Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Муранов, Д. Реповш, Геометрические свойства спектральной последовательности теории перестроек, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 6, 191–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm587>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 12:03:09

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СПЕКТРАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТЕОРИИ ПЕРЕСТРОЕК

Ю. В. Муранов, Д. Реповш

Пусть X – замкнутое топологическое многообразие размерности $n \geq 5$ с фундаментальной группой $G = \pi_1(X)$, имеющей подгруппу $\pi \subset G$ индекса 2. Рассмотрим отображение $\chi: X \rightarrow \mathbb{R}P^m$ многообразия X в m -мерное действительное проективное пространство высокой размерности. Пусть χ индуцирует эпиморфизм фундаментальных групп $\chi_*: G \rightarrow \mathbb{Z}/2$ с ядром π . Обозначим через Y одностороннее подмногообразие X , которое является трансверсальным прообразом $\chi^{-1}(\mathbb{R}P^{m-1})$ одностороннего подмногообразия $\mathbb{R}P^{m-1} \subset \mathbb{R}P^m$. Пара (X, Y) является парой Браудера–Ливси, если вложение $Y \rightarrow X$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп (см. [1], [2]).

Для пары Браудера–Ливси имеет место коммутативная диаграмма точных последовательностей (см. [3], [4]):

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow & L_{n+1}(\pi) & \longrightarrow & L_{n+1}(G^+) & \longrightarrow & LN_{n-1}(\pi \rightarrow G) & \rightarrow \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
 & & LP_n(F) & & & L_{n+1}(\pi \rightarrow G) & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 \rightarrow & LN_n(\pi \rightarrow G) & \longrightarrow & L_n(G^-) & \longrightarrow & L_n(\pi) & \rightarrow
 \end{array} \quad (1)$$

В диаграмму (1) входят группы препятствий к перестройкам $L_*(\pi)$ и $L_*(G)$, группы $LN_*(\pi \rightarrow G)$ препятствий к расщеплению вдоль одностороннего подмногообразия $Y \subset X$ и группы $LP_*(F)$ препятствий к перестройкам по паре многообразий (X, Y) (см. [5], [6]).

В работе [7] построена спектральная последовательность в теории перестроек. Для построения используется реализация коммутативной диаграммы (1) на уровне спектров. Основная фильтрация спектров из работы [7]

$$\cdots \rightarrow X_{3,0} \rightarrow X_{2,0} \rightarrow X_{1,0} \rightarrow X_{0,0} \rightarrow X_{-1,0} \rightarrow \cdots \quad (2)$$

содержит $\mathbb{L}$ -спектр $X_{0,0} = \mathbb{L}(G^+)$ и спектр $X_{1,0} = \Sigma \mathbb{L}P(F)$ (см. [8], [9]).

Множество $\mathcal{S}_n(X, Y, \xi)$ s -триангуляций пары многообразий (X, Y) входит в точную последовательность

$$\cdots \rightarrow \mathcal{S}_n(X, Y, \xi) \rightarrow [X, G/TOP] \xrightarrow{v_\xi} LP_{n-1}(F) \rightarrow \cdots, \quad (3)$$

которая может быть построена на уровне спектров [5].

Пусть $\mathbf{L}_\bullet$ обозначает односвязное накрытие Ω -спектра $\mathbf{L}_\bullet(\mathbb{Z})$ [5], [6]. При этом для замкнутого топологического многообразия X имеет место изоморфизм $[X, G/TOP] \cong H_n(X, \mathbf{L}_\bullet)$. Существует также Ω -спектр $\mathbb{S}(X)$, n -мерные гомотопические группы которого задают множество топологических триангуляций $\mathcal{S}_n(X)$ многообразия X .

Пусть $(Z \subset Y \subset X)$ – тройка многообразий, так что каждая из пар многообразий $(Z \subset Y)$, $(Y \subset X)$ является парой Браудера–Ливси. Будем предполагать, что размерность подмногообразия Z не менее 5.

Будем говорить, что нормальное отображение f перестраивается до простой гомотопической эквивалентности троек многообразий, если класс нормального кобордизма отображения f содержит отображение g со следующими свойствами:

- 1) отображение $g|_X$ является простой гомотопической эквивалентностью;
- 2) отображение g трансверсально подмногообразиям Y и Z ;
- 3) ограничения g на трансверсальные прообразы Y , $X \setminus Y$, Z , $Y \setminus Z$ являются простыми гомотопическими эквивалентностями.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00009).

Работа второго автора выполнена при поддержке Министерства науки и техники Республики Словения (грант № J1-0885-0101-98).

Обозначим через α композицию отображений (см. [5])

$$\mathcal{S}_n(X, Y, \xi) \rightarrow \mathcal{S}_{n-1}(Y) \rightarrow LN_{n-2}(\pi \rightarrow G^-).$$

Теперь композиция отображения α с отображением $LP_n(F) \rightarrow \mathcal{S}_n(X, Y, \xi)$ из точной последовательности (3) дает отображение $\beta: LP_n(F) \rightarrow LN_{n-2}(\pi \rightarrow G^-)$.

ЛЕММА 1. *Существует отображение спектров $b: \Omega^2 \mathbb{L}P(F) \rightarrow \mathbb{L}N(\pi \rightarrow G^-)$, для которого индуцированное отображение гомотопических групп b_* совпадает с отображением β .*

Обозначим через $\mathbb{L}T(X, Y, Z)$ Ω -спектр, являющийся гомотопическим кослоем отображения b , а через $LT_n(X, Y, Z)$ гомотопические группы $\pi_n(\mathbb{L}T(X, Y, Z))$.

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место отображение спектров $\psi: \Omega^2(X_+ \wedge \mathbf{L}\bullet) \rightarrow \mathbb{L}T(X, Y, Z)$, индуцирующее гомоморфизм $\psi_*: H_n(X, \mathbf{L}\bullet) \rightarrow LT_{n-2}(X, Y, Z)$. Нормальное отображение $[f: M \rightarrow X] \in [X, G/TOP] \cong H_n(X, \mathbf{L}\bullet)$ тогда и только тогда перестраивается до простой гомотопической эквивалентности троек многообразий, когда $\psi_*(f) = 0$.*

ТЕОРЕМА 2. *Имеет место гомотопическая эквивалентность спектров*

$$\Sigma^2 \mathbb{L}T(X, Y, Z) \cong X_{2,0},$$

где спектр $X_{2,0}$ входит в фильтрацию (2) спектральной последовательности теории перестроек.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть F^- обозначает квадрат фундаментальных групп в задаче расщепления для пары Браудера–Ливси $Z \subset Y$. Имеет место коммутативная диаграмма точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & L_{n+1}(\pi) & \rightarrow & LP_n(F) & \rightarrow & LN_{n-2}(\pi \rightarrow G^-) & \rightarrow \\ & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\ & & LT_{n-1}(F) & & & & \\ & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\ \rightarrow & LN_{n-1}(\pi \rightarrow G^-) & \rightarrow & LP_{n-1}(F^-) & \rightarrow & L_n(\pi) & \rightarrow \end{array}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. Browder, G. R. Livesay // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. P. 242–245.
- [2] S. E. Cappell, J. L. Shaneson // Lecture Notes in Math. 1979. V. 763. P. 395–447.
- [3] А. Ф. Харшиладзе // Труды ММО. 1980. Т. 41. С. 3–36. [4] A. A. Ranicki // Canad. J. Math. 1987. V. 39. P. 345–364. [5] A. A. Ranicki. Exact Sequences in the Algebraic Theory of Surgery. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1981. (Math. Notes. V. 26.) [6] C. T. C. Wall. Surgery on Compact Manifolds. London: Academic Press, 1970; 2nd ed. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999. [7] И. Хэмблтон, А. Ф. Харшиладзе // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 9. С. 3–14. [8] Ю. В. Муранов, Д. Реповш // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 3. С. 127–142. [9] A. Cavicchioli, Yu. V. Muranov, D. Repovš // Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8). 2001. V. 4. P. 647–675.

Институт современных знаний,
Витебск, Беларусь;

Институт математики, физики и механики Люблянского университета,
Любляна, Словения

E-mail: ymuranov@mail.ru; dusan.repovs@fmf.uni-lj.si

Принято редколлегией
23.09.2002