Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мохов, Пары Лакса для согласованных нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 6, 189–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm586>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 18:19:37

ПАРЫ ЛАКСА ДЛЯ СОГЛАСОВАННЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ОПЕРАТОРОВ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

О. И. Мохов

Получены нелинейные уравнения для неособых пар согласованных нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа и доказана интегрируемость этих уравнений методом обратной задачи рассеяния. Для этих уравнений найдена пара Лакса со спектральным параметром. В [1] Ферапонтов ввел и изучил общие нелокальные гамильтоновы операторы гидродинамического типа, а именно, гамильтоновы операторы вида

$$P^{ij} = g^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} + b_k^{ij}(u(x)) u_x^k + \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_{\alpha} (w^{\alpha})_k^i(u(x)) u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \circ (w^{\alpha})_s^j(u(x)) u_x^s, \quad (1)$$

где $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$, $\varepsilon_{\alpha} = \pm 1$. Пара метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ называется *неособой*, если собственные значения этой пары метрик, т.е. корни уравнения $\det(g_1^{ij}(u) - \lambda g_2^{ij}(u)) = 0$, различны. В [2] доказано, что произвольная неособая пара метрик согласована тогда и только тогда, когда существуют локальные координаты $u = (u^1, \dots, u^N)$ такие, что обе метрики диагональны в этих координатах и имеют следующий специальный вид: $g_2^{ij}(u) = g^i(u) \delta^{ij}$ и $g_1^{ij}(u) = f^i(u^i) g^i(u) \delta^{ij}$, где $f^i(u^i)$, $i = 1, \dots, N$, — функции одной переменной (вообще говоря, комплексные). Если гамильтоновы операторы вида (1) согласованы, то и их метрики согласованы [2]. Более того, в [2] было доказано также, что если 1) пара метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ является неособой, 2) метрики $g_1^{ij}(u)$, $g_2^{ij}(u)$ и аффиноры $(w_1^{\beta})_j^i(u)$, $(w_2^{\alpha})_j^i(u)$ одновременно диагонализуются в некоторой области локальных координат, то соответствующие гамильтоновы операторы согласованы тогда и только тогда, когда согласованы их метрики. Здесь мы доказываем в некотором смысле обратную теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Если пара метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ является неособой, то гамильтоновы операторы вида (1) согласованы тогда и только тогда, когда 1) их метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ согласованы, 2) метрики $g_1^{ij}(u)$, $g_2^{ij}(u)$ и аффиноры $(w_1^{\beta})_j^i(u)$, $(w_2^{\alpha})_j^i(u)$ одновременно диагонализуются в некоторой области локальных координат.*

Рассмотрим произвольную неособую пару согласованных нелокальных гамильтоновых операторов P_1^{ij} и P_2^{ij} вида (1), т.е. мы предполагаем, что пара метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ является неособой.

ТЕОРЕМА 2. *Неособые пары согласованных нелокальных гамильтоновых операторов вида (1) описываются следующими совместными интегрируемыми нелинейными системами:*

$$\epsilon_2^i \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^i} + \epsilon_2^j \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial u^j} + \sum_{s \neq i, s \neq j} \epsilon_2^s \beta_{si} \beta_{sj} + \sum_{\alpha=1}^{L_2} \varepsilon_{2,\alpha} H_{2,i}^{\alpha} H_{2,j}^{\alpha} = 0, \quad i \neq j, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^k} = \beta_{ik} \beta_{kj}, \quad i \neq j, \quad i \neq k, \quad j \neq k, \quad \frac{\partial H_{2,j}^{\alpha}}{\partial u^i} = \beta_{ij} H_{2,i}^{\alpha}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \epsilon_2^i f^i(u^i) \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^i} + \frac{1}{2} \epsilon_2^i (f^i)' \beta_{ij} + \epsilon_2^j f^j(u^j) \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial u^j} + \frac{1}{2} \epsilon_2^j (f^j)' \beta_{ji} \\ & + \sum_{s \neq i, s \neq j} \epsilon_2^s f^s(u^s) \beta_{si} \beta_{sj} + \sum_{\beta=1}^{L_1} \varepsilon_{1,\beta} H_{1,i}^{\beta} H_{1,j}^{\beta} = 0, \quad \frac{\partial H_{1,j}^{\beta}}{\partial u^i} = \beta_{ij} H_{1,i}^{\beta}, \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (4)$$

где $f^i(u^i)$, $i = 1, \dots, N$, — произвольные заданные функции одной переменной.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Александра фон Гумбольдта (Германия), а также РФФИ (грант № 02-01-00803) и фонда INTAS (грант № 99-1782).

В соответствии с теоремой 1 существуют локальные координаты такие, что в этих координатах

$$g_2^{ij}(u) = g^i(u)\delta^{ij}, \quad g_1^{ij}(u) = f^i(u)g^i(u)\delta^{ij}, \quad (w_2^\alpha)_j^i(u) = (w_2^\alpha)^i(u)\delta_j^i, \quad (w_1^\beta)_j^i(u) = (w_1^\beta)^i(u)\delta_j^i. \quad (5)$$

Более того, в соответствии с той же самой теоремой 1 любая пара гамильтоновых операторов такого вида является согласованной. Таким образом, достаточно рассмотреть условия, что операторы этого специального вида являются гамильтоновыми операторами. Введем классические обозначения

$$g^i(u) = \frac{\epsilon_2^i}{(H_i(u))^2}, \quad ds^2 = \sum_{i=1}^N \epsilon_2^i (H_i(u))^2 (du^i)^2, \quad \beta_{ik}(u) = \frac{1}{H_i(u)} \frac{\partial H_k}{\partial u^i}, \quad i \neq k, \quad (6)$$

где $H_i(u)$ – коэффициенты Ламе, а $\beta_{ik}(u)$ – коэффициенты вращения, $\epsilon_2^i = \pm 1$. В рассматриваемом “диагональном” случае условие, что оператор P_2^{ij} является гамильтоновым, эквивалентно уравнениям Гаусса–Кодацци для подмногообразий с плоской нормальной связностью и голономной сетью линий кривизны (см. [3], [4]). Введем функции $H_{1,i}^\beta(u)$, $H_{2,i}^\alpha(u)$, $1 \leq \beta \leq L_1$, $1 \leq \alpha \leq L_2$, такие, что $(w_2^\alpha)^i(u) = H_{2,i}^\alpha(u)/H_i(u)$, $(w_1^\beta)^i(u) = H_{1,i}^\beta(u)/H_i(u)$. Пару Лакса со спектральным параметром для системы (2)–(4) можно получить из линейной задачи для системы (2), (3), описывающей все подмногообразия с плоской нормальной связностью и голономной сетью линий кривизны и эквивалентной условиям совместности для следующей линейной системы:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u^i} = - \sum_{k \neq i} \frac{\sqrt{\epsilon_2^k}}{\sqrt{\epsilon_2^i}} \beta_{ki} \varphi_k + \sum_{\alpha=1}^{L_2} \frac{\sqrt{\epsilon_{2,\alpha}}}{\sqrt{\epsilon_2^i}} H_{2,i}^\alpha \psi^\alpha, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial u^j} = \frac{\sqrt{\epsilon_2^i}}{\sqrt{\epsilon_2^j}} \beta_{ij} \varphi_j, \quad \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^i} = - \frac{\sqrt{\epsilon_{2,\alpha}}}{\sqrt{\epsilon_2^i}} H_{2,i}^\alpha \varphi_i, \quad (7)$$

где $i \neq j$. Условие, что оператор $P_1^{ij} + \lambda P_2^{ij}$ является гамильтоновым для любого λ , эквивалентно системе (2)–(4) для метрики $(\lambda + f^i(u))g^i(u)\delta^{ij}$ и аффиноров $(w_1^\beta)_j^i(u)$, $1 \leq \beta \leq L_1$, и $\sqrt{\lambda}(w_2^\alpha)_j^i(u)$, $1 \leq \alpha \leq L_2$. В этом случае линейная задача (7) превращается в пару Лакса со спектральным параметром λ для общей неособой пары произвольных согласованных нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u^i} &= - \sum_{k \neq i} \frac{\sqrt{\epsilon_2^k(\lambda + f^k)}}{\sqrt{\epsilon_2^i(\lambda + f^i)}} \beta_{ki} \varphi_k + \sum_{\alpha=1}^{L_2} \frac{\sqrt{\epsilon_{2,\alpha}\lambda}}{\sqrt{\epsilon_2^i(\lambda + f^i)}} H_{2,i}^\alpha \psi^\alpha + \sum_{\beta=1}^{L_1} \frac{\sqrt{\epsilon_{1,\beta}}}{\sqrt{\epsilon_2^i(\lambda + f^i)}} H_{1,i}^\beta \chi^\beta, \quad (8) \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial u^j} &= \frac{\sqrt{\epsilon_2^i(\lambda + f^i)}}{\sqrt{\epsilon_2^j(\lambda + f^j)}} \beta_{ij} \varphi_j, \quad \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^i} = - \frac{\sqrt{\epsilon_{2,\alpha}\lambda}}{\sqrt{\epsilon_2^i(\lambda + f^i)}} H_{2,i}^\alpha \varphi_i, \quad \frac{\partial \chi^\beta}{\partial u^i} = - \frac{\sqrt{\epsilon_{1,\beta}}}{\sqrt{\epsilon_2^i(\lambda + f^i)}} H_{1,i}^\beta \varphi_i, \quad (9) \end{aligned}$$

где $i \neq j$. Наличие пары Лакса (8), (9) со спектральным оператором доказывает интегрируемость системы (2)–(4) для общей неособой пары согласованных нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. В. Ферапонтов // Функци. анализ и его прил. 1991. Т. 25. № 3. С. 37–49. [2] О. И. Мохов. Функци. анализ и его прил. 2001. Т. 35. № 2. С. 24–36; math.DG/0005051 (2000). [3] Е. V. Ferapontov // math.DG/9805012 (1998). [4] L. P. Eisenhart. Transformations of Surfaces. New York: Chelsea, 1962.

Центр нелинейных исследований
при Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
E-mail: mokhov@mi.ras.ru, mokhov@landau.ac.ru

Принято редколлегией
23.09.2002