Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Дынников, С. В. Смирнов, Точно решаемые циклические q -цепочки Дарбу,
УМН, 2002, том 57, выпуск 6, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm583>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 16:48:05

ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ ЦИКЛИЧЕСКИЕ q -ЦЕПОЧКИ ДАРБУ

И. А. Дынников, С. В. Смирнов

Цепочкой Дарбу называется последовательность самосопряженных дифференциальных операторов $L_1, L_2, \dots$ на прямой, связанных преобразованиями Дарбу:

$$L_j = A_j A_j^+ - \alpha_j = A_{j-1}^+ A_{j-1}, \quad (1)$$

где $A_j = -d/dx + f_j(x)$ – дифференциальные операторы первого порядка. Цепочка называется циклической периода (или длины r), если $L_{j+r} = L_j$, $j = 1, 2, \dots$. В частном случае $r = 1$ оператор $L + \frac{\alpha}{2}$ является гармоническим осциллятором.

Циклические цепочки Дарбу приводят к интегрируемым системам дифференциальных уравнений на функции f_j , которые изучались в [1]. Принципиально отличаются случаи $\alpha = 0$ и $\alpha \neq 0$, где $\alpha = \sum_{j=1}^r \alpha_j$. В случае $\alpha = 0$ операторы циклической цепочки Дарбу являются конечнозонными. При $\alpha \neq 0$ уравнения на f_j сводятся к уравнениям Пенлеве и их высшим аналогам, а соотношения (1) обязывают операторы L_j иметь дискретный спектр, образованный r арифметическими прогрессиями (см. [1]).

Рассмотрим следующий дискретный “ q -аналог” цепочки Дарбу:

$$L_j = A_j A_j^+ - \alpha_j = q A_{j-1}^+ A_{j-1}, \quad (2)$$

где $A_j = a_j + b_j T$ – разностные операторы на одномерной решетке $\mathbb{Z}$, T – оператор сдвига: $(A_j f)(n) = a_j(n)f(n) + b_j(n)f(n+1)$, $a_j(n), b_j(n) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Без ограничения общности можно считать, что $b_j(n) > 0$ для всех j, n . Будем говорить, что цепочка (2) является циклической с периодом r и сдвигом s , если для всех $j \geq 1$ выполнено

$$L_{j+r} = T^{-s} L_j T^s. \quad (3)$$

Ранее в литературе рассматривался в основном случай $s = 0$. Однако в работе [2], а также в [3] указывалась возможность “обратной” факторизации, т.е. замены операторов $A_j = a_j + b_j T$ на операторы вида $A_j = a_j T^+ + b_j$, что фактически эквивалентно рассмотрению “прямой” факторизации при $s = r$ (оператор L_j заменяется на $T^{-j} L_j T^j$). Общая постановка с произвольным s , по-видимому, не рассматривалась. В литературе изучались следующие случаи.

1. $\alpha = 0$, $q = 1$, r – произвольное [2]. Операторы L_j являются конечнозонными.
2. $\alpha > 0$, $q = 1$, $r = 1$ (разностный аналог гармонического осциллятора) [2]. В этом случае симметричных операторов L_j в пространстве функций на всей решетке $\mathbb{Z}$ не существует, однако имеются решения на “полупрямой” $\mathbb{Z}_{>0}$. Спектр оператора $L + \frac{\alpha}{2}$ такой же, как спектр обычного гармонического осциллятора, $\lambda_k = \alpha(k + \frac{1}{2})$, собственные функции выражаются через многочлены Шарлье и потому образуют полное семейство в $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z}_{>0})$.
3. $r = 1$, $\alpha > 0$, $0 < q < 1$ (или $\alpha < 0$, $1 < q$) [2], [4] (q -осциллятор). Оператор L имеет дискретный спектр в промежутке $[0, \frac{q\alpha}{1-q}]$ (или $(0, \frac{q\alpha}{q-1})$ в случае $q > 1$), образующий “ q -арифметическую прогрессию”. Как отмечается в [2], оператор L в этом случае неограничен и, по-видимому, имеет непрерывный спектр в области $(\frac{q\alpha}{1-q}, \infty)$.
4. В работе [5] рассмотрена версия q -осциллятора в виде разностного оператора на всей прямой, которая в нашей постановке может быть интерпретирована как случай $s = 1$, $r = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2$ (α и q такие же, как в предыдущем случае). В [5] указано частное решение, обладающее дополнительной симметрией относительно начала координат. Особенность данного случая в том, что оператор L является ограниченным и не имеет непрерывного спектра.

Здесь мы укажем, что последнее свойство наблюдается в случае цепочки произвольной четной длины при $s = r/2$, и приведем явный вид общего решения задачи в случае $s = 1$, $r = 2$.

ТЕОРЕМА. Для произвольных четного r , положительных $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, $0 < q < 1$ задача (2), (3) при $s = r/2$ имеет r -параметрическое семейство решений. При этом для всех j оператор L_j ограничен и имеет только дискретный спектр $\{\lambda_{j,0}, \lambda_{j,1}, \dots\}$ в проме-

жутке $[0, \|L\|)$, вычисляемый по схеме Дарбу: $\lambda_{j,0} = 0$, $\lambda_{j+1,k+1} = q(\lambda_{j,k} + \alpha_j)$, $\lambda_{j+r,k} = \lambda_{j,k}$. Для каждого j собственные функции операторов L_j , также вычисляемые по схеме Дарбу: $A_{j-1}\psi_{j,0} = 0$, $\psi_{j+1,k+1} = A_j^+ \psi_{j,k}$, образуют полное семейство в $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$.

Аналогичное утверждение имеет место при $\alpha_1, \dots, \alpha_r < 0$, $1 < q$ (в этом случае нуль не входит в спектр операторов L_j).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. При $r = 2 = 2s$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $0 < q < 1$ общее решение задачи (2), (3) имеет вид: $a_1(n) = \epsilon \sqrt{\xi_{2n}}$, $b_1(n) = \sqrt{\eta_{2n+1}}$, $a_2(n) = \epsilon \sqrt{\xi_{2n-1}}$, $b_2(n) = \sqrt{\eta_{2n}}$, где $\epsilon = \pm 1$,

$$\xi_n = \frac{1}{2} \frac{c_n - 2\kappa q^{-n-\varphi-\frac{1}{2}} + c_{n+1}q^{-2n-2\varphi-1}}{(1-q^{-2(n+\varphi)})(1-q^{-2(n+\varphi+1)})}, \quad \eta_n = \frac{1}{2} \frac{c_{n+1} - 2\kappa q^{n+\varphi+\frac{1}{2}} + c_n q^{2n+2\varphi+1}}{(1-q^{2(n+\varphi)})(1-q^{2(n+\varphi+1)})},$$

$$c_n = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{1-q} + (-1)^n \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{1+q}, \quad (4)$$

φ — произвольный параметр, а параметр κ удовлетворяет ограничениям

$c_{[\varphi]}q^{-\theta} + c_{[\varphi]-1}q^{\theta} < 2\kappa < \min(c_{[\varphi]}q^{\theta+1} + c_{[\varphi]-1}q^{-\theta-1}, c_{[\varphi]}q^{\theta-1} + c_{[\varphi]-1}q^{-\theta+1})$ при $\varphi \notin \mathbb{Z}$ и $2\kappa = c_{\varphi}q^{\frac{1}{2}} + c_{\varphi-1}q^{-\frac{1}{2}}$, если $\varphi \in \mathbb{Z}$ (в этом случае дроби (4) следует сократить на $1-q^{2(n+\varphi)}$ при $n \equiv \varphi \pmod{2}$ и на $1-q^{2(n+\varphi+1)}$ при $n \equiv \varphi+1 \pmod{2}$), где $\theta = \varphi - [\varphi] - \frac{1}{2}$, $[\varphi]$ обозначает целую часть числа φ .

НАБЛЮДЕНИЕ. В случае $r = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2$ операторы $L_j + \frac{\alpha_j}{2}$, построенные по указанным решениям, сходятся при $q \rightarrow 1$ к оператору гармонического осциллятора в следующем смысле. Положим $\varphi = 0$, $\epsilon = -1$, $q = \exp(-\frac{\alpha_1}{4}h^2)$, $x = nh$, $T = \exp(h\frac{d}{dx})$ и будем считать n вещественным в формулах (4), а оператор L_j — разностным оператором на всей прямой $\mathbb{R}$. Тогда для $f \in C^2(\mathbb{R})$ будем иметь

$$\left(L_{1,2} + \frac{\alpha_1}{2}\right)f(x) = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha_1^2}{4}x^2\right)f(x) + o(h).$$

Аналогично, в случае $\alpha_1 \neq \alpha_2$ оператор L_j сходится к

$$-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{(\alpha_j + \alpha_{j+1})^2}{16}x^2 - \frac{\alpha_j}{2} - \frac{(\alpha_j - \alpha_{j+1})(\alpha_j + 3\alpha_{j+1})}{4(\alpha_j + \alpha_{j+1})^2x^2},$$

где $\alpha_{j+2} = \alpha_j$.

В случаях 2, 3, упомянутых выше, такая связь между дискретной и непрерывной задачами не имеет места. Таким образом, рассматриваемый нами случай $s = r/2$ дает в каком-то смысле “правильную” дискретизацию обычной цепочки Дарбу.

Мы надеемся доказать, что такого рода сходимость q -цепочки к обычной цепочке Дарбу имеет место и в случае произвольного четного r . Численный эксперимент подтверждает сходимость q -цепочки периода 6 к обычной цепочке Дарбу периода 3 в случае $\alpha_j = \alpha_{j+3}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. П. Веселов, А. Б. Шабат // Функциональный анализ и его прил. 1993. Т. 27. № 2. С. 1–21.
 [2] S. P. Novikov, I. A. Taimanov. Appendix II in S. P. Novikov, A. P. Veselov // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1997. V. 179. P. 109–132. [3] С. П. Новиков, И. А. Дынников // УМН. 1997. Т. 52. № 5. С. 175–234. [4] V. Spiridonov, L. Vinet, A. Zhedanov // Lett. Math. Phys. 1993. V. 29. № 1. P. 63–73. [5] N. Atakishiyev, A. Frank, K. Wolf // J. Math. Phys. 1994. V. 35. № 7. P. 3253–3260.