathbf{H}\beta, \quad \sqrt{2\pi t_0} \int_0^1 \exp \alpha(0, \sigma) d\sigma = |\Gamma_0|/2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\dot{g}(t, \sigma) = \partial g / \partial t$, $g'(t, \sigma) = \partial g / \partial \sigma$, а параметр t_0 нормирует длину кривой Γ_0 .

ТЕОРЕМА 2. Существует число $C_* > 1$ такое, что для любых $\chi \geq 1$, $1/\varepsilon \geq C_*\chi^3$, $1/T \geq C_*\chi^2$ и функции $\beta^0: [0, 1] \ni \sigma \mapsto \beta^0(\sigma) = \sum_{n \geq 1} \beta_n^0 \sin \pi n \sigma$ такой, что $|\beta_1^0| = \varepsilon/(8\chi)$, $\sum_{k \geq 2} (k\beta_k^0)^2 \leq (\varepsilon/8)^2$, уравнение (1) имеет в ε -окрестности нуля пространства $\mathcal{C}(0, T; H^1(0, 1))$ единственное решение $\beta: (t, \sigma) \mapsto \beta(t, \sigma) = \sum_{n \geq 1} \beta_n(t) \sin \pi n \sigma$ такое, что $\beta(0, \cdot) = \beta^0$. При этом

$$|\dot{\beta}_n(0) - \dot{\beta}_n^0(0)| \leq C_*\varepsilon, \quad 2\dot{\beta}_1(0) = -\beta_1^0 + 2 \sum_{k \geq 2} (\beta_k^0)^2 / \beta_1^0, \quad \dot{\beta}_k(0) = -\frac{k+2}{2}\beta_k^0, \quad k \geq 2. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Скажем, что $\beta \in \mathcal{C}(0, T; H^q(0, 1))$, если $\beta(t, \sigma) = \sum_{n \geq 1} \beta_n(t) \sin \pi n \sigma$, $\beta_n(\cdot) \in \mathcal{C}[0, T]$ и $\|\beta\|_q^2 := \max_t \sum_{n \geq 1} (n^q \beta_n(t))^2 < \infty$. При $\|\beta\|_1 \leq 1$ и $\beta_1(t) \neq 0$ уравнение (1) представимо в виде

$$(1 + P(\beta))\dot{\beta} = (\Lambda(\beta) + Q(\beta))/(t + 1), \quad (3)$$

где покоординатные компоненты P , Λ , Q , а также R и S (см. ниже) таковы:

$$\begin{aligned} P_1(\beta)\dot{\beta} &= \frac{1}{\beta_1} \left[\sum_{k \geq 2} \left(\beta_k + \frac{k-1}{k} \beta_{k-1} \right) R_k(\beta)\dot{\beta} + r_1(\beta)\dot{\beta} \right], \quad P_k(\beta)\dot{\beta} = -R_k(\beta)\dot{\beta}, \\ \Lambda_1(\beta) &= \frac{1}{2\beta_1} \left(-\beta_1^2 + 2 \sum_{k \geq 2} \beta_k^2 \right), \quad \Lambda_k(\beta) = -\frac{k+2}{2}\beta_k, \end{aligned}$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-220004).

$$Q_1(\beta) = -\frac{1}{2\beta_1} \left(s_1(\beta) + \sum_{k \geq 2} (\beta_k + \frac{k-1}{k} \beta_{k-1}) S_k(\beta) \right), \quad Q_k(\beta) = \frac{1}{2} S_k(\beta),$$

при этом существует такая константа $\widehat{C} > 0$, что $|s_1(\beta)| \leq \widehat{C} \|\beta\|_0 \|\beta\|_1^2$, $\|S(\beta)\|_0 \leq \widehat{C} \|\beta\|_1^2$, $|r_1(\beta)\dot{\beta}| \leq \widehat{C} \|\beta\|_0 \|\beta\|_1 \|\dot{\beta}\|_0$, $\|R(\beta)\dot{\beta}\|_0 \leq \widehat{C} \|\beta\|_1 \|\dot{\beta}\|_0$, $\|P(\beta)\| \leq \widehat{C} (3 \frac{\|\beta\|_0}{|\beta_1(t)|} + 1) \|\beta\|_1$.

На множестве $\mathcal{M} = \{\beta \in C(0, T; H^1(0, 1)) : \|\beta\|_1 \leq \varepsilon; \beta(0, \cdot) = \beta^0(\cdot); \frac{\beta_1(t)}{\beta_1(0)} \geq 1/2\}$ при $\varepsilon \leq 1/(100\chi\widehat{C})$ (и, тем самым, при $\|P(\beta)\| \leq 1/2$) уравнение (3) стандартным образом преобразуется в функциональное $\beta = \Phi(\beta)$. Проверяется, что оператор Φ сжимаем на $\mathcal{M}$ при $1/\varepsilon \geq C_*\chi^3$, $1/T \geq C_*\chi^2$, где $C_* = C_*(\widehat{C})$. Явно выписываются главная часть $\overline{\beta}(t, \sigma) = \sum_{n \geq 1} \overline{\beta}_n(t) \sin \pi n \sigma$ построенного решения. Из теоремы 2 вытекает

ТЕОРЕМА 3. Коэффициенты $\beta_n(t)$ определены при всех $t > 0$, если

$$\sum_{k \geq 2} (k\beta_k)^2 \leq (8C_*)^{-1/2} |\beta_1^{3/2}|, \quad |\beta_1| \ll 1.$$

При этом $\beta_n(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (примерно так же, как и $\beta_n(t)$).

Векторное поле $(\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_k)$ для случая, когда $\beta_j(0) = 0$ при $j \neq 1$ и $j \neq k$, представлено на рисунке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Escher, G. Simonett // SIAM J. Math. Anal. 1997. V. 28. №5. P. 1028–1047.
- [2] A. S. Demidov // Russian J. Math. Phys. 2000. V. 7. №2. P. 166–186.