Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Э. Добринская, Гипотеза Арнольда–Тома–Фама и классифицирующее пространство положительного моноида Артина, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 6, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm582>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 14:49:23

ГИПОТЕЗА АРНОЛЬДА–ТОМА–ФАМА И КЛАССИФИЦИРУЮЩЕЕ ПРОСТРАНСТВО ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО МОНОИДА АРТИНА

Н. Э. ДОБРИНСКАЯ

Пусть S – конечное множество, а M – матрица Кокстера, $M = \{m_{s,t}\}_{s,t \in S}$, т.е. $m_{s,s} = 1$ для всех $s \in S$, $m_{s,t} = m_{t,s} \in \{2, 3, \dots, +\infty\}$ для $s, t \in S$, $s \neq t$. Системой Артина, ассоциированной с M , называется пара (A, S) , где A – группа со следующим представлением:

$$\langle s \in S \mid \underbrace{sts \dots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst \dots}_{m_{s,t}} \text{ для } s, t \in S, s \neq t \rangle.$$

Положительным моноидом Артина называется моноид, задаваемый теми же образующими и соотношениями. Группа Кокстера, соответствующая системе (A, S) , – это фактор-группа $W = A/\langle s^2 = 1, s \in S \rangle$. Группа Кокстера W имеет точное представление отражениями на пространстве $V = \mathbb{R}^{(S)}$, которое является собственным на открытом выпуклом конусе I в этом пространстве, называемом конусом Титца (детали см. в [1]). Группа W действует свободно на $((V + iI) - \bigcup \text{гиперплоскости отражений})$. Введем пространство

$$\mathcal{H}_W = ((V + iI) - \bigcup \text{гиперплоскости отражений}) / W.$$

Известная гипотеза Арнольда–Томы–Фамы (см., например, [2]) заключается в том, что $\mathcal{H}_W$ является классифицирующим пространством BA группы A , т.е. пространством типа $K(A, 1)$. Центральным результатом настоящей заметки является

ТЕОРЕМА 1. $\mathcal{H}_W$ является классифицирующим пространством BA^+ моноида A^+ .

СЛЕДСТВИЕ 1. Гипотеза Арнольда–Томы–Фамы верна тогда и только тогда, когда компоненты связности пространства ΩBA^+ стягиваемы.

Заметим, что в случае, когда группа W – конечна (говорят, что тогда соответствующая группа Артина A имеет конечный тип), гипотеза имеет положительное решение согласно работе [3].

Нам потребуются следующие определения классифицирующего пространства и гомотопического пополнения. Пусть X – частичный моноид (см. [4]), а $X_k \subset X \times \dots \times X = X^k$ – пространство всех таких последовательностей $(x_1, \dots, x_k)$, что произведение $x_1 \dots x_k$ принадлежит X . Набор пространств X_k образует симплициальное множество, в котором $d_i: X_k \rightarrow X_{k-1}$ и $s_i: X_k \rightarrow X_{k+1}$ определены следующим образом:

$$\begin{aligned} d_0(x_1, \dots, x_k) &= (x_2, \dots, x_k), & d_k(x_1, \dots, x_k) &= (x_1, \dots, x_{k-1}), \\ d_i(x_1, \dots, x_k) &= (x_1, \dots, x_i x_{i+1}, \dots, x_k) \text{ при } 0 < i < k, \\ s_i(x_1, \dots, x_k) &= (x_1, \dots, x_i, 1, x_{i+1}, \dots, x_k) \text{ при } 0 \leq i \leq k. \end{aligned}$$

Классифицирующим пространством BX частичного моноида X называется симплициальная реализация этого симплициального множества.

Рассмотрим дискретный моноид M и такое его подмножество $X \subset M$, что операция, индуцированная этим вложением, превращает его в частичный моноид. Заметим, что вышеописанная конструкция классифицирующего пространства в качестве BM дает классифицирующее пространство моноида M по Милграму–Стинроду, а пространство BX является клеточным подкомплексом в BM .

Сопоставим X моноид CX следующим образом. Множеством элементов этого моноида является $\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} X^{k+1} \times I^k = \Sigma / \sim$, где множество Σ и отношение эквивалентности определяются следующими условиями. Пусть $(x_0, t_1, x_1, \dots, t_n, x_n) \in WX$, тогда

- 1) если $t_i = 0$, то $x_{i-1}x_i \in X$ и $(x_0, \dots, x_n) \sim (x_0, t_1, \dots, t_{i-1}, x_{i-1}x_i, t_{i+1}, \dots, t_n, x_n)$;
- 2) если $x_i = 1$ и $1 \leq i \leq n-1$, то $(x_0, \dots, x_n) \sim (x_0, \dots, x_{i-1}, \max(t_{i-1}, t_i), x_{i+1}, \dots, x_n)$;
- 3) если $x_0 = 1$, то $(x_0, \dots, x_n) \sim (x_1, \dots, x_n)$;
- 4) если $x_n = 1$, то $(x_0, \dots, x_n) \sim (x_0, \dots, x_{n-1})$.

Умножение задается следующим образом:

$$(x_0, \dots, t_n, x_n) \cdot (y_0, \dots, s_m, y_m) = (x_0, \dots, t_n, x_n, 1, y_0, \dots, s_m, y_m).$$

В случае моноида $(X = M)$, конструкция CM совпадает с W -конструкцией WM (см. [5]), для которой ввиду наличия аугментации $WM \rightarrow M$ очевидна эквивалентность $BWM \simeq BM$. Оказывается, этот результат верен и в более общем случае.

ЛЕММА 1. *Моноид CX и частичный моноид X имеют гомотопически эквивалентные классифицирующие пространства:*

$$BCX \simeq BX.$$

Определим подмножество $A_f^+ \subset A^+$ следующими двумя условиями: во-первых, элемент A_f^+ в любой записи в стандартной системе образующих не содержит квадратов; и, во-вторых, подмоноид, порожденный образующими, входящими в запись элемента, имеет конечный тип. Первым шагом доказательства основных утверждений является замечание, что пространство $\mathcal{H}_W$ из гипотезы гомотопически эквивалентно пространству BA_f^+ , которое, в свою очередь, является конечным клеточным комплексом. На втором шаге мы устанавливаем эквивалентность пространств BA_f^+ и BA^+ , опираясь на следующую лемму.

ЛЕММА 2. *Мономорфизм $CA_f^+ \rightarrow CA^+$ является гомотопической эквивалентностью.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Вложение $BA_f^+ \rightarrow BA^+$ является гомотопической эквивалентностью.*

Доказательство леммы строится на следующих утверждениях. Для фиксированного элемента $g \in A^+$ построим симплициальный комплекс K_g как порядковый комплекс всех собственных левых делителей элемента g , где отношение частичного порядка есть делимость слева. Таким образом, вершинами комплекса K_g являются все делители h , отличные от 1 и g , а симплексы размерности k индексируются последовательностями вершин $(h_1, h_2, \dots, h_{k+1})$, где h_i делит h_{i+1} .

ЛЕММА 3. *Если $g \notin A_f^+$, то комплекс K_g является стягиваемым.*

Доказательство леммы состоит из двух частей – доказательства односвязности: $\pi_1(K_g) = 0$ и того, что $H_k(K_g) = 0$ при $k \geq 2$. Лемма 3 позволяет построить ретракцию WA^+ на WA_f^+ , что доказывает лемму 2.

ТЕОРЕМА 2. *Пространство $\mathcal{H}_W$ гомотопически эквивалентно классифицирующему пространству моноида A^+ , т.е. $\mathcal{H}_W \simeq BA^+$.*

Заметим, что существует каноническое отображение $i: BA^+ \rightarrow BA$, которое индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. Таким образом, гипотеза эквивалентна утверждению, что отображение i является гомотопической эквивалентностью.

Как показано в [6], любой CW -комплекс может иметь вид BM для некоторого дискретного моноида M , и, следовательно, гомотопическое групповое пополнение ΩBM и универсальное групповое пополнение UM не всегда эквивалентны. Известны достаточные условия (которые не выполнены для моноида A^+ бесконечного типа) на моноид M , гарантирующие эту эквивалентность [7]. Основная теорема данной работы показала, что решение вопроса о групповом пополнении для моноида A^+ эквивалентно доказательству или опровержению гипотезы Арнольда–Тома–Фама.

Автор выражает благодарность профессору В. М. Бухштаберу и Т. Е. Панову за стимулирующие обсуждения и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Бурбаки. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972, 1978. [2] R. Charney, M. Davis // J. Amer. Math. Soc. 1995. V. 8. № 3. P. 597–627. [3] P. Deligne // Invent. Math. 1972. V. 17. P. 273–302. [4] G. Segal // Invent. Math. 1973. V. 21. P. 213–221. [5] Дж. Бордман, Р. Фогт. Гомотопические инвариантные структуры на топологических пространствах. М.: Мир, 1977. [6] D. McDuff // Topology. 1979. V. 18. P. 313–320. [7] D. McDuff, G. Segal // Invent. Math. 1976. V. 31. P. 279–284.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
12.11.2202