Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. М. Мухамедов, О эргодическом принципе для марковских процессов, связанных с квантовыми квадратичными стохастическими процессами, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 6, 193–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm588>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:32:12

**О ЭРГОДИЧЕСКОМ ПРИНЦИПЕ ДЛЯ МАРКОВСКИХ
ПРОЦЕССОВ, СВЯЗАННЫХ С КВАНТОВЫМИ
КВАДРАТИЧНЫМИ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ**

Ф. М. МУХАМЕДОВ

В [1] был определен нестационарный марковский процесс, порождаемый квантовым квадратичным стохастическим процессом (к.к.с.п.), и было отмечено, что если к.к.с.п. удовлетворяет эргодическому принципу, тогда такой марковский процесс также удовлетворяет этому принципу. В настоящей работе с помощью разложения к.к.с.п. (см. [2]) доказывается, что обратное тоже верно, т.е. если марковский процесс удовлетворяет эргодическому принципу, то соответствующий к.к.с.п. удовлетворяет этому принципу.

Пусть $\mathcal{M}$ – алгебра фон Неймана и $\mathcal{M}_*$ – совокупность всех ультраслабо непрерывных линейных функционалов на $\mathcal{M}$. Через S и S^2 обозначим совокупности всех нормальных состояний на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}$ соответственно. Пусть $\varphi \in S$ – состояние, определим оператор $E_\varphi: \mathcal{M} \otimes \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ условного ожидания на элементах вида $a \otimes b$, $a, b \in \mathcal{M}$, следующим образом: $E_\varphi(a \otimes b) = \varphi(a)b$, и далее продолжим по линейности и непрерывности до $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}$. Ясно, что E_φ является положительным (т.е. $E_\varphi x \geq 0$ при $x \geq 0$) и $E_\varphi \mathbf{1}_{\mathcal{M}} = \mathbf{1}_{\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}}$, где $\mathbf{1}_{\mathcal{M}}$ и $\mathbf{1}_{\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}}$ – единицы алгебр $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}$ соответственно.

Пусть $\{P^{s,t}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \otimes \mathcal{M}, s, t \in \mathbb{R}_+, t - s > 1\}$ – семейство линейных операторов и $U: \mathcal{M} \otimes \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \otimes \mathcal{M}$ – линейный оператор такой, что $U(x \otimes y) = y \otimes x$ для всех $x, y \in \mathcal{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что пара $(P^{s,t}, \omega_0)$, где $\omega_0 \in S$ – начальное состояние, образует *квантовый квадратичный стохастический процесс* (к.к.с.п.), если каждый оператор $P^{s,t}$ ультраслабо непрерывен и при этом выполняются следующие соотношения:

- (i) $P^{s,t} \mathbf{1}_{\mathcal{M}} = \mathbf{1}_{\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}}$;
- (ii) $P^{s,t}(\mathcal{M}_+) \subset (\mathcal{M} \otimes \mathcal{M})_+$;
- (iii) $UP^{s,t}x = P^{s,t}x$ для любого $x \in \mathcal{M}$;
- (iv) аналог уравнения Колмогорова–Чепмена: для произвольных $s, \tau, t \in \mathbb{R}_+$ таких, что $\tau - s \geq 1, t - \tau \geq 1$,

либо

$$(iv)_A \quad P^{s,t}x = P^{s,\tau}(E_{\omega_\tau}(P^{\tau,t}x)), x \in \mathcal{M},$$

либо

$$(iv)_B \quad P^{s,t}x = E_{\omega_s}P^{s,\tau} \otimes E_{\omega_s}P^{s,\tau}(P^{\tau,t}x), x \in \mathcal{M},$$

где $\omega_\tau(x) = \omega_0 \otimes \omega_0(P^{0,\tau}x)$, $x \in \mathcal{M}$.

Если к.к.с.п. удовлетворяет равенству $(iv)_A$ или $(iv)_B$, то будем говорить, что к.к.с.п. имеет тип (А) или тип (В) соответственно.

Пусть $\mathcal{T} = \{T^{s,t}(\varphi): \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \mid s, t \in \mathbb{R}_+, t - s \geq 1, \varphi \in \mathcal{M}_*\}$ – семейство ультраслабо непрерывных линейных отображений на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пара $(\mathcal{T}, \omega_0)$, где $\omega_0 \in S$ – начальное состояние, называется *слобно-марковским процессом* (с.м.п.), если при фиксированных значениях s и t $T^{s,t}(\cdot)$ является линейной функцией на $\mathcal{M}_*$ и выполнены следующие условия:

- (i) $T^{s,t}(\varphi)\mathbf{1}_{\mathcal{M}} = \mathbf{1}_{\mathcal{M}}$ при $\varphi \in S$;
- (ii) $T^{s,t}(\varphi)(\mathcal{M}_+) \subset \mathcal{M}_+$ при $\varphi \in \mathcal{M}_*, +$;
- (iii) для начального состояния $\omega_0 \in S$ и произвольных $s, \tau, t \in \mathbb{R}_+$ таких, что $\tau - s \geq 1, t - \tau \geq 1$,

либо

$$(iii)_A \quad T^{s,t}(\varphi) = T^{s,\tau}(\varphi)T^{\tau,t}(\omega_\tau), \varphi \in S,$$

либо

$$(iii)_B \quad T^{s,t}(\varphi) = T^{s,\tau}(\omega_s)T^{\tau,t}(T_*^{s,\tau}(\omega_s)\varphi), \varphi \in S,$$

где $\omega_\tau(x) = \omega_0(T^{0,\tau}(\omega_0)x)$, $x \in \mathcal{M}$, и $(T_*^{s,t}(\omega_s)\varphi)(x) = \varphi(T^{s,t}(\omega_s)x)$, $x \in \mathcal{M}$.

Будем говорить, что с.м.п. $(\mathcal{T}, \omega_0)$ имеет тип (А) или тип (В) соответственно, в зависимости от того, какое из фундаментальных уравнений $(iii)_A$ или $(iii)_B$ имеет место. С.м.п. $(\mathcal{T}, \omega_0)$ называется *симметричным*, если для любых $\varphi, \psi \in S$ имеет место $T_*^{s,t}(\varphi)\psi = T_*^{s,t}(\psi)\varphi$.

ТЕОРЕМА 1. *Каждому к.к.с.п. $(P^{s,t}, \omega_0)$ типа (А) (соответственно типа (В)) однозначно соответствует симметричный с.м.п. $(\mathcal{T}_P, \omega_0)$ типа (А) (соответственно типа (В)), определенный следующим образом:*

$$T_*^{s,t}(\varphi)x = E_\varphi(P^{s,t}x), \quad \varphi \in \mathcal{M}_*, \quad x \in \mathcal{M}. \quad (1)$$

Обратно, каждому симметричному с.м.п. $(\mathcal{T}_P, \omega_0)$ однозначно соответствует к.к.с.п. $(P^{s,t}, \omega_0)$ соответствующего типа, для которого имеет место (1).

Через $P_*^{s,t}$ обозначим оператор, действующий из S^2 в S , определенный следующим образом: $P_*^{s,t}(\varphi)(x) = \varphi(P^{s,t}x)$, где $\varphi \in S^2$, $x \in \mathcal{M}$. Будем говорить, что к.к.с.п. $(P^{s,t}, \omega_0)$ удовлетворяет *эргодическому принципу*, если для любых $\varphi, \psi \in S^2$ и $s \in \mathbb{R}_+$ имеет место

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|P_*^{s,t}\varphi - P_*^{s,t}\psi\|_1 = 0,$$

где $\|\cdot\|_1$ — норма на $\mathcal{M}^*$.

Отметим, что понятие эргодического принципа было введено впервые для марковского процесса в работах Колмогорова (см., например, [3]), а для квадратичных процессов в [1], [4].

Будем говорить, что с.м.п. $(\mathcal{T}, \omega_0)$ удовлетворяет условию (Е), если существует число $\lambda \in [0, 1)$ такое, что для любых $\varphi, \psi, \sigma \in S$ и $s \in \mathbb{R}_+$ неравенство $\|T_*^{s,t}(\sigma)\varphi - T_*^{s,t}(\sigma)\psi\|_1 \leq \lambda \|\varphi - \psi\|_1$ выполнено хотя бы для одного $t = t(\varphi, \psi, \sigma, s) \in \mathbb{R}_+$.

Определим новый процесс $Q^{s,t}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ следующим образом: $Q^{s,t}x = T^{s,t}(\omega_s)x$, $x \in \mathcal{M}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть $P^{s,t}$ — к.к.с.п. на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ и $(\mathcal{T}, \omega_0)$ — соответствующий ему с.м.п. Тогда $Q^{s,t}$ является марковским процессом, т.е. для любых чисел $s, \tau, t \in \mathbb{R}_+$ таких, что $\tau - s \geq 1$, $t - \tau \geq 1$, имеет место равенство $Q^{s,t} = Q^{s,\tau}Q^{\tau,t}$.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $P^{s,t}$ — к.к.с.п. на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ и $(\mathcal{T}, \omega_0)$ — его с.м.п.-разложение. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- (i) $P^{s,t}$ удовлетворяет эргодическому принципу;
- (ii) с.м.п. $(\mathcal{T}, \omega_0)$ удовлетворяет условию (Е);
- (iii) марковский процесс $Q^{s,t}$ удовлетворяет эргодическому принципу.

Разложение к.к.с.п. позволяет нам определить понятия сопряженности двух к.к.с.п., определенных на алгебре фон Неймана, следующим образом.

Пусть $(P^{s,t}, \omega_0)$ и $(H^{s,t}, \omega_0)$ — два к.к.с.п. на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, и пусть $(\mathcal{T}_P, \omega_0)$ и $(\mathcal{T}_H, \omega_0)$ — их разложения на с.м.п. соответственно. Будем говорить, что к.к.с.п. $(P^{s,t}, \omega_0)$ и $(H^{s,t}, \omega_0)$ *сопряжены*, и обозначать $P^{s,t} \sim H^{s,t}$, если существует семейство автоморфизмов $\{\theta^{s,t}(\varphi) : s, t \in \mathbb{R}_+, t - s \geq 1, \varphi \in \mathcal{M}_*\}$ алгебры $\mathcal{M}$ в себя такое, что для любых чисел $s, t \in \mathbb{R}_+$, $t - s \geq 1$, и функционала $\varphi \in \mathcal{M}_*$ имеет место равенство $T_P^{s,t}(\varphi)\theta^{s,t}(\varphi) = T_H^{s,t}(\varphi)$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $(P^{s,t}, \omega_0)$ и $(H^{s,t}, \omega_0)$ — сопряженные к.к.с.п. на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Тогда $(P^{s,t}, \omega_0)$ удовлетворяет эргодическому принципу тогда и только тогда, когда $(H^{s,t}, \omega_0)$ удовлетворяет эргодическому принципу.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Н. Ганиходжаев, Ф. М. Мухамедов // Изв. РАН, сер. матем. 2000. Т. 65. № 5. С. 3–20. [2] Ф. М. Мухамедов // Докл. РАН. 2000. Т. 371. № 2. С. 167–169. [3] А. Н. Колмогоров // УМН. 1938. № 5. С. 5–51. [4] Т. А. Сарымсаков, Н. Н. Ганиходжаев // Докл. АН СССР. 1991. Т. 316. № 6. С. 1315–1319.

Принято редколлегией
23.09.2002