Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Перес, Г. А. Чечкин, Е. И. Яблокова, О собственных колебаниях тела с “легкими” концентрированными массами на поверхности, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 6, 195–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm589>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 11:56:34

О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТЕЛА С “ЛЕГКИМИ” КОНЦЕНТРИРОВАННЫМИ МАССАМИ НА ПОВЕРХНОСТИ

М. Е. ПЕРЕС, Г. А. ЧЕЧКИН, Е. И. ЯБЛОКОВА (Доронина)

Постановка задачи. Мы рассматриваем спектральную задачу для оператора Лапласа с быстро меняющимся типом граничных условий в области с большим количеством концентрированных масс около границы. Не предполагая периодичности микроструктуры области, авторы рассматривают случай, когда плотность концентрированных масс невелика.

В статьях [1] и [2] рассматриваются похожие задачи в областях с концентрированными массами, расположенными периодически вдоль границы; в [3] изучается задача с произвольной структурой распределения граничных условий в областях с постоянной плотностью.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей, $n \geq 3$. Полагаем, что $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_\varepsilon \cup \bar{\gamma}_\varepsilon$, при этом $\Gamma_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{N_\varepsilon} \Gamma_\varepsilon^k$, где $\text{diam}(\Gamma_\varepsilon^k) \leq 2\varepsilon$, а расстояние между двумя множествами Γ_ε^k больше или равно 2ε ; ε — малый положительный параметр.

Рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta u_\varepsilon + \beta \rho_\varepsilon(x) u_\varepsilon = \rho_\varepsilon(x) f(x) \quad \text{в } \Omega, \quad u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} + a(x) u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \gamma_\varepsilon, \quad (1)$$

где $f \in L_{2,\rho_\varepsilon}(\Omega)$ (пространство с нормой $\|f\|_{L_{2,\rho_\varepsilon}(\Omega)}^2 \equiv \int_\Omega f^2(x) \rho_\varepsilon(x) dx$), ограниченная измеримая функция $a(x) \geq 0$, константа $\beta \geq 0$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ — внешняя нормаль к границе.

Мы рассматриваем плотность вида $\rho_\varepsilon(x) = 1$ в $\Omega \setminus \bar{B}_\varepsilon$, $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-m}$ в $\Omega \cap B_\varepsilon$, где $B_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{N_\varepsilon} B_\varepsilon^k$ и $B_\varepsilon^k = \{(x_1 - \xi_1^k)^2 + \dots + (x_n - \xi_n^k)^2 < \varepsilon^2\}$, здесь $(\xi_1^k, \dots, \xi_n^k) = p_\varepsilon^k \in \Gamma_\varepsilon^k$, $k = 1, \dots, N_\varepsilon$, и $\bar{B}_\varepsilon^k \cap \partial\Omega \subset \Gamma_\varepsilon^k$.

Множества B_ε^k назовем *концентрированными массами*. Мы предполагаем, что плотность концентрированных масс не слишком велика, т.е. $0 \leq m < 2$.

Как хорошо известно, для каждого фиксированного ε задача (1) имеет единственное слабое решение u_ε в $H^1(\Omega, \Gamma_\varepsilon)$, где $H^1(\Omega, \Gamma_\varepsilon)$ мы определим как замыкание по норме $H^1(\Omega)$ множества функций $C^\infty(\bar{\Omega})$, равных нулю в окрестности Γ_ε .

Пусть $u(x)$ — слабое решение в $H^1(\Omega)$ следующей задачи:

$$-\Delta u + \beta u = f(x) \quad \text{в } \Omega, \quad \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} + a(x) u(x) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (2)$$

Если $\beta = 0$ и $a(x) \equiv 0$, то для разрешимости предельной задачи с самого начала предполагается, что $\int_\Omega f(x) dx = 0$. В этом случае выберем решение $u \in H^1(\Omega)$ задачи (2), удовлетворяющее условию $\langle u \rangle \equiv \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_\varepsilon(x) dx = 0$.

Оценки. В зависимости от $a(x)$, β и числа концентрированных масс N_ε , мы получаем равномерную ограниченность по ε решения u_ε задачи (1), решения предельной задачи, а также разности решений $u_\varepsilon - u$ (или, в случае $\beta = 0$ и $a(x) \equiv 0$, разности $u_\varepsilon - \langle u_\varepsilon \rangle - u$). Для этой цели нам необходимо ввести некоторую специальную срезающую функцию ψ_ε . Пусть $\psi(s) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $0 \leq \psi \leq 1 \quad \forall s \in \mathbb{R}^1$, $\psi(s) = 0$ при $|s| \leq 1$ и $\psi(s) = 1$ при $|s| > 1 + \sigma$, где $0 < \sigma < 1/2$.

Определим $\psi_\varepsilon = \prod_{k=1}^{N_\varepsilon} \psi_\varepsilon^k$ с $\psi_\varepsilon^k := \psi(|\ln \varepsilon| / |\ln r_k|)$, где $(r_k, \theta_k^1, \theta_k^2, \dots, \theta_k^{n-1})$ — локальная система полярных координат с центром в точке $p_\varepsilon^k \in \Gamma_\varepsilon^k$, $k = 1, \dots, N_\varepsilon$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть β и $a(x)$ одновременно не равны нулю. Пусть $N_\varepsilon = O(|\ln \varepsilon|^\alpha)$ с $0 < \alpha < 1 - 1/n$. Для решения u_ε задачи (1) и решения u задачи (2) имеем

- $\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 \|f\|_{L_{2,\rho_\varepsilon}(\Omega)}$;
- $\|(u_\varepsilon - u)\psi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 \|f\|_{L_{2,\rho_\varepsilon}(\Omega)} |\ln \varepsilon|^{\alpha + \frac{1}{n} - 1}$;
- $\|(u_\varepsilon - u)(1 - \psi_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \varepsilon^{\frac{1}{1+\sigma}} |\ln \varepsilon|^{\frac{\alpha}{2}} \|f\|_{L_{2,\rho_\varepsilon}(\Omega)}$;

- если $m = 0$ и $f \in L_2(\Omega)$, то $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ слабо сходится в $H^1(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$;
  - если $0 < m < 2$ и $f \in H^1(\Omega)$, то $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ слабо сходится в $H^1(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$;
- C_1, C_2 и C_3 – константы, не зависящие от ε .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $a(x) \equiv 0$, $\beta = 0$ и $N_\varepsilon = O(|\ln \varepsilon|^\alpha)$ с $0 < \alpha < \min(1 - 1/n, 2 - m)$. Для решения u_ε задачи (1) и решения u задачи (2) имеем

- $\|u_\varepsilon - \langle u_\varepsilon \rangle\|_{H^1(\Omega)} \leq C_4 \|f\|_{L_{2,\rho_\varepsilon}(\Omega)}$;
- $\|(u_\varepsilon - \langle u_\varepsilon \rangle) - u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_5 \|f\|_{L_{2,\rho_\varepsilon}(\Omega)} |\ln \varepsilon|^{\alpha + \frac{1}{n} - 1}$;
- $\|(u_\varepsilon - \langle u_\varepsilon \rangle) - u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_6 \varepsilon^{\frac{1}{1+\sigma}} |\ln \varepsilon|^{\frac{\alpha}{2}} \|f\|_{L_{2,\rho_\varepsilon}(\Omega)}$;
- если $m = 0$ и $f \in L_2(\Omega)$, то $u_\varepsilon - \langle u_\varepsilon \rangle \rightharpoonup u$ слабо сходится в $H^1(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$;
- если $0 < m < 2$ и $f \in H^1(\Omega)$, то $u_\varepsilon - \langle u_\varepsilon \rangle \rightharpoonup u$ слабо сходится в $H^1(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$;

C_4, C_5 и C_6 – константы, не зависящие от ε .

Асимптотика собственных значений. Рассмотрим спектральные задачи, соответствующие краевым задачам (1) и (2):

$$\Delta(u_\varepsilon^k) + \lambda_\varepsilon^k \rho_\varepsilon(x) u_\varepsilon^k = 0 \text{ в } \Omega, \quad u_\varepsilon^k = 0 \text{ на } \Gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\varepsilon^k}{\partial \nu} + a(x) u_\varepsilon^k = 0 \text{ на } \gamma_\varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

и, соответственно,

$$\Delta(u^k) + \lambda_0^k u^k = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial u^k}{\partial \nu} + a(x) u^k = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Здесь $u_\varepsilon^k \in H^1(\Omega, \Gamma_\varepsilon)$, $u^k \in H^1(\Omega)$, $k = 1, 2, \dots$, образуют ортогональный базис в $L_{2,\rho_\varepsilon}(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ соответственно, а $\{\lambda_\varepsilon^k\}$, $\{\lambda_0^k\}$, $k = 1, 2, \dots$, – множества соответствующих собственных значений, занумерованных в порядке неубывания $0 < \lambda_\varepsilon^1 \leq \lambda_\varepsilon^2 \leq \dots \leq \lambda_\varepsilon^k \leq \dots, 0 \leq \lambda_0^1 \leq \lambda_0^2 \leq \dots \leq \lambda_0^k \leq \dots$ и повторяющихся в соответствии с их кратностью ($\lambda_0^1 > 0$, если $a(x) \not\equiv 0$).

Используя спектральную теорему о предельном поведении спектра положительного самосопряженного компактного оператора, определенного на гильбертовом пространстве, зависящем от малого параметра (см. теоремы 1.9 и 1.12 главы III в [4]), мы получаем оценки для разности собственных элементов задач (3) и (4).

ТЕОРЕМА 3. Для собственных значений λ_ε^k , λ_0^k задач (3) и (4), соответственно, имеет место оценка $|\lambda_\varepsilon^k - \lambda_0^k| \leq A_k |\ln \varepsilon|^{\alpha + \frac{1}{n} - 1}$ при достаточно малом ε , где $N_\varepsilon = O(|\ln \varepsilon|^\alpha)$, $0 < \alpha < 1 - 1/n$, $\varepsilon \rightarrow 0$, и для каждого $k = 1, 2, \dots$ константы A_k не зависят от ε .

ТЕОРЕМА 4. Рассмотрим условия теоремы 3. Предположим, что k, l целые, $k \geq 1$, $l \geq 1$, и $\lambda_0^k < \lambda_0^{k+1} = \dots = \lambda_0^{k+l} < \lambda_0^{k+l+1}$. Тогда для любой собственной функции w задачи (4), соответствующей собственному значению λ_0^{k+1} , существует линейная комбинация $\bar{u}_\varepsilon$ собственных функций $u_\varepsilon^{k+1}, \dots, u_\varepsilon^{k+l}$ задачи (3) такая, что $\|\bar{u}_\varepsilon - R_\varepsilon w\|_{H_\varepsilon} \leq B_k |\ln \varepsilon|^{\alpha + \frac{1}{n} - 1}$, где константы B_k не зависят от ε .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. А. Чечкин // УМН. 1995. Т. 50. № 4. С. 105–106. [2] М. Lobo, М. Е. Pérez // Math. Models Methods Appl. Sci. 1993. V. 3. № 2. P. 249–273. [3] О. А. Олейник, Г. А. Чечкин // Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 1996. V. 7. № 1. P. 5–15. [4] О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, А. С. Шамаев. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1990.

Университет Кантабрия, Испания;

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: meperez@besaya.unican.es; chechkin@mech.math.msu.su; edoron@it.ru

Принято редколлегией

23.09.2002