Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Карпушкин, О числе компонент дополнения к некоторым алгебраическим кривым, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 6, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm584>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 13:39:16

О ЧИСЛЕ КОМПОНЕНТ ДОПОЛНЕНИЯ К НЕКОТОРЫМ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ КРИВЫМ

В. Н. КАРПУШКИН

В работе [1] была дана верхняя оценка для числа компонент дополнения к нулям сферической функции (двух переменных) степени n ($n \geq 2$). Здесь эта оценка несколько улучшается. Полученная оценка использует только некоторые простейшие геометрические свойства кривых – нулей сферических функций и поэтому является точной для более широкого класса кривых на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ или на сфере S^2 , называемых ниже допустимыми. Доказано, что число компонент дополнения к допустимой кривой на $\mathbb{R}P^2$ не превосходит $[(n-1)^2/2] + 2$. Указанная оценка сильнее, чем оценка Германа $n(n-1)/2 + 1$ (см. [2]) для произвольных кривых, но слабее, чем оценка Гарнака $(n(n-3) + 5 + (-1)^n)/2$ (см. [3]) для неприводимых кривых. Данная работа уточняет результат работы [4].

1. Формулировки результатов. Пусть S^2 – стандартная сфера в $\mathbb{R}^3$ с индуцированной метрикой, $\mathbb{R}P^2$ – проективная плоскость с метрикой, построенной с помощью метрики на S^2 . Кривой степени n на $\mathbb{R}P^2$ или на S^2 называется множество нулей однородного многочлена степени n от трех переменных.

Назовем вещественную нормализованную кривую Γ на $\mathbb{R}P^2$ (S^2) допустимой, если из того, что прямые (большие окружности на S^2) a и b содержатся в Γ и через их точку пересечения не проходят другие ветви кривой Γ , следует, что прямые a и b пересекаются ортогонально. Из вспомогательной леммы 1 работы [1] следует, что нули сферических функций – допустимые кривые.

ТЕОРЕМА. Пусть Γ – допустимая кривая на $\mathbb{R}P^2$ степени n , $n \geq 2$. 1. Предположим, что n – четное число, тогда $\dim H_0(\mathbb{R}P^2 \setminus \Gamma) \leq (n^2 - 2n)/2 + 2$. 2. Предположим, что n – нечетное число, тогда $\dim H_0(S^2 \setminus \Gamma) \leq (n-1)^2/2 + 2$.

Ветвь кривой называется нечетной, если ее дополнение в $\mathbb{R}P^2$ состоит из односвязных кусков (см. [3]).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\tilde{\Gamma}$ – допустимая кривая на S^2 степени n , $n \geq 2$. 1. Предположим, что n – четное число, тогда $\dim H_0(S^2 \setminus \tilde{\Gamma}) \leq n^2 - 2n + 4$. Если n – четное число и кривая $\tilde{\Gamma}$ не имеет нечетной ветви, то $\dim H_0(S^2 \setminus \tilde{\Gamma}) \leq n^2 - 2n + 3$. 2. Предположим, что n – нечетное число, тогда $\dim H_0(S^2 \setminus \tilde{\Gamma}) \leq (n-1)^2 + 4$.

Далее везде предполагаем, что Γ – допустимая кривая степени n , Γ содержит r различных вещественных прямых.

ЗАМЕЧАНИЕ. Оценки теоремы и следствия точны. Пусть p – число особых кривых 2-го порядка. Пусть все кривые, входящие в Γ , пересекаются только в вещественных точках. Тогда Γ – связное подмножество $\mathbb{R}P^2$. Далее в этом замечании все особые точки кривой Γ двойные. Через $\tilde{\Gamma}$ обозначим кривую на S^2 , соответствующую кривой Γ на $\mathbb{R}P^2$. 1) Пусть $n = 2p$, $r = 0$, кривая Γ разбивает $\mathbb{R}P^2$ на один неодносвязный кусок и односвязные куски, тогда $\dim H_0(\mathbb{R}P^2 \setminus \Gamma) = n(n-2)/2 + 2$, $\dim H_0(S^2 \setminus \tilde{\Gamma}) \leq n(n-2) + 3$. 2) Пусть $n = 2p + 2$, $r = 2$. Тогда кривая Γ разбивает $\mathbb{R}P^2$ на односвязные куски и $\dim(\mathbb{R}P^2 \setminus \Gamma) = n(n-2)/2 + 2$, $\dim(S^2 \setminus \tilde{\Gamma}) = n(n-2) + 4$. 3) Пусть $n = 2p + 3$, $r = 3$. Тогда кривая Γ разбивает $\mathbb{R}P^2$ на односвязные куски и $\dim H_0(\mathbb{R}P^2 \setminus \Gamma) = (n-1)^2/2 + 2$, $\dim H_0(S^2 \setminus \tilde{\Gamma}) = (n-1)^2 + 4$. Заметим, что любые три прямые в $\mathbb{R}P^2$, лежащие в общем положении, проективным преобразованием переводятся в три ортогональные прямые.

2. Доказательство теоремы. Далее предполагается, что l – число $\mathbb{R}$ -неприводимых кривых, составляющих кривую Γ , k_i – число особых точек кривой Γ , в которых пересекаются по i вещественных прямых ($i \geq 2$) и, возможно, еще какие-либо ветви кривой Γ .

ЛЕММА 1. Пусть Γ – кривая на $\mathbb{R}P^2$ степени n . Тогда $\dim H_0(\mathbb{R}P^2 \setminus \Gamma) \leq \frac{n^2 - 3n}{2} + q + l - \sum_{i \geq 3} k_i \frac{(i-1)(i-2)}{2}$. Здесь $q = 2$, если Γ не имеет нечетной ветви, и $q = 1$, если Γ имеет нечетную ветвь.

Лемма 1 следует из теоремы Гарнака и теоремы Безу (см. [3]).

ЛЕММА 2. Пусть Γ – допустимая кривая степени n . Предположим, что Γ содержит r прямых, $r \geq 4$. Тогда $\sum_{i \geq 3} k_i \frac{(i-1)(i-2)}{2} \geq \frac{r(r-1)}{6} - \frac{r(r-1)^{1/2}}{6}$.

Докажем лемму 2.

ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЛЕММА. Пусть Γ – допустимая кривая, содержащая r прямых, $r \geq 4$. Пусть m_j – число двойных точек кривой Γ , которые суть двойные пересечения этих прямых с j -й прямой, $1 \leq j \leq r$. Тогда $m_1^2 + \dots + m_r^2 \leq r(r-1)$ (у j -й прямой, принадлежащей кривой Γ , могут быть другие двойные точки).

Доказательство вспомогательной леммы совершенно аналогично доказательству вспомогательной леммы 2 из работы [1]. Там используется условие ортогональности прямых, принадлежащих Γ .

Из формулировки вспомогательной леммы получим: $m_1 + \dots + m_r \leq r(r-1)^{1/2}$. Величина $\sum_{i \geq 3} k_i \frac{i(i-1)}{2}$ равна числу двойных точек, рожденных у кривой Γ после приведения в общее положение всех прямых, входящих в кривую Γ . Эти точки лежат на пересечениях пошевеленных прямых; $\frac{r(r-1)}{2}$ – число двойных точек r прямых в общем положении. Здесь $\frac{r(r-1)^{1/2}}{2}$ – верхняя оценка на число двойных точек (до шевеления) у множества всех прямых (числом r), входящих в кривую Γ . Отсюда получим $\sum_{i \geq 3} k_i \frac{i(i-1)}{2} \geq \frac{r(r-1)}{2} - \frac{r(r-1)^{1/2}}{2}$. Следовательно, $\sum_{i \geq 3} k_i \frac{(i-1)(i-2)}{2} \geq \frac{r(r-1)}{6} - \frac{r(r-1)^{1/2}}{6}$. Таким образом, лемма 2 доказана.

Заметим, что $l \leq \frac{n-r}{2} + r = \frac{n+r}{2}$. Теорема следует из лемм 1, 2 при $r \geq 4$ и из леммы 1 (при $r \leq 3$).

Автор благодарен В.И. Арнольду, С.М. Гусейн-Заде и А.В. Чернавскому за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Н. Карпушкин // Функци. анализ и его прил. 1989. Т. 23. № 3. С. 59–60. [2] В. И. Арнольд // УМН. 1973. Т. 28. № 5. С. 260–262. [3] Д. А. Гудков // УМН. 1974. Т. 29. № 4. С. 3–79. [4] В. Н. Карпушкин // Функци. анализ и его прил. 1994. Т. 28. № 2. С. 52–54.