Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. В. Михайлов, О невидимых подгруппах, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 6, 187–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm585>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 17:37:54

О НЕВИДИМЫХ ПОДГРУППАХ

Р. Михайлов

Нормальная подгруппа K группы G называется невидимой в G , если K является нормальным замыканием конечного множества элементов из G и $[K, G] = K$ (см. [1]). Невидимые подгруппы возникают при изучении алгебраических замыканий групп и алгебраических вопросов, связанных с инвариантами конкордантности классических зацеплений. В частности, если K – невидимая подгруппа в G и $\phi: G \rightarrow A$ – некоторый гомоморфизм, где A – алгебраически замкнутая группа, то $K \subset \text{Ker } \phi$.

Для произвольной группы G рассмотрим ее трансфинитный нижний центральный ряд, определяемый индуктивно: $\gamma_1 G = G, \dots, \gamma_{\tau+1} G = [\gamma_\tau G, G]$ для любого ординала τ и $\gamma_\tau G = \bigcap_{\tau_i < \tau} \gamma_{\tau_i} G$, если τ является предельным ординалом последовательности $\tau_i, i = 1, 2, \dots$, т.е. τ – наименьший ординал со свойством $\tau_i < \tau$ для всех i . Длиной нижнего центрального ряда группы G (или просто длиной) называется наименьшее τ такое, что $\gamma_\tau G = \gamma_{\tau+1} G$.

В работе [2] поставлена следующая проблема: пусть G конечно-порожденная группа длины α , верно ли, что $\gamma_\alpha G$ представляется в виде объединения невидимых подгрупп? Для бесконечно-порожденных групп легко строятся контрпримеры [2], а для конечно-порожденных групп, понятно, имеет смысл рассматривать лишь бесконечные ординалы, так как для конечных n $\gamma_n G$ является нормальным замыканием конечного числа коммутаторов веса n .

Основным результатом данной работы является следующий пример, решающий проблему из [2].

ТЕОРЕМА. *Группа $G = \langle a, b \mid [a, a^{b^i}] = [a, a^{b^{i+1}}]; i = 1, 2, \dots \rangle$ имеет длину строго ω , но $\gamma_\omega G$ не представляется в виде объединения невидимых подгрупп¹.*

ЛЕММА 1. *В свободной группе ранга 2 $F_2 = \langle a, b \rangle$ имеет место включение*

$$[a, a^g] \in \langle [a, a^{b^i}], i = 1, 2, \dots \rangle^{F_2}$$

для любого $g \in F_2$.

Лемму 1 можно доказать, например, с помощью выбора свободного базиса в подгруппе $\langle [a, a^g] \mid g \in F_2 \rangle^{F_2}$ или просто рассматривая разложение элемента g в базисе группы F_2 и применяя коммутаторные соотношения. Далее везде G будет обозначать группу из теоремы.

ЛЕММА 2. $\gamma_\omega G = \langle [a, a^{b^i}], i = 1, 2, \dots \rangle^G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношения группы G обеспечивают очевидное включение

$$W = \langle [a, a^{b^i}], i = 1, 2, \dots \rangle^G \subset \gamma_\omega G.$$

Докажем обратное включение. Для этого достаточно доказать, что

$$G/W = F_2 / \langle [a, a^{b^i}], i = 1, 2, \dots \rangle^{F_2}$$

нильпотентно аппроксимируема.

По лемме 1 имеем $H = F_2 / \langle [a, a^{b^i}], i = 1, 2, \dots \rangle^{F_2} = F_2 / \langle [a, a^g] \rangle^{F_2}$. Данная группа H является свободным абелевым расширением:

$$1 \rightarrow \langle a \rangle^{F_2} / \gamma_2 \langle a \rangle^{F_2} \rightarrow F_2 / \gamma_2 \langle a \rangle^{F_2} \rightarrow F_2 / \langle a \rangle^{F_2} (= \mathbb{Z}) \rightarrow 1.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00014).

¹Мы будем использовать стандартные обозначения $a^b = b^{-1}ab$, $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$.

Для свободных абелевых расширений имеется критерий Хартли [3] нильпотентной аппроксимируемости: пусть F – свободная группа ранга ≥ 2 , N – ее нормальная подгруппа, тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $F/\gamma_2 N$ нильпотентно аппроксимируема;
- 2) пусть $\mathfrak{g}$ – аугментационный идеал группового кольца $\mathbb{Z}[F/N]$, тогда $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{g}^i = 0$;
- 3) либо F/N аппроксимируется нильпотентными группами без кручения, либо F/N дискриминирует класс нильпотентных групп некоторого конечного примарного p -периода.

Так как $F_2/\langle a \rangle^{F_2} = \mathbb{Z}$ сама является нильпотентной группой без кручения, получаем нильпотентную аппроксимируемость требуемой группы.

ЛЕММА 3. $\gamma_{\omega} G = \gamma_{\omega+1} G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $[a, a^{b^i}] = [a, [a, a^{b^{i+1}}]] \in \gamma_{\omega+1} G$. Утверждение следует из леммы 2 и того факта, что элементы трансфинитных нижних центральных рядов нормальны в группах.

ЗАМЕЧАНИЕ. Группа $G/\gamma_{\omega} G$ изоморфна декартову сплетению $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$, может быть представлена как подгруппа в $GL_2(\mathbb{R})$, порожденная $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ для трансцендентного ξ , и не является конечно-представленной по теореме Баумслага [4].

Введем следующие группы:

$$E_n = \langle a, b \mid [a, a^{b^i}] = [a, a^{b^{i+1}}]; i \leq n \rangle,$$

которые при росте n “приближаются” к рассматриваемой группе G . Соотношения R_n групп E_n задают градуировку соотношений группы G , таким образом, $w = 1$ в G для некоторого слова $w \in F_2$ тогда и только тогда, когда $w = 1$ в E_l для некоторого l .

ЛЕММА 4. В группе $E_n/\gamma_{2n+4} E_n$ элемент $[a, a^b]$ нетривиален.

Проблема равенства слов в конечно-порожденных нильпотентных группах алгоритмически разрешима [5], [6]. Алгоритм основан на приведении определяющих соотношений группы и проверяемого слова к некоторому стандартному виду, например, с помощью базиса Холла. Доказательство леммы 4 также сводится к приведению определяющих соотношений групп E_n к стандартному виду по модулю $\gamma_{2n+4} E_n$, после которого утверждение становится очевидным. Лемму 4, вероятно, также можно доказать, построив вложения групп $E_n/\gamma_{2n+4} E_n$ в группы унитарных матриц над целыми числами.

Теперь несложно доказать основное утверждение теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3 группа G имеет длину ω , следовательно, для доказательства теоремы достаточно показать, что $\gamma_{\omega} G$ не представима в виде объединения невидимых подгрупп. Предположим противное. Рассмотрим невидимую подгруппу K , содержащую элемент $[a, a^b]$. Пусть K нормально порождается элементами $w_1, \dots, w_s$ для некоторого s . Так как K невидима, то выполнены следующие включения: $w_1, \dots, w_s \in \langle [w_1, a], [w_1, b], \dots, [w_s, a], [w_s, b] \rangle^G$. Тогда существует n такое, что данные соотношения и включение $[a, a^b] \in \langle w_1, \dots, w_s \rangle$ выполнены и в E_n , откуда следует, что $[a, a^b] \in \gamma_{\omega} E_n$, чего не может быть по лемме 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Levine // Comment. Math. Helv. 1989. V. 64. № 2. P. 236–255. [2] J. Levine // Israel J. Math. 1991. V. 73. № 1. P. 57–64. [3] B. Hartley // Group Theory. London: Academic Press, 1984. P. 6–120. [4] G. Baumslag // Math. Z. 1961. V. 75. P. 22–28. [5] R. C. Lyndon // Proc. Amer. Math. Soc. 1952. V. 3. P. 579–583. [6] А. И. Мальцев // Матем. сб. 1955. Т. 37 (79). № 3. С. 567–572.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: rmikhailov@mail.ru

Принято редколлегией
23.09.2002