Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Совместные заседания семинара им. И. Г. Петровского и Московского математического общества (девятнадцатая сессия, 20–24 января 1998 года), *УМН*, 1998, том 53, выпуск 4, 129–210

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm59>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 14:39:54

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ**СОВМЕСТНЫЕ ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА ИМ. И. Г. ПЕТРОВСКОГО
И МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА
(девятнадцатая сессия, 20–24 января 1998 года)**

Девятнадцатая совместная сессия семинара имени И. Г. Петровского и Московского математического общества открылась 20 января 1998 г. в Главном здании МГУ на Воробьевых горах.

В работе сессии приняло участие более 250 человек, было заслушано и обсуждено свыше 180 докладов. Около половины из них было сделано иногородними учеными. Среди авторов докладов — более 20 представителей зарубежных стран. Научная программа сессии охватывала широкий круг проблем теории уравнений с частными производными, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и динамических систем, алгебраической геометрии, топологии, действительного и комплексного анализа, функционального анализа, теоретической и математической физики, механики сплошных сред.

Утреннее заседание 20 января 1998 г.

1. По поручению председателя Оргкомитета сессии академика РАН О. А. Олейник заседание открыл заместитель председателя Оргкомитета профессор А. А. Шкаликов. Он выразил благодарность ректору Московского университета и деканату механико-математического факультета МГУ за большую помощь в подготовке сессии, а также Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку, позволившую возместить иногородним участникам значительную часть их расходов. Затем присутствующие были ознакомлены с порядком дальнейшей работы сессии. В частности, было отмечено наличие в программе трех специальных заседаний. Одно из них посвящено юбилею академика В. И. Арнольда, одного из инициаторов регулярно проводившихся с 1978 года совместных сессий семинара имени И. Г. Петровского и ММО. Два других заседания посвящены памяти скончавшихся в 1997 году профессоров С. Н. Кружкова и Е. М. Ландиса, активно участвовавших во всех предыдущих сессиях.

2. С приветствием к участникам открывшейся сессии обратился ректор МГУ академик РАН В. А. Садовничий. Он сказал, что традиционные совместные сессии семинара имени И. Г. Петровского и ММО способствуют научным контактам между математиками, распространению информации о новых результатах. Он высоко оценил работу по организации и проведению этих сессий, которую из года в год выполняет кафедра дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ, возглавляемая Ольгой Арсеньевной Олейник.

Далее В. А. Садовничий отметил, что девятнадцатая сессия проводится в трудное для отечественной математики время, когда в России планируется сокращение государственной поддержки, оказываемой исследованиям в области фундаментальных наук. Опасные последствия такой политики анализируются, например, в статье В. И. Арнольда “Математическая безграмотность губительнее костров инквизиции”, опубликованной в газете “Известия” от 16 января 1998 г. В большинстве других стран признано, что математика требует особо внимательного отношения к себе. Правильным было бы незамедлительное принятие решения о государственной поддержке уникальной математической школы, сформировавшейся в Московском университете.

В. А. Садовничий призвал всех участников сессии сохранять научную связь с этой школой и пожелал им успешной работы.

3. Болибрух А. А. “Линейные дифференциальные уравнения в комплексной области и векторные расслоения”

4. Шемякин Е. И. “Некоторые новые модели в механике разрушения твердых тел”

Вечернее заседание 20 января 1998 г., секция 1.

Заседание было посвящено юбилею В. И. Арнольда.

1. Анисов С. С. “Интегральные формулы, связанные с волновыми фронтами”

В докладе обобщаются на многомерный случай результаты работы [1].

Пусть $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — единичная n -мерная сфера, H^n — n -мерное пространство Лобачевского с метрикой постоянной кривизны -1 . Далее, $F(t)$ — волновой фронт, движущийся в H^n или S^n с единичной скоростью в направлении коориентации. Пусть $c(t)$ — ориентированный $(n-1)$ -мерный объем $F(t)$, а $s(t)$ (при четном n) — объем n -цепи, ограниченной $F(t)$. В случае H^n рассматриваются только фронты, все радиусы главных кривизн которых во всех точках конечны.

ТЕОРЕМА. *Объем $c(t)$ фронта, движущегося по S^n (соответственно, H^n , $\mathbb{R}^n$), является многочленом степени $n-1$ от $\sin t$ и $\cos t$ (соответственно, от $\operatorname{sh} t$ и $\operatorname{ch} t$ для H^n и от t для $\mathbb{R}^n$).*

СЛЕДСТВИЕ. *При четном n $s(t)$ является многочленом степени $n-1$ от $\sin t$ и $\cos t$ для фронтов на S^n (соответственно, от $\operatorname{sh} t$ и $\operatorname{ch} t$ для фронтов на H^n). В случае $\mathbb{R}^n$ при любом n $s(t)$ является многочленом степени n от t .*

Похожие задачи для обычных (не ориентированных) объемов рассматривались Г. Вейлем и А. Греем.

[1] Анисов С. С. // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 3. С. 445–446.

2. Богаевский И. А. “Выпуклые оболочки гладких гиперповерхностей”

Выпуклая оболочка компактного подмножества аффинного пространства — это пересечение всех содержащих его замкнутых полупространств. Граница выпуклой оболочки компактной гладкой гиперповерхности без края может иметь особенности. Например, особенности границы выпуклой оболочки общей замкнутой кривой на плоскости исчерпываются разрывами второй производной.

Мы изучаем с точностью до диффеоморфизмов особенности выпуклых оболочек общих компактных C^∞ -гиперповерхностей без края, вложенных в четырехмерное аффинное пространство. *Особенностью* выпуклой оболочки мы называем ее росток в точке негладкости границы. Как обычно, *общие* гиперповерхности — это вложения, образующие открытое всюду плотное множество в снабженном C^∞ -топологией пространстве всех рассматриваемых вложений.

Оказывается, что в отдельных точках границы выпуклой оболочки могут возникать лишь две новые (по сравнению со случаем предыдущей размерности) особенности, не устранимые малым шевелением исходной гиперповерхности. Одна из этих особенностей не содержит функциональных модулей, но имеет по крайней мере девять числовых. Другая вообще не содержит модулей и диффеоморфна подграфику квадрата расстояния до трехмерного тела $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \forall \tau \in \mathbb{R} \tau^4 + x\tau^2 + y\tau + z \geq 0\}$.

Настоящие результаты со всеми подробностями и доказательствами будут опубликованы в Трудах МИРАН, т. 221.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01104).

3. Богданов Р. И. “Версальные семейства фазовых портретов векторных полей на плоскости”

Группа Diff гладких обратимых замен координат в фазовом пространстве естественно действует на пространстве векторных полей. Это действие определяет *сопряженные векторные поля*. Фазовый портрет векторного поля не меняется при умножении векторного поля на положительную функцию на фазовом пространстве. Все такие функции образуют мультипликативную группу $\mathcal{E}_2^+$. Естественное расширение Diff^+ группы Diff с помощью группы $\mathcal{E}_2^+$ действует на пространстве векторных полей и определяет *орбитально эквивалентные векторные поля* (см. [2]). Для построения *локальных полиномиальных версальных семейств фазовых портретов векторных полей* на плоскости необходимо рассмотреть *понятие орбитальной связности*, отправляясь от действия группы Diff^+ (см. [3]–[5], а также [1, с. 319–322, 583–604]).

Через $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ (соответственно, $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{w}'$; $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$) обозначим два орбитально эквивалентных векторных поля (инфинитезимальные деформации $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$; внешнее произведение $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$), т.е. $\text{Ad}_g \mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}$.

ТЕОРЕМА. Деформации $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{w}'$ согласованы относительно орбитальной связности тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{w}' \wedge \mathbf{w} = L_{\mathbf{w}}(\xi \wedge \mathbf{w}) + \text{Ad}_g(\mathbf{v}' \wedge \mathbf{v})/\lambda^2,$$

где ξ – подходящее векторное поле.

[1] Арнольд В. И. Избранное. М.: Фазис, 1997.

[2] Богданов Р. И. Локальная орбитальная эквивалентность векторных полей на плоскости. М.: Изд-во МГУ, 1993.

[3] Богданов Р. И. Орбитальная связность и версальные семейства векторных полей на плоскости // Функц. ан. и его прилож. (в печати).

[4] Богданов Р. И. Мультипликативная теория орбитальной эквивалентности векторных полей на плоскости // В сб. “Локальные и глобальные проблемы в теории особенностей”. М.: Наука, 1998 (Тр. МИРАН, т. 221, посвященный 60-летию В. И. Арнольда).

[5] Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970.

4. Закалюкин В. М. “Обобщения теоремы Голубицкого–Гийемина о контакте лагранжевых подмногообразий”

Рассматриваются особенности контакта ростка лагранжева подмногообразия L с ростком подмногообразия C стандартного симплектического пространства $(\mathbb{R}^{2n}, dp \wedge dq)$ относительно группы ростков симплектоморфизмов. Случай, когда C – также лагранжево, рассмотрен Голубицким и Гийемином в 1975 г. В случае, когда C является коизотропным, список простых классов таких пар, полученный в [1], совпадает (за исключением одного класса) со списком простых краевых особенностей функций: A, B, C, D, E, F .

ТЕОРЕМА. 1. Если сужение симплектической формы на $C^{2(n-k)}$ невырождено, то росток всякой пары (C, L) симплектоморфен ростку пары, состоящей из координатного симплектического подпространства $q_i = p_i = 0$, $i = 1, \dots, k$, и лагранжева подмногообразия, заданного производящим семейством вида $q_1 f_1(q_{k+1}, \dots, q_n) + q_2 f_2(q_{k+1}, \dots, q_n) + \dots + q_k f_k(q_{k+1}, \dots, q_n)$. Две такие пары эквивалентны тогда и только тогда, когда ростки отображений $(q_{k+1}, \dots, q_n) \mapsto (f_1, \dots, f_k)$ контактно эквивалентны.

2. Симплектоморфизмом, сохраняющим изотропное подмногообразие $C = \{(p, q) \mid p_i = q_j = 0, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k\}$, лагранжев росток приводится к виду, отвечающему производящей функции от q , аффинной по переменным $q_1, \dots, q_k$.

Отметим, что похожая задача для подгруппы симплектоморфизмов, сохраняющих некоторое лагранжево расслоение, рассмотрена в [2].

[1] Закалюкин В. М., Мясниченко О. М. // Функц. анализ и его прилож. 1998. Т. 32. № 1.

[2] Domitrz W., Janeczko S. // Banach Center Publications. 1997. V. 39. P. 31–37.

5. Иншаков А. В. “Инварианты типа j^+ , j^- , st гладких кривых на двумерных многообразиях”

В данной работе обобщаются некоторые идеи работ [1], [2].

ТЕОРЕМА 1. Компоненты связности пространства кривых на произвольной поверхности M^2 естественно соответствуют классам свободной гомотопической эквивалентности петель в пространстве сферизованного касательного расслоения к M^2 .

Дискриминант в пространстве кривых естественно разбивается на три компоненты J^+ , J^- и St . Каждая компонента (обозначим ее через D) в свою очередь распадается на страты D_α , соответствующие различным d -индексам α . Кроме того, индексы делятся на непарные и парные (для st -индексов – двух типов). К парным индексам определяются пары. Через $\tilde{\alpha}$ обозначим пару к индексу α , если он парный.

ТЕОРЕМА 2. Все страты D_α неприводимы.

ТЕОРЕМА 3. Коцикл, двойственный по Пуанкаре к страту D_α , тривиален в группе когомологий $H^1(\Omega, \mathbb{Z})$ тогда и только тогда, когда индекс α непарный. Если α – парный $j^\pm$ -индекс, то $[J_\alpha^\pm] - [J_{\tilde{\alpha}}^\pm] = 0$. Если α – парный st -индекс, то $[St_\alpha] \pm [St_{\tilde{\alpha}}] = 0$. В этой формуле надо брать $+$, если α – первого типа, и $-$, если второго.

[1] Arnold V. I. Singularities and Bifurcations, // Adv. Soviet Math. 1994. V. 21. P. 39–91.

[2] Aicardi F. // J. Knot Theory Ramifications. 1996. V. 15. № 6. P. 743–778.

6. Казарян М. Э. “Инварианты первого порядка для функций Морса на окружности”

Инвариант на пространстве функций Морса – локально постоянная функция, которая при изменении функции меняется только в те моменты, когда у функции появляется вырожденная критическая точка, либо кратное критическое значение. Инварианты конечного порядка возникают при изучении пространства функций Морса методом Васильева разрешения дискриминанта и определяются аналогично тому, как они определяются в теории узлов [1]. Их изучение интересно для сравнения с нерешенными задачами в теории узлов. Оказывается, что для функций Морса на окружности уже пространство инвариантов первого порядка бесконечномерно, в то время как у узлов нетривиальных инвариантов первого порядка вообще не существует.

ТЕОРЕМА. На пространстве функций Морса на окружности имеются бесконечные серии целочисленных инвариантов t_k , $k \geq 1$, и инвариантов ω_k , $k \geq 2$, со значением в $\mathbb{Z}_k$. Все они независимы, и любой инвариант первого порядка со значением в произвольной абелевой группе линейно выражается через приведенные.

В частности, ω_k нельзя представить как вычет по модулю k некоторого целочисленного инварианта первого порядка. Инвариант t_k определяется как половина количества критических значений, имеющих ровно $2k - 1$ прообраза. Определение ω_k сложнее и здесь не приводится.

[1] Vassiliev V. A. Complements of Discriminants of Smooth Maps. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1992.

7. Карпушкин В. Н. “Вокруг контрпримера А. Н. Варченко”

Контрпример А. Н. Варченко [1] есть $\mathbb{R}$ -невырожденный, но $\mathbb{C}$ -вырожденный вещественный полуквазиоднородный полином степени 1 в весах $(1/4, 1/4, 1/8)$. Пусть $C(\alpha)$ – множество вещественных $\mathbb{C}$ -невырожденных полуквазиоднородных полиномов в $\mathbb{R}^3$ степени 1 в весах α . Предположим, что $1/2 \leq |\alpha| \leq 1$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 2\alpha_3$.

Пусть $V_d(\varepsilon)$ есть множество функций F , аналитичных в полицилиндре D_d с центром в $0 \in \mathbb{C}^3$ радиуса $d \in \mathbb{C}^3$ таких, что $F: (D_d, D_d \cap \mathbb{R}^3) \rightarrow (\mathbb{C}, \mathbb{R})$ и ряд Маклорена F содержит только такие мономы x^m , что $(m, \alpha) \geq 1$ либо $|m| \geq 1$ и $|F(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in D_d$.

ТЕОРЕМА. Пусть $f \in C(\alpha)$. Тогда существует константа $k > 0$ такая, что для любых $d > 0$ найдутся окрестность A_d точки $0 \in \mathbb{R}^3$ и константа $\varepsilon_d > 0$ такие, что если $F \in V_d(\varepsilon_d)$, $\varphi \in C_0^2(A_d)$, то при $\tau \geq 2$ имеем: модуль интеграла по $\mathbb{R}^3$ от $\varphi \exp(i\tau(f + F))$ не превосходит $k\tau^{-|\alpha|}(\varphi)_2$. Здесь $(\varphi)_2$ – норма φ в $C_0^2(\mathbb{R}^3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть λ – 1-форма, $f = f_1 + f_2$, где в f_1 входят все мономы из f степени m : $(m, \alpha) = 1$; в f_2 входят все мономы степени m : $(m, \alpha) > 1$. Из классификации квазиоднородных функций в $\mathbb{R}^3$, полунепрерывности числа Милнора получим ограничение на удаленность многогранника Ньютона в критических точках функции $f_1 + \lambda$, лежащих в $\mathbb{R}^3$. Легко видеть, что коранг $f_1 + \lambda$ во всех критических точках $\mathbb{R}^3$ не превосходит 2. Из работы [2] получим доказательство теоремы. Аналог теоремы верен и для объемов.

[1] Варченко А. Н. // Функцион. анализ и его прилож. 1976. Т. 10. №3. С. 13–38.

[2] Карпушкин В. Н. // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1984. Т. 10. С. 150–169.

8. Панов Д. А. “Параболические кривые и градиентные отображения”

Гладкая поверхность, лежащая в трехмерном (проективном, аффинном) пространстве, содержит точки трех типов – эллиптические, гиперболические и параболические. В окрестности эллиптической точки поверхность локально выпукла и устроена как эллипсоид, в окрестности гиперболической точки поверхность устроена как однополостный гиперболоид, все остальные точки – параболические.

На поверхности общего положения параболические точки образуют гладкие линии, и на этих линиях в конечном числе встречаются специальные параболические точки, в которых касательная к линии является ядром второй квадратичной формы.

Известно [1], что на кубической поверхности, лежащей в $\mathbb{RP}^3$ и диффеоморфной $\mathbb{RP}^2$, параболическая линия состоит из четырех компонент связности и содержит шесть специальных точек. Оказывается, что поверхность минимальной алгебраической сложности не доставляет минимальной сложности параболической линии.

ТЕОРЕМА 1. Существует сколь угодно малое шевеление проективной плоскости, лежащей в $\mathbb{RP}^3$, на котором параболическая линия связна.

Эта теорема опровергает первую половину гипотезы Аикарди [2]. Однако пример поверхности, строящейся в теореме 1, содержит 12 специальных точек, и это оставляет надежду на то, что вторая половина гипотезы верна.

[1] Segre B. The nonsingular cubic surfaces. Oxford: Clarendon Press, 1942.

[2] Арнольд В. И. // Функцион. анализ и его прилож. 1977. Т. 31. №4.

9. Пушкарь П. Е. “Индекс Маслова и симплектические теоремы Штурма”

Вечернее заседание 20 января 1998 г., секция 2.

1. Жиков В. В. (Владимир) “Вопросы единственности для эллиптического уравнения с младшими членами”

2. Уральцева Н. Н. (Санкт-Петербург) “О свойствах свободной границы в задачах с препятствием”

3. Максимова Н. О. “О несуществовании нетривиальных неотрицательных обобщенных решений у нелинейных неравенств эллиптического типа в неограниченных областях”

Пусть $D_q = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 \leq q(x_2^2, \dots, x_n^2)\}$, где $q(s_1, \dots, s_{n-1}) > 0$, $q \in C((\mathbb{R}_+)^{n-1})$, q_{s_j} и $q_{s_j s_j}$ принадлежат $L_{\text{loc}}^\infty((\mathbb{R}_+)^{n-1})$ ($j = 1, \dots, n-1$). Рассмотрим в D_q неравенство

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n [a_i(x)u_{x_i}]_{x_i} + F(x, u)u \leq 0, \quad x \in D_q.$$

Здесь a_i и a_{ix_i} принадлежат $L_{\text{loc}}^\infty(D_q)$, $a_i(x) \geq 0$ почти всюду (п.в.) в D_q ($i = 1, \dots, n$); $F(x, u(x)) \in L_{\text{loc}}^\infty(D_q) \forall u \in L_{\text{loc}}^\infty(D_q)$. Обозначим $\Omega_p = \{x : |x| \leq p\}$ ($p \geq 0$), $\Omega_{pq} = \Omega_p \cap D_q$. Предположим, что для некоторого $r_0 > 0$ п.в. в $\Omega_{r_0 q}$ выполняются неравенства

$$d_0 |x|^l \leq a_i(x) \leq d_1 |x|^l \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$\sum_{i=1}^n [a_i(x) + 2x_i a_{ix_i}(x)] \leq d_1 |x|^l, \quad F(x, u(x)) \geq A_0 \quad \forall u \in L_{\text{loc}}^\infty(\Omega_{r_0 q}).$$

Здесь $d_0 > 0$, $d_1 \geq d_0$, $l \geq 0$ и $A_0 > 0$ – постоянные, причем A_0 зависит только от d_0 , d_1 , r_0 и значений $q, q_{s_1}, \dots, q_{s_{n-1}}$ в $\Omega_{r_0 q}$. Будем считать, что функция

$$g(x) \equiv x_1^2 a_1(x) - \sum_{i=2}^n x_i^2 a_i(x) q_{s_{i-1}}(x_2^2, \dots, x_n^2)$$

непрерывна в окрестности Q границы D_q и п.в. на множестве $\{x : x \in Q, g(x) < 0\}$ справедливо неравенство

$$(2 + 2^{1/2}) x_1^2 a_1(x) > 1.01 \left\{ \sum_{i=2}^n [2q_{s_{i-1}}(x_2^2, \dots, x_n^2) - 2^{1/2} |q_{s_{i-1}}(x_2^2, \dots, x_n^2)|] x_i^2 a_i(x) \right\}.$$

Пусть, кроме того, $\sum_{i=1}^n x_i^2 a_i(x) \geq B(x)$ п.в. в $D_q \setminus \Omega_{r_0 q}$ для некоторой положительной $B \in C(\overline{D_q} \setminus \Omega_{r_0 q})$.

ТЕОРЕМА. Неотрицательное обобщенное решение $u \in W_{\infty, \text{loc}}^1(D_q)$ неравенства (1) равно нулю п.в. в D_q .

4. Павленко В. Н. (Челябинск) “О существовании правильных решений резонансных краевых задач для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями”

Исследуется вопрос о существовании правильных решений [1] краевых задач вида

$$(1) \quad \mathcal{L}u(x) + g(x, u(x)) = p(x), \quad x \in \Omega; \quad Bu|_{\partial\Omega} = 0$$

с граничным условием первого, второго или третьего рода. Здесь

$$\mathcal{L} = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + c(x)$$

– равномерно эллиптический оператор в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$; $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $c \in C(\overline{\Omega})$; функция $g: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ суперпозиционно измерима и кусочно непрерывна по u для почти всех $x \in \Omega$; $|g(x, u)| \leq a(x) \quad \forall u \in \mathbb{R}$, $a \in L_q(\Omega)$, $q > 2n/(n+2)$; $p \in L_q(\Omega)$. Предполагается, что задача: $\mathcal{L}u(x) = 0$, $x \in \Omega$; $Bu(x)|_{\partial\Omega} = 0$ – имеет ненулевое решение; пусть $N(\mathcal{L})$ – множество ее решений.

ТЕОРЕМА. Пусть

- 1) $\int_{\Omega} dx \int_0^{u(x)} g(x, s) ds - \int_{\Omega} p(x) u(x) dx \rightarrow \pm\infty$ при $u \in N(\mathcal{L})$, $\|u\| \rightarrow +\infty$;
- 2) существует такое не более чем счетное семейство функций $\varphi_i \in W_{1, \text{loc}}^2(\Omega)$, $i \in I$, что для почти всех $x \in \Omega$ неравенство $g(x, u-0) \neq g(x, u+0)$ влечет за собой существование индекса $i \in I$, для которого $u = \varphi_i(x)$ и $(\mathcal{L}\varphi_i(x) + g(x, u-0) - p(x))(\mathcal{L}\varphi_i(x) + g(x, u+0) - p(x)) > 0$.

Тогда задача (1) имеет правильное решение $u \in W_q^2(\Omega)$.

Работа выпонена при поддержке Международной Соросовской программы образования в области точных наук (грант № 1044d) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00444).

[1] Красносельский М. А., Покровский А. В. // ДАН. 1995. Т. 342. № 6. С. 731–734.

5. Ивочкина Н. М. (Санкт-Петербург) “Локально выпуклые гиперповерхности с заданными кривизнами и границами”

6. Пенкин О. М., Покорный Ю. В. (оба – Воронеж) “О дифференциальных неравенствах на многообразиях гибридного типа”

Пусть Γ – связная плоская сетка, образованная набором $\{\gamma_i\}$ ребер – струн, $\{\omega_k\}$ – ячейки сетки, натянутые мембранами. Пусть Ω – объединение сетки Γ с этими ячейками ω_k , и $\partial\Omega$ – набор граничных вершин Γ , где сетка закреплена. Малые поперечные деформации задаются в классе функций $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ уравнением $L_q u \equiv -\Delta_p u + qu = f$, где $\Delta_p u = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$ в ячейках ω_k , а на каждой не примыкающей к ним струне $\Delta_p u = (pu'_{\gamma_i})'_{\gamma_i}$. Во внутренних узлах $(\Delta_p u)(a) = \sum pu'_{\gamma_i}(a+0)$ (дифференцирование вдоль ребер, примыкающих к a). На примыкающих к мембранам струнах $\Delta_p u \equiv (pu'_{\gamma_i})'_{\gamma_i} + (pu)_{\nu_1}' + (pu)_{\nu_2}'$, где ν_1, ν_2 – нормали в сторону клеток с мембранами. Эти трактовки L_q в узлах сетки и границах мембран при стандартном подходе относятся к краевым. Оказалось, что покомпонентные трактовки оператора Δ_p допускают дивергентное представление, так что уравнение $L_q u = f$ может быть записано в виде $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f$. Установлены следующие факты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $L_q u \leq 0$ и $u \geq 0$. Тогда u не имеет в $\Omega_0 = \Omega \setminus \partial\Omega$ точек строгого локального максимума. Если $\partial\Omega = \emptyset$, то $u \equiv \operatorname{const}$ и $q \equiv 0$.

ТЕОРЕМА 2. Если $L_q u \leq 0$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ и $L_q v \geq 0$, причем $u > 0$, $v \geq 0$ в Ω_0 , то $L_q u \equiv L_q v \equiv 0$, $v|_{\partial\Omega} = 0$.

ТЕОРЕМА 3. Оператор $-L_q$ является производящим для сильно непрерывной полугруппы в $L^2_\mu(\Omega)$, где μ – стратифицированная мера на Ω .

Вечернее заседание 20 января 1998 г., секция 3.

1. Блохин А. М., Бушманова А. С. (оба – Новосибирск) “Асимптотическая устойчивость состояния равновесия для гидродинамических моделей переноса носителей заряда в полупроводниках”

Для математического моделирования физических явлений в современных полупроводниковых приборах часто применяются так называемые гидродинамические модели. В докладе за основу взяты гидродинамическая модель переноса заряда в полупроводниках, предложенная в [1], а также ее упрощенный, так называемый газодинамический вариант в одномерном случае. Обе модели приведены как системы квазилинейных уравнений, записанных в форме законов сохранения. Формулируются смешанные задачи, соответствующие известной в физике полупроводников задаче о баллистическом диоде. В силу определенных физических соображений (см. [1]) требуется, чтобы для любых начальных данных решения поставленных задач стремились при неограниченном возрастании времени к соответствующим состояниям равновесия.

После проведения линеаризации исходных квазилинейных систем относительно состояния равновесия получаются симметрические гиперболические (по Фридрихсу) системы. С помощью специальных априорных оценок доказана асимптотическая устойчивость тривиальных решений линеаризованных смешанных задач.

[1] Anile A. M., Muscato O. // Phys. Rev. B. 1995. V. 51. № 23. P. 16728–16740.

2. Бутузов В. Ф., Неделько И. В. “Устойчивость решений сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями”

Рассматривается краевая задача

$$(1) \quad \varepsilon^2 \Delta u = f(u, x, \varepsilon), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^2; \quad u(x, \varepsilon) = g(x), \quad x \in \partial D,$$

где Δ – оператор Лапласа, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, D – ограниченная область с гладкой границей ∂D , f и g – достаточно гладкие функции.

1. Пусть вырожденное уравнение $f(u, x, 0) = 0$ имеет три корня $u = \varphi_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, причем $\varphi_1(x) < \varphi_0(x) < \varphi_2(x)$, $x \in \overline{D}$, между φ_1 и φ_2 нет других корней, кроме φ_0 , и пусть

$$f_u(\varphi_i(x), x, 0) > 0, \quad i = 1, 2, \quad f_u(\varphi_0(x), x, 0) < 0.$$

Введем функцию $I(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(u, x, 0) du$.

II. Пусть уравнение $I(x) = 0$ определяет замкнутую гладкую кривую C_0 , разделяющую область D на две подобласти: D_1 (вне кривой C_0) и D_2 (внутри кривой C_0), и пусть $\frac{\partial I}{\partial n} < 0$, $x \in C_0$, где $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали к C_0 , направленной внутрь D_2 .

III. Пусть $\int_{\varphi_1(x)}^s f(u, x, 0) du > 0$ при $s \in (\varphi_1(x), g(x)]$, $x \in \partial D$.

ТЕОРЕМА. Если выполнены условия I–III, то при достаточно малых ε существует решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (1) такое, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, \varepsilon) = \varphi_1(x), \quad x \in D_1; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, \varepsilon) = \varphi_2(x), \quad x \in D_2.$$

Это решение является локально единственным и асимптотически устойчивым стационарным решением соответствующей параболической задачи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00694).

3. Васильева А. Б. “О контрастных структурах переменного типа”

Контрастной структурой называется решение сингулярно возмущенной задачи, имеющее пограничные и внутренние слои. Рассмотрим задачу:

$$(1) \quad \begin{aligned} \varepsilon^2(u_{xx} - u_t) &= F(u, x, t), \quad 0 < x < 1, \\ u(0, t, \varepsilon) &= u^0, \quad u(1, t, \varepsilon) = u^1, \end{aligned}$$

с условием 2π -периодичности по переменной t .

Пусть уравнение $F(u, x, t) = 0$ имеет три корня: $\varphi_1(x, t) < \varphi_2(x, t) < \varphi_3(x, t)$, причем $F_u|_{u=\varphi_1, \varphi_3} > 0$, $F_u|_{u=\varphi_2} < 0$.

Если уравнение (1) не содержит u_t , то при определенных условиях существует решение u_1 , близкое при $\varepsilon \rightarrow 0$ к $\varphi_1(x, t)$ на $(0, 1)$. При других условиях существует решение u_2 , близкое к $\varphi_3(x, t)$. Оба решения имеют погранслои при $x = 0$ и $x = 1$. Если условия существования u_1 (или u_2) выполняются при любых t , то в окрестности u_1 (или u_2) существует решение задачи (1).

Может оказаться, что при некотором t_0 условие существования для u_1 перестает выполняться, а при $t > t_0$ выполняется условие существования u_2 . В окрестности t_0 уравнение, не содержащее u_t , вообще говоря, решения не имеет. Решение исходной задачи (1), которая u_t содержит, существует, но меняет тип. Это решение с изменением t то близко к φ_1 , то близко к φ_3 . Такое решение называется контрастной структурой переменного типа (КСПТ). КСПТ имеет более сложный вид при наличии внутренних переходных слоев.

В докладе содержатся результаты численно-аналитического исследования КСПТ.

4. Кужель С. А. (Украина, Киев) “О некоторых свойствах невозмущенных операторов”

Пусть B — простой максимальный симметрический оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Через M_B обозначим множество самосопряженных расширений L симметрического оператора B^2 таких, что при всех $u \in \mathcal{D}(L)$ справедливо равенство $(Lu, u) = \|B^*u\|^2$. Элементы множества M_B будем называть невозмущенными операторами. В [1], [2] указан конкретный оператор B , при котором оператор $-\Delta$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ ($n \in \mathbb{N}$) принадлежит множеству M_B , и показано, что принадлежности абстрактного оператора L к классу M_B достаточно для переноса основных результатов теории рассеяния Лакса–Филлипса для волнового уравнения в $\mathbb{R}^n$ на случай абстрактного операторно-дифференциального уравнения $u_{tt} = -Lu$. Возможность такого переноса обусловлена тем, что невозмущенные операторы имеют весьма простую структуру.

ТЕОРЕМА. Оператор L принадлежит множеству M_B тогда и только тогда, когда существуют инвариантные относительно B подпространства H_1 и H_2 пространства H такие, что: 1) операторы $B_i = B|_{\mathcal{D}(B) \cap H_i}$ ($i = 1, 2$) – простые максимальные симметрические операторы в H_i ; 2) справедливо разложение $H = H_1 \oplus H_2$, относительно которого оператор L имеет вид $L = L_{1\mu} \oplus L_{2M}$, где $L_{1\mu} = B_1^* B_1$ – жесткое расширение оператора B_1^2 в пространстве H_1 , а $L_{2M} = B_2 B_2^*$ – мягкое расширение оператора B_2^2 в пространстве H_2 .

[1] Кужель С. А. // Функциональный анализ и его приложения. 1996. Т. 30. № 1. С. 54–56.

[2] Кужель С. А. // Докл. АН Украины. 1997. № 8. С. 35–38.

5. Жевандров П. Н. (Мексика, Морелия), Мерзон А. Е. “Об устойчивости мод Урселла”

Пусть $0 < \alpha < \pi/2$, $\Omega_1 \equiv \{x \in \mathbb{R}, y > \max(0, -x \operatorname{tg} \alpha)\}$, $\Omega_2 \equiv \{x > 0, 0 > y > -x \operatorname{tg} \alpha\}$; $\Phi_j \in H^1(\Omega_j)$ – обобщенные решения задач Неймана: $\Delta \Phi_j - \Phi_j = 0$ в Ω_j , $\partial_n \Phi_j = 0$ при $y = -x \operatorname{tg} \alpha$, $(-1)^j x > 0$, $\partial_n \Phi_j = \varphi_j$ при $y = 0$, $x > 0$, n – внешняя нормаль к $\partial\Omega_j$; $(K_j \varphi_j)(x) \equiv \Phi_j(x, 0)$, $x > 0$ ($j = 1, 2$). Операторы K_j являются линейными, ограниченными и самосопряженными в $L_2(\mathbb{R}_+)$.

ТЕОРЕМА. Пусть λ_0^{-2} – невырожденное, изолированное собственное значение оператора K_2 (частота захваченной моды Урселла). Тогда для достаточно малых β задача $(K_2 + \beta K_1)\varphi = \mu\varphi$ разрешима, если μ имеет стандартное представление Рэлея–Шрёдингера: $\mu = \lambda_0^{-2} + \beta(\varphi_0, K_1 \varphi_0) + O(\beta^2)$, где φ_0 – нормированный собственный вектор оператора K_2 , отвечающий собственному значению λ_0^{-2} . При этом операторы K_1 , K_2 задаются явными формулами.

Эта задача описывает движение двуслойной жидкости в $\Omega_1 \cup \Omega_2$ с отношением плотностей β ; теорема показывает устойчивость захваченных мод Урселла при малых возмущениях плотности верхнего слоя.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00527), Франко-Русского Центра имени А. М. Ляпунова и фонда CONACYT (Мексика).

6. Нефедов Н. Н. “Асимптотический метод дифференциальных неравенств для сингулярно возмущенных систем тихоновского типа”

Асимптотический метод дифференциальных неравенств [1], [2] развивается для систем вида

$$(1) \quad \varepsilon^2 \Delta u = g(u, v, x, \varepsilon), \quad \Delta v = f(u, v, x, \varepsilon), \quad x \in D,$$

с граничными условиями на ∂D при выполнении требований:

I. Вырожденное уравнение $f(u, v, x, 0) = 0$ имеет три корня $\varphi_1(x) < \varphi_0(x) < \varphi_2(x)$ и $f_u(\varphi_i(x), x, 0) > 0$ ($i = 1, 2$), $f_u(\varphi_0(x), x, 0) < 0$ при $x \in \overline{D}$.

II. Уравнение $I(v, x) =: \int_{\varphi_1(v, x)}^{\varphi_3(v, x)} f(u, v, x, 0) du = 0$ имеет решение $v = w(x)$ и $I_v(w, x) > 0$.

III. Вырожденные задачи в областях D^- и D^+ – внешней и внутренней подобластях D по отношению к замкнутой кривой K с условием $v = w$ на K имеют решения v_1 и v_2 , причем $V := \frac{\partial v_1}{\partial n} - \frac{\partial v_2}{\partial n} = 0$ и $\frac{\partial V}{\partial n} > 0$ на K .

IV. Существуют постоянные $\mu_i > \varphi_{iv}(v_i, x)$ и $\bar{f}_u \mu_i + \bar{f}_v > -\lambda_i$, где производные f вычислены на соответствующих вырожденных решениях, λ_i – главные собственные значения оператора Лапласа в областях D^- и D^+ ($i = 1, 2$).

ТЕОРЕМА. При выполнении условий I–IV задача (1) имеет решение с внутренним переходным слоем вблизи K , являющееся асимптотически устойчивым решением соответствующей параболической задачи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00694).

- [1] Нефедов Н. Н. // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1132–1139.
 [2] Нефедов Н. Н. // Докл. АН. 1996. Т. 349. № 5. С. 603–605.

Утреннее заседание 21 января 1998 г., секция 1.

1. Садовничий В. А., Дубровский В. В. (Магнитогорск), Кадченко С. И. (Магнитогорск), Кравченко В. Ф. “Первые собственные числа задачи Орра–Зоммерфельда из теории гидродинамической устойчивости”

В статье [1] разработан метод вычисления собственных значений дискретного оператора $T + P$, основанный на составлении нелинейной системы уравнений вида

$$\sum_{n=1}^{n_0} \beta_n^p = \sum_{n=1}^{n_0} \mu_n^p(n_0) + \sum_{k=1}^{t_p} \alpha_k^p(n_0) + \varepsilon_p, \quad t_p \geq s_0, \quad p = \overline{1, n_0},$$

где

$$\varepsilon_p = \frac{p}{2\pi i} \sum_{m=t_p+1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m-1} S_p \int_{T_{n_0}} \mu^{p-1} [PR_\mu(T)]^{m-1} d\mu,$$

сведения ее с помощью теории симметрических многочленов к многочлену степени n_0 со старшим коэффициентом, равным единице, и нахождению его корней $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n_0}$. Здесь $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные числа дискретного полуограниченного оператора T , заданного в сепарабельном гильбертовом пространстве H ; $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные числа неограниченного в H оператора $T + P$; $R_\mu(T)$ – резольвента оператора T ; T_{n_0} – круг радиуса $\rho(n_0) = \frac{1}{2}(|\mu_{n_0+1}| + |\mu_{n_0}|)$ с центром в начале координат.

В работе вычислены поправки теории возмущений α_k^p , $k = \overline{1, 4}$, $p = \overline{1, \infty}$, и получены оценки числовых рядов ε_p . Разработана методика нахождения первых собственных чисел краевой задачи Орра–Зоммерфельда для малых чисел Рейнольдса.

Второй автор поддержан грантом Дж. Сороса.

[1] Садовничий В. А., Дубровский В. В. // Труды семинара им. И. Г. Петровского. № 17. М.: Изд-во МГУ, 1994. С. 244–248.

2. Алтухов Ю. А. (Владимир) “Асимптотика спектра для уравнения Кона–Лапласа”

3. Агранович М. С. “Спектральные свойства некоторых интегральных операторов теории потенциала на липшицевых поверхностях”

4. Доброхотов С. Ю. “Циклы и особенности комплексных лагранжевых многообразий и расщепление собственных значений оператора Бельтрами–Лапласа на торе Лиувилля”

Пусть $U_j(x_j) = U_j(x_j + 2\pi)$, $j = 1, 2$, – тригонометрические полиномы с единственными $\bmod 2\pi$ невырожденными точками максимума и минимума, $U_1(x_1) > U_2(x_2) \forall x_1, x_2$; $q_j = (-1)^j(\mathcal{E} - EU_j(x_j))$, $j = 1, 2$; $E, \mathcal{E} \in \mathbb{R}^2$, $\min U_1 < \mathcal{E}/E < \max U_1$. Согласно [1] в фазовом пространстве $T_x^2 \times R_p^2$ существуют два тора $\Lambda^\pm(E)$, являющиеся пересечением комплексного лагранжева многообразия

$$L = \{w, z \in C_w^2 \times C_z^2 / (2\pi Z \oplus 2\pi Z) \mid w_j^2 = q_j(z_j, E, \mathcal{E})\}$$

с $T_x^2 \times R_p^2$, и инвариантные относительно геодезического потока g_t на торе с метрикой $ds^2 = (U_1(x_1) - U_2(x_2))(dx_1^2 + dx_2^2)$, причем Λ^+ переходит в Λ^- при отображении $p \rightarrow -p$. Торы $\Lambda^\pm$ порождают значения энергии $E_\nu = O(|\nu|^2)$, $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, $|\nu| \rightarrow \infty$, с точностью до $O(|\nu|^{-\infty})$ приближающие собственные числа E_ν^+ и E_ν^- оператора Лапласа–Бельтрами на торе с указанной метрикой, причем старшая часть E_ν имеет геометрическую структуру и задается базисом циклов $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ на $\Lambda^+(E_\nu)$. Из-за “туннелирования” между Λ^+ и Λ^- , $\Delta_\nu = E_\nu^+ - E_\nu^- \neq 0$. Наше наблюдение, опирающееся на результаты М. В. Федорюка и [1], состоит в том, что Δ_ν тоже имеет геометрическую структуру: $\Delta_\nu = ((\omega, m(\eta)) + O(1)) \exp(-\int_\Gamma w dz)$. Здесь $\Gamma \subset L$ – некоторый “туннельный” путь из Λ^- в Λ^+ , ω – вектор частот g_t на $\Lambda^+(E_\nu)$, порожденный γ ,

m – вектор индексов пересечений γ с циклом η на $\Lambda^+(E_\nu)$, являющимся специальной проекцией на $\Lambda^+(E_\nu)$ некоторой комплексной каустики из L .

Работа выполнена совместно с А. И. Шафаревичем.

[1] Косыгин Д. В., Минасов А. А., Синай Я. Г. // УМН. 1993. Т. 48. № 4. С. 3–110.

5. Мельник Т. А. (Украина, Киев) “Асимптотический анализ спектра задачи Неймана в густом периодическом соединении типа 3 : 1 : 1”

Густое периодическое соединение Ω_ε типа 3 : 1 : 1 – это область в $\mathbb{R}^3$, полученная присоединением большого числа ε -периодических расположенных тонких цилиндров $G_j(\varepsilon) = \{x : 0 \leq x_2 < 1; (x_1/\varepsilon - j)^2 + (x_3/\varepsilon)^2 < \rho_0^2 < 1/4\}$, $j = 0, \pm 1, \dots, \pm k$, к внешней части границы (зона сочленения) области $\Omega_0 = \{x : |x_1| < h, |x_3| < b, \varphi(x_1, x_3) < x_2 < 0\}$, (тело соединения) вдоль отрезка $I_h = \{x : |x_1| < h, x_2 = x_3 = 0\}$. Здесь k – большое натуральное число, поэтому $\varepsilon = 2h/(2k + 1)$ – малый параметр; $\varphi \in C^\infty([-h, h] \times [-b, b])$, $\varphi \leq -1$. Тип соединения указывает на предельные размерности тела, зоны сочленения и присоединяемых тонких областей. В работе изучено поведение собственных значений (С.З.) $0 = \lambda_0(\varepsilon) < \lambda_1(\varepsilon) \leq \dots \leq \lambda_n(\varepsilon) \leq \dots$ и собственных функций задачи Неймана для оператора Лапласа в Ω_ε , когда $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е. когда число присоединяемых тонких цилиндров возрастает, а их толщина стремится к нулю. Данное исследование является продолжением работы [1].

Для исходной задачи определяется предельная спектральная задача, спектр которой состоит из объединения С.З. $\{\mu_n^-\}$ задачи Неймана в области Ω_0 и бесконечнократных С.З. $\{\mu_n^+ : n \in \mathbb{N}\}$ спектральной задачи

$$\begin{aligned} -\partial_{x_2}^2 v^+(x_1, x_2) &= \mu v^+(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in Q; \\ v^+(x_1, 0) &= 0, \quad \partial_{x_2} v^+(x_1, 1) = 0, \quad x_1 \in I_h, \end{aligned}$$

в прямоугольнике $Q = I_h \times (0, 1)$, заполняемом цилиндрами в предельном переходе.

ТЕОРЕМА. Если $\mu \in \{\mu_n^-\} \setminus \{\mu_n^+\}$ – r -кратное С.З. задачи Неймана в Ω_0 , то существует r С.З. исходной задачи с асимптотикой $\lambda(\varepsilon) = \mu + \varepsilon a_i + O(\varepsilon^{2-\delta})$, $i = 1, \dots, r$. Если $\mu \in \{\mu_n^+\} \setminus \{\mu_n^-\}$, то существует счетное множество С.З. исходной задачи с асимптотикой $\lambda(\varepsilon) = \mu + \varepsilon b_k (\ln \varepsilon) + O(\varepsilon^{2-\delta})$, $k \in \mathbb{N}$. Если $\mu \in \{\mu_n^+\} \cap \{\mu_n^-\}$, то могут реализоваться как указанные два варианта, так и формула $\lambda(\varepsilon) = \mu \pm \varepsilon^{1/2} c_i + O(\varepsilon^{1-\delta})$, $i = 1, \dots, r$. Здесь δ – произвольное положительное число.

[1] Мельник Т. А., Назаров С. А. // Докл. АН. 1993. Т. 333. № 1. С. 13–15.

6. Попов И. Ю. (Санкт-Петербург) “Фрактальность спектра и собственные значения на непрерывном спектре в явнорешаемых моделях низкоразмерных квантовых систем”

Рассмотрим модель двумерного периодического массива квантовых точек в магнитном поле. Исходным оператором является ортогональная сумма операторов изолированных точек. Модельный оператор H строится по схеме “сужение-расширение” [1], [2]. Пусть $\Omega = \sqrt{\omega_c^2 + \omega^2}$, где ω_c – циклотронная частота, ω – параметр потенциала конфайнмента,

$$\tau_n(x) = \Omega[1/2 - \chi_n(4\pi(ax + b) - \ln(\Omega/4\pi) - 2\gamma)],$$

где a, b – константы связи, χ_n – n -я ветвь обратной функции к Γ'/Γ . Пусть $h(\eta)$ – оператор Харпера, η – количество квантов магнитного потока через ячейку решетки.

ТЕОРЕМА. Непрерывный спектр оператора H состоит из зон B_n , которые являются образами под действием функции τ_n спектра оператора $h(\eta)$; B_n лежит ниже E_{0n} и (для $n \geq 1$) выше $E_{0, n-1}$, где E_{mn} – уровни для изолированной точки.

СЛЕДСТВИЕ. E_{mn} , $m \neq 0$, суть собственные значения H . При $a \neq 0$ существует значение константы связи b такое, что E_{mn} погружены в непрерывный спектр H .

[1] Geyler V. A., Popov I. Yu. // Z. Phys. B. 1995. V. 98. P. 473–477.

[2] Geyler V. A., Popov I. Yu. // Rep. Math. Phys. 1977. V. 39. P. 275–281.

7. Филиновский А. В. “Стабилизация решений волнового уравнения и спектральные свойства оператора Лапласа в расширяющихся областях”

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — неограниченная область с границей $\Gamma \in \mathbb{C}^2$. Рассмотрим задачу

$$(1) \quad u_{tt} - \Delta u = 0, \quad t > 0, \quad x \in \Omega; \quad u|_{\Gamma} = 0, \quad t > 0;$$

$$(2) \quad u(0, x) = f(x) \in \mathring{W}_2^1(\Omega), \quad u_t(0, x) = g(x) \in L_2(\Omega).$$

В работе устанавливаются условия на область Ω , при которых локальная энергия решения задачи (1), (2) стремится к нулю, т.е. для произвольной ограниченной области $\Omega' \subset \Omega$ выполнено соотношение

$$(3) \quad \int_{\Omega'} (u_t^2(t, x) + |\nabla u(t, x)|^2) dx \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Пусть $0 < \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_m < \alpha_{m+1} = \dots = \alpha_n = 1$, $\varphi(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 x_j^2$. Область Ω называется областью класса $\tilde{G}_\varphi$, если $(\nu, \nabla \varphi(x)) \leq 0$, $x \in \Gamma \cap \{r \geq R_0\}$, $R_0 > 0$, $r = |x|$ (ν — единичная внешняя относительно Ω нормаль к Γ) и $\sum_{j=1}^m x_j^2 \leq C(\sum_{j=m+1}^n x_j^2)^{\alpha_m}$, $x \in \Omega \cap \{r \geq R_0\}$.

ТЕОРЕМА 1. Если $n \geq 2$, $\Omega \in \tilde{G}_\varphi$, то для всех $f \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ и $g \in L_2(\Omega)$ выполнено соотношение (3).

Пусть L — самосопряженный оператор, порожденный в $L_2(\Omega)$ дифференциальным выражением $-\Delta$ и однородным краевым условием Дирихле. Доказательство теоремы 1 основано на спектральных свойствах оператора L в областях $\Omega \in \tilde{G}_\varphi$.

ТЕОРЕМА 2. Если $n \geq 2$ и $\Omega \in \tilde{G}_\varphi$, то оператор L спектрально абсолютно непрерывен.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 96-15-96177, № 97-01-00365).

8. Шкаликов А. А. “Линии Стокса и “спектральный галстук” в проблеме Орра–Зоммерфельда”

Спектральная задача Орра–Зоммерфельда имеет вид

$$((D^2 - \alpha^2)^2 - i\alpha R[q(x)(D^2 - \alpha^2) - q''(x)])y = -\lambda(D^2 - \alpha^2)y, \\ y(\pm 1) = y'(\pm 1) = 0.$$

Здесь $D = d/dx$, α — волновое число, R — число Рейнольдса, а гладкая функция $q(x)$ — профиль течения жидкости в канале $|x| \leq 1$. В докладе были сформулированы утверждения о базисных свойствах собственных и присоединенных функций этой задачи и поведении собственных значений при больших числах Рейнольдса ($R \rightarrow \infty$). Часть этих результатов опубликована в работах [1], [2]. Здесь сформулируем теорему, не вошедшую в эти работы.

ТЕОРЕМА. Пусть $q(x) = x$ (что соответствует течению Куэтта (Couette)). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число R_0 , что при всех $R > R_0$ спектр задачи Орра–Зоммерфельда находится в ε -окрестности отрезков $[-1, -i/\sqrt{3}]$, $[1, -i/\sqrt{3}]$ и луча $[-i/\sqrt{3}, -i\infty)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 96-01-01000, № 96-15-96091).

[1] Шкаликов А. А. // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 6. С. 813–816.

[2] Шкаликов А. А. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1998. № 4.

Утреннее заседание 21 января 1998 г., секция 2.

1. Пухначев В.В. (Новосибирск) “Задача Коши для уравнения $u_t + \Delta^2 u + \Delta(u^2 - \beta u) = 0$ ”

Основные результаты доклада опубликованы в [1]–[3].

[1] Пухначев В.В. // Гидродинамика и теплообмен течений жидкости со свободной поверхностью / ред. Шрейбер И.Р. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1985. С. 119–127.

[2] Pukhnachov V. V. // Free boundaries in viscous flows / ed. R. A. Brown, S. H. Davis. V. 61. IMA Series, 1994. P. 67–77.

[3] Адмаев О. В., Пухначев В. В. Автономные решения уравнения $u_t + \Delta^2 u + \Delta(u^2) = 0$ // Препринт № 3. Красноярск: ВЦ СО РАН, 1997.

2. Гладков А. Л. (Белоруссия, Витебск) “Эволюция решений нелинейного уравнения теплопроводности с сильным поглощением”

Рассматриваются неотрицательные решения задачи Коши

$$(1) \quad u_t = \Delta u^m - u^p, \quad (x, t) \in S = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+,$$

$$(2) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

где $0 < p < 1$, $p < m$, $u_0(x)$ – неотрицательная непрерывная функция, которая может расти на бесконечности. Определим время остывания $T_E(x)$ обобщенного решения в точке $x \in \mathbb{R}^N$ следующим образом: $T_E(x) = \sup\{t > 0 : u(x, t) > 0\}$. Положим

$$c_N = \{2(m-p)^{-2} m[mN + p(2-N)]\}^{-\frac{1}{m-p}}.$$

Для обобщенных решений задачи (1), (2) получен ряд теорем о их поведении при $t \rightarrow \infty$. В частности, доказана

ТЕОРЕМА. 1) *Предположим, что $m > 1$ и $u_0(x)$ удовлетворяет неравенству*

$$u_0(x) \leq A(|x|) + B|x - a|^{\frac{2}{m-p}}$$

для некоторого $a \in \mathbb{R}^N$, где $A(|x|) = o(|x|^{\frac{2}{m-p}})$ при $|x| \rightarrow \infty$ и $0 \leq B < c_N$. Тогда для любого $y \in \mathbb{R}^N$

$$T_E(y) \leq \frac{1}{1-p} \inf_{0 < \varepsilon < c_N - B} \frac{[M(R(\varepsilon))]^{1-p}}{\left[1 - \left(\frac{B+\varepsilon}{c_N}\right)^m\right]^{\frac{m-p}{m}}}.$$

Здесь $M(R) = \max_{|x-y| \leq R} u_0(x)$, а $R(\varepsilon)$ – максимальный корень уравнения

$$(B + \varepsilon)(r - |y|)^{\frac{2}{m-p}} = M(r).$$

2) *Допустим теперь, что $m > 1$ и $u_0(x) \geq d|x - a|^{\frac{2}{m-p}}$ для некоторых $a \in \mathbb{R}^N$ и $d > c_N$. Тогда существует положительная постоянная k такая, что*

$$u(x, t) \geq kt^{\frac{1}{1-p}} \quad \text{для любых } x \in \mathbb{R}^N \quad \text{и } t > 0.$$

Показано, что эта теорема является в определенном смысле точной. Аналогичные результаты получены в случае $p < m < 1$.

3. Хуснутдинова Н. В. (Новосибирск) “О несуществовании “в целом” положительных решений уравнения Прандтля–Мизеса”

Рассматривается классическая краевая задача для уравнения пограничного слоя Прандтля–Мизеса [1]:

$$(1) \quad \omega_x = \nu \sqrt{|\omega|} \omega_\psi \psi + 2U(x)U'(x), \quad (x, \psi) \in D\{0 < x < X, \psi > 0\},$$

$$(2) \quad \omega|_{x=0} = \omega_0(\psi), \quad \omega|_{\psi=0} = 0, \quad \lim_{\psi \rightarrow \infty} \omega(x, \psi) = U^2(x)$$

при следующих условиях на данные задачи

- (i) $\omega_0(\psi), \omega'_0(\psi), \sqrt{\omega_0} \omega''_0(\psi)$ – ограничены и непрерывны по Гёльдеру, $0 < \omega_0(\psi) \leq U^2(0)$ при $\psi > 0$, $\omega_0(0) = 0, \omega'_0(0) > 0, U(x) \in C^2[0, X], U(x) > 0, U'(x) < 0, x \in (0, X], U'(0) = 0, \nu \sqrt{\omega_0(\psi)} \omega'_0(\psi) = O(\psi)$ при малых ψ .

Предположения (i) обеспечивают существование положительного в области D решения краевой задачи (1), (2) при некотором $X = X_0 > 0$ [1].

В работе показывается, что при $U'(x) < 0$ положительное решение $\omega(x, \psi)$ задачи (1), (2) не продолжимо на произвольный промежуток по x .

ТЕОРЕМА. Пусть выполняется (i) и числа $(x_1, x_2) \in (0, X]$ таковы, что

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{|U'(\xi)|} d\xi > 2\sqrt{m(x_2 - x_1)}, \quad x_2 > x_1,$$

где

$$m = \max_{x \in [x_1, x_2]} [U(x) \sqrt{\omega_0(Q(x))} / U(0)], \quad Q(x) = \int_{x_1}^x \sqrt{6\nu |U'(\xi)|} d\xi.$$

Тогда не существует решения задачи (1), (2) с $\omega(x, \psi) > 0$, определенного в области $D_2\{0 < x < x_2, \psi > 0\}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

[1] Олейник О. А. // ЖВМиМФ. 1963. Т. 3. №3. С. 489–507.

4. Гилдинг Б. (Нидерланды, Энсхеде), Шишков А. Е. (Украина, Донецк) “Распространение носителей решений уравнений типа многомерной нелинейной диффузии с конвекцией”

Рассматривается задача Коши для широкого класса квазилинейных вырождающихся параболических уравнений. Типичным примером является уравнение

$$(|u|^{q-1}u)_t + (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D_x^\alpha (|D_x^m u|^{p-1} D_x^\alpha u) - (B, \nabla_x (|u|^{r-1}u)) = 0, \quad 0 < t < +\infty,$$

с начальным условием $u(0, x) = u_0(x)$. Здесь $m \geq 1, n \geq 1, u_0 \in L_q(\mathbb{R}^n), 0 < q \leq d, q < p, q < r, B = (b_1, \dots, b_n)$.

Сформулируем некоторые результаты для обобщенного решения $u(t, x)$ этой задачи. Предположим, что $\text{supp } u_0 \in \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_n < 0\}$ и обозначим $\Omega(s) = \{x : x_n > s\}$, $\zeta(t) = \sup\{s : \text{supp } u(t, \cdot) \cap \Omega(s) \neq \emptyset\}$, $r_\lambda = p + \lambda[m(p+1) - 1]/n$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u_0 \in L_{q+1}(\mathbb{R}^n)$ (т.е. $d = q+1$). Тогда $u(x, t)$ имеет конечную скорость изменения носителя и $\forall t > h > 1$ справедливы оценки:

- $\zeta(t) \leq Ct^\alpha, \alpha = \frac{q+1}{l(q+1)+n(p-q)},$ если $b_n = 0$ или $r \geq r_{q+1}$;
- $\zeta(t) \leq Ct^\beta \ln t, \beta = \frac{r-p}{l(\lambda-q)-p+q},$ если $b_n > 0$ и $r < r_{q+1}$;
- $\zeta(t) \leq Ct^\gamma, \gamma = \frac{l(q+1)+n(p-r)}{l(q+1)+n(p-q)},$ если $b_n < 0$ и $r < r_{q+1}$;
- $\zeta(t) < C,$ если $r < p, l = m(p+1), C < +\infty$.

ТЕОРЕМА 2. Если дополнительно $u_0 \in L_q(\mathbb{R}^n)$ и $u(t, x)$ удовлетворяет закону сохранения в $L_q(\mathbb{R}^n)$, то справедливы оценки а)–д) с r_q вместо r_{q+1} .

5. Посашков С. А. “Знаковые инварианты и новые точные решения квазилинейного уравнения теплопроводности с градиентной диффузией”

Для параболического уравнения

$$(1) \quad v_t = \varphi(v)|v_x|^\sigma v_{xx} + m(v)|v_x|^{\sigma+2} + F(v), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

и оператора первого порядка

$$(2) \quad H(v) \equiv v_t - m(v)|v_x|^{\sigma+2} - M(v)$$

изучаются условия на коэффициенты (1), (2), при которых оператор $H(v)$ является знаковым инвариантом на решениях уравнения (1): если $H(v) \geq 0$ (≤ 0), $x \in \mathbb{R}$, $t = 0$, то $H(v) \geq 0$ (≤ 0), $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Пусть $m(v) = av + b$, $G(v) \equiv (F - M)/\varphi$.

ТЕОРЕМА. Оператор (2) является знаковым инвариантом уравнения (1), если $M'' - (3\sigma + 5)aG - (\sigma + 1)mG' = 0$ и $MG' - (\sigma + 1)M'G + (\sigma + 1)(\sigma + 2)mG^2 = 0$.

Для ряда частных решений $(M(v), G(v))$ последней системы строятся точные решения уравнения (1), которое заменой может быть сведено к уравнению в дивергентной форме.

ПРИМЕР 1. Задача Коши для уравнения

$$u_t = (|u_x|^\sigma u_x)_x + \frac{3\sigma + 2}{2\sqrt{\sigma(\sigma + 1)}} u^{\frac{\sigma+2}{2(\sigma+1)}}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0,$$

имеет обобщенное автомодельное решение $u(t, x) \geq 0$:

$$\frac{1}{2\sigma + 3} \left(1 - \frac{\alpha}{c_0} u^{\frac{\sigma}{2(\sigma+1)}} \right)^{\frac{2\sigma+3}{\sigma+2}} - \frac{1}{\sigma + 1} \left(1 - \frac{\alpha}{c_0} u^{\frac{\sigma}{2(\sigma+1)}} \right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma+2}} = -\frac{\sigma + 2}{2(\sigma + 1)^2} c_0^{-\frac{2\sigma+3}{\sigma+2}} |x|,$$

$\alpha = (\sigma + 2)/\sqrt{\sigma(\sigma + 1)}$, $c_0(t) = \frac{\sigma+2}{\sigma+1}t$, которое описывает распространение возмущения с конечной скоростью по нулевому фону.

ПРИМЕР 2. Начально-краевая задача для уравнения

$$u_t = (|u_x|^\sigma u_x)_x + u^{\frac{2}{\sigma+2}}, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad \sigma > 0,$$

имеет точное решение с подвижным локализованным фронтом и с граничным условием, развивающимся в режиме с обострением

$$u(t, x) = A(T - t)^{-1/\sigma} \left[B(T^{\frac{\sigma+3}{\sigma+2}} - (T - t)^{\frac{\sigma+3}{\sigma+2}}) - x \right]_+^{\frac{\sigma+2}{\sigma}},$$

$$A = \left[2 \left(\frac{\sigma + 2}{\sigma} \right)^{\sigma+1} (\sigma + 1) \right]^{-1/\sigma}, \quad B = \frac{\sigma}{\sigma + 3} A^{-\frac{\sigma}{\sigma+2}}; \quad T > 0.$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 96-01-01161, № 96-02-18689).

6. Иванов А. В. (Санкт-Петербург) “Существование и единственность слабого решения задачи с препятствием для квазилинейных эллиптико-параболических уравнений”

7. Калашников А. С. “О наличии начального скачка у температурного фронта при распространении тепла в среде с нелинейными стоками”

Пусть $u(x, t)$ – решение краевой задачи

$$\begin{aligned} (1) \quad & D_t u = D_x^2 u - g(t)\varphi(u), \quad (x, t) \in (\mathbb{R}_+)^2; \\ (2) \quad & u(x, 0) = 0, \quad x \in \overline{\mathbb{R}}_+; \quad u(0, t) = f(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+. \end{aligned}$$

Здесь $\varphi \in C(\overline{\mathbb{R}}_+)$, $\varphi(s) > 0 \quad \forall s > 0$, $\varphi(0) = 0$, $1/\varphi \in L_1((0, 1))$; $f \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+) \cap L_\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$, $f(t) > 0 \quad \forall t > 0$, $f(0) = 0$, $D_t f(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0$; функция g подчинена тем же требованиям, что и f . Для $t > 0$ положим $\zeta(t) = \sup\{x \mid u(x, t) > 0\}$. Как обычно, обозначим $\operatorname{Erfc}(y) = 2\pi^{-1/2} \int_y^{+\infty} \exp(-\eta^2) d\eta$.

ТЕОРЕМА. Если при некоторых значениях параметров $\mu_0 > 0$, $\mu_1 > \mu_0$ и $\alpha > 1/2$ выполняются соотношения

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \varphi(f(\tau)) \frac{g(\tau) d\tau}{\operatorname{Erfc}(\mu_1 t^{-\alpha})} = 0, \quad \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{\operatorname{Erfc}(\mu_0 t^{-\alpha})} = k > 0,$$

то $\liminf_{t \rightarrow 0} \zeta(t) > 0$.

Доказательство основано на неравенстве

$$u(x, t) \geq k \operatorname{Erfc}[\mu_0(1+x)t^{-\alpha}] - \int_0^t \varphi(f(\tau))g(\tau) d\tau,$$

справедливость которого при достаточно малых $t > 0$ устанавливается с помощью принципа максимума.

Таким образом, краевая задача (1), (2) описывает процесс распространения тепла с начальным скачком температурного фронта. Гипотеза о наличии этого эффекта была высказана Г. И. Баренблаттом.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-00165).

Утреннее заседание 21 января 1998 г., секция 3.

1. Ветохин А. Н. “Точный класс Бэра вспомогательных показателей”

Напомним, что вспомогательные показатели системы

$$(1) \quad \dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

где $A: \mathbb{R}^+ \rightarrow \operatorname{End} \mathbb{R}^n$ – непрерывная ограниченная оператор-функция, определяются при всяком $k \in \{1, \dots, n\}$ формулами (см. [1])

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_k(A) &= \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{mT} \sum_{j=1}^m \ln d_k(jT, (j-1)T), \\ \underline{\nu}_k(A) &= \underline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{mT} \sum_{j=1}^m \ln d_k(jT, (j-1)T), \end{aligned}$$

где $d_k(t, s)$ – k -е (в порядке неубывания) сингулярное число оператора Коши системы (1).

ТЕОРЕМА 1. Если $n > 1$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$, то функция $\underline{\nu}_k(\cdot): M_n \rightarrow \mathbb{R}$ и функция $\bar{\nu}_1(\cdot): M_n \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежат в точности третьему классу Бэра на пространстве систем вида (1), наделенном топологией компактной сходимости коэффициентов на $\mathbb{R}^+$.

ТЕОРЕМА 2. Если $n > 2$, $k \in \{2, \dots, n-1\}$, то функция $\bar{\nu}_k(\cdot): M_n \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит в точности четвертому классу Бэра на пространстве систем вида (1), наделенном топологией компактной сходимости коэффициентов на $\mathbb{R}^+$.

Отметим, что функции $\bar{\nu}_n(\cdot): M_n \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{\nu}_n(\cdot): M_n \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежат в точности второму классу Бэра на пространстве систем вида (1), наделенном топологией компактной сходимости коэффициентов на $\mathbb{R}^+$.

[1] Миллионщиков В. М. // Матем. заметки. 1970. Т. 7. № 4. С. 503–513.

2. Изобов Н. А. (Белоруссия, Минск) “О характеристических и нижних характеристических множествах линейной системы Пфаффа”

Рассматриваем вполне интегрируемые линейные системы Пфаффа

$$(1) \quad \frac{\partial x}{\partial t_i} = A_i(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^2, \quad i = 1, 2,$$

с ограниченными непрерывно дифференцируемыми коэффициентами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Векторы $\lambda \in \mathbb{R}^2$ и $p \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} L_x(\lambda) &\equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} [\ln \|x(t)\| - (\lambda, t)] / \|t\| = 0, & L_x(\lambda - \varepsilon e_i) &> 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \quad i = 1, 2, \\ l_x(p) &\equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} [\ln \|x(t)\| - (p, t)] / \|t\| = 0, & l_x(p + \varepsilon e_i) &< 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

где $e_i = (2 - i, i - 1)$, будем называть соответственно характеристическим (Э. И. Грудо) и нижним характеристическим векторами решения $x: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ системы (1) и обозначать символами $\lambda[x]$ и $p[x]$, а множества $\Lambda_x = \bigcup \lambda[x]$ и $P_x = \bigcup p[x]$ — характеристическим и нижним характеристическим множествами этого решения.

ТЕОРЕМА 1. Для любой последовательности $\{c_m\} \subset \mathbb{R}^2$ попарно неколлинеарных векторов существует двумерная система (1) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, все решения $x(t, c_m)$, $t \in \mathbb{N}$, которой имеют попарно различные характеристические множества $\Lambda(t)$ положительной линейной меры Лебега, а характеристическое множество Λ_x ее всякого решения $x(t)$, линейно независимого с любым решением $x(t, c_m)$, есть множество $\Lambda_x = \lim_{m \rightarrow \infty} \Lambda(t)$ той же меры.

ТЕОРЕМА 2. Для любых чисел $\alpha_1 < \alpha_2 \leq 0$ и $2 \leq n \in \mathbb{N}$ существует n -мерная система (1) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и множеством нижних характеристических векторов $\bigcup_{x \neq 0} P_x = \{p \in \mathbb{R}_-^2 : \alpha_1 \leq p_1 + p_2 \leq \alpha_2\}$ положительной плоской меры Лебега.

3. Миллионщиков В. М. “Плотность систем Ляпунова–Перрона в пространствах гладких линейных расширений динамической системы”

Ниже под $\mathbf{K}$ понимается всюду $\mathbb{R}$ или всюду $\mathbb{C}$.

Система $\dot{u} = B(t)u$, где $B(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathbf{K}^n$ — ограниченное непрерывное отображение, принадлежит классу LP , если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется (зависящее от ε) линейное преобразование $u = L(t)v$, преобразующее ее в некоторую (зависящую от ε) диагональную систему $\dot{v}_k = a_k(t)v_k$ ($k \in \{1, \dots, n\}$) с действительными диагональными коэффициентами $a_k(t) - a_{k+1}(t) \geq a(\varepsilon) > 0$ ($k \in \{1, \dots, n-1\}$) и такое, что показатель Ляпунова (при $|t| \rightarrow \infty$) функции $\|L(t)\| + \|(L(t))^{-1}\|$ меньше ε . Пусть f^t — гладкое (класса C^m) действие группы $\mathbb{R}$ на компактном гладком многообразии V класса C^m . Точка $x \in V$ удовлетворяет условию D , если существуют положительные числа k и C такие, что для всяких $t \geq 1$ и $\theta \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство $d(f^\theta x, f^{\theta+t} x) \geq Ct^{-k}$, где d — расстояние на V , индуцированное некоторой римановой метрикой на нем. Пусть $S_n^m(V)$ — множество всех отображений $A(\cdot): V \rightarrow \text{End } \mathbf{K}^n$ класса C^m , наделенное топологией равномерной сходимости их m -струй.

ТЕОРЕМА. Пусть точка $x \in V$ удовлетворяет условию D . Тогда для всякого натурального n в пространстве $S_n^m(V)$ плотны те $A(\cdot)$, для которых система $\dot{y} = A(f^t x)y$ принадлежит классу LP .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01857).

4. Сергеев И. Н. "О классах Бэра показателей Ляпунова систем, зависящих от параметра"

Если задано семейство систем

$$\dot{x} = A_\mu(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

зависящих от параметра $\mu \in \mathbb{R}$ непрерывно в смысле равномерной на полупрямой $t \in \mathbb{R}^+$ топологии, то для всякого $i \in \{1, \dots, n\}$ определена функция $\lambda_i(\mu)$, которая каждому значению μ ставит в соответствие i -й показатель Ляпунова системы A_μ .

ТЕОРЕМА. Для любых $n > 1$ и $i \in \{1, \dots, n\}$ существует семейство систем с ограниченными непрерывными коэффициентами и с показателем, задаваемым формулой

$$\lambda_i(\mu) = \begin{cases} 0, & \mu \leq 0, \\ 1, & \mu > 0, \end{cases}$$

и имеющим тем самым в точности первый класс Бэра.

5. Тонков Е. Л. (Ижевск) "Задачи управления показателями Ляпунова"

Пусть Ω – компактное метрическое пространство, f^t – поток на Ω , U – фиксированное множество в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^r$, удовлетворяющее условию $0 \in U$, $A: \Omega \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ – заданная непрерывная функция. Совокупность $\mathcal{U}$ всех измеримых функций $u: \mathbb{R}^1 \rightarrow U$ будем называть множеством допустимых управлений. Всякой паре $(\omega, u(\cdot, \omega)) \in \Omega \times \mathcal{U}$ соответствует линейное уравнение

$$(1) \quad \dot{x} = A(f^t \omega, u(t, \omega))x, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Обозначим через $\lambda_i(\omega, u)$ показатели Ляпунова уравнения (1). Уравнение (1) обладает свойством равномерной локальной управляемости показателями Ляпунова [1], если существует такое $\varepsilon > 0$, что для каждого $\omega \in \Omega$ и любого $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathcal{O}_\varepsilon$ ($\mathcal{O}_\varepsilon$ – ε -окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$) найдется допустимое управление $u_\mu(t, \omega)$, обеспечивающее равенства $\lambda_i(\omega, u_\mu) = \lambda_i(\omega, 0) + \mu_i$, $i = 1, \dots, n$.

Пусть $x_u(t, p, \omega)$ – решение уравнения (1) с начальным условием $x(0) = p$, $\mathcal{B}_\varepsilon(I)$ – замкнутая ε -окрестность единичной матрицы в пространстве квадратных матриц M_n порядка n . Будем говорить, что уравнение (1) равномерно локально достижимо, если найдутся $t > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что включение $\mathcal{B}_\varepsilon(I)x_0(t, p, \omega) \subset \bigcup_{u(\cdot)} \mathcal{U}x_u(t, p, \omega)$ имеет место для всех $\omega \in \Omega$ и всех $p \in S^{n-1}$.

ТЕОРЕМА. Пусть $A(\omega) = A_0(\omega) + u_1 A_1(\omega) + \dots + u_r A_r(\omega)$ ($A_i: \Omega \rightarrow M_n$ – непрерывны), Ω – минимальное компактное множество и уравнение (1) равномерно локально достижимо. Тогда оно обладает свойством равномерной локальной управляемости показателей Ляпунова.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00413).

[1] Попова С. Н., Тонков Е. Л. Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 226–235.

6. Ширяев К. Е. (Кострома) “О вспомогательных показателях Боля”

Для системы вида $\dot{x} = A(t)x$ (где $A(\cdot): \mathbb{R}^+ \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n$ – кусочно непрерывно и ограничено на $\mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$) рассматриваются верхний (нижний) вспомогательный показатель В. М. Миллионщикова (см. [1])

$$\bar{\nu}_k = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{sT} \sum_{i=0}^{s-1} \ln d_k X((i+1)T, iT),$$

$$\underline{\nu}_k = \underline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{sT} \sum_{i=0}^{s-1} \ln d_k X((i+1)T, iT)$$

и верхний (нижний) вспомогательный показатель Боля

$$\bar{\beta}_k = \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{T} \ln d_k X((i+1)T, iT),$$

$$\underline{\beta}_k = \underline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{T} \ln d_k X((i+1)T, iT).$$

Здесь $X(t, s)$ – оператор Коши системы; $d_k X$ – сингулярные числа оператора X , занумерованные в порядке невозрастания.

ТЕОРЕМА. Для любого k ($1 < k < n$) существуют системы, для которых

$$\bar{\beta}_k > \bar{\nu}_k > \underline{\beta}_k > \underline{\nu}_k.$$

[1] Миллионщиков В. М. // Матем. заметки. 1970. Т. 7. № 4. С. 503–513.

7. Самойленко А. М., Борисенко С. Д. (оба – Украина, Киев) “О функциональных неравенствах типа Бихари для разрывных функций”

Пусть $\mathcal{F}$ – класс непрерывных функций $\tau(s)$ ($\tau: R \rightarrow R$) таких, что $\tau(s) \leq s$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s) = +\infty$, а $\mathcal{F}_1$ – класс функций, удовлетворяющих условиям: $f \in \mathcal{F}_1 \Leftrightarrow$ а) $f(x)$ – положительная, непрерывная, неубывающая при $x > 0$; б) $\forall t > 1, u \geq 0 \Rightarrow t^{-1}f(u) \leq f(t^{-1}u)$; в) $f(0) = 0$.

ТЕОРЕМА. Пусть задано неравенство вида

$$u(x) \leq u_0 + q_1(x) \int_{x_0}^x f(s) W_1(u(p(s))) ds + q_2(x) \int_{x_0}^x g(s) W_2(u(\sigma(s))) ds + \sum_{x_0 < x_i < x} \beta_i u(x_i - 0),$$

где f, g, u – действительные неотрицательные функции, $p \in \mathcal{F}$, $\sigma \in \mathcal{F}$, u – кусочно непрерывная с разрывами I-го рода в точках $\{x_i\}$ функция ($x_1 < x_2 < \dots$, $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \infty$). Предположим, что: а) $q_i \geq 1 \quad \forall x \geq x_0^i, i = 1, 2$; б) $W_i \in \mathcal{F}_1, i = 1, 2$; в) $u_0 = \text{const} \geq 1, \beta_i = \text{const} \geq 0, i \in N$. Тогда $\forall x \geq x_0^0$ будет справедливой оценка

$$u(x) \leq q_1 q_2 G_i^{-1} \left\{ \int_{x_i}^x f(\tau) q_1(p(\tau)) d\tau \right\} \times F^{-1} \left\{ \int_{x_0}^x g(\tau) W_2[q_1(\sigma(\tau)) q_2(\sigma(\tau))] G_i^{-1} \left[\int_{x_i}^{\sigma(\tau)} f(s) q_1(p(s)) ds \right] d\tau \right\},$$

где

$$G_i(u) = \int_{C_i}^u \frac{d\sigma}{W_1(\sigma)}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad G_0(u) = \int_{u_0}^u \frac{dV}{W_1(V)},$$

$$C_i = (1 + \beta_i) G_i^{-1} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\tau) q_1(p(\tau)) d\tau \right), \quad F(u) = \int_{u_0}^u \frac{ds}{W_2(s)},$$

причем F^{-1} и G_i^{-1} – обратные к F и G_i – функции, для которых справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \text{А)} \quad & \int_{x_i}^x f(\tau) q_1(p(\tau)) d\tau \in \text{Dom}(G_i^{-1}), \quad i = 1, 2, \dots, \\ \text{Б)} \quad & \int_{x_0}^x g(\tau) W_2 \left\{ q_1(\sigma(\tau)) q_2(\sigma(\tau)) G_i^{-1} \left[\int_{x_i}^{\sigma(\tau)} f(s) q_1(p(s)) ds \right] \right\} d\tau \in \text{Dom}(F^{-1}). \end{aligned}$$

Вечернее заседание 21 января 1998 г., секция 1.

1. Бахвалов Н. С., Эглит М. Э. “Эффективные модули армированных композитов”

Выводятся математически строго обоснованные явные приближенные формулы для эффективных модулей конструкций и материалов с включениями в виде периодической системы взаимно перпендикулярных пластин и стержней, отношения толщин и модулей которых удовлетворяют некоторым условиям. В частности, получены приближенные формулы для эффективных модулей упругости таких конструкций, элементы которых составлены из локально изотропных однородных материалов.

2. Олейник О. А., Шапошникова Т. А. “Об усреднении краевых задач в перфорированных областях с непериодической структурой”

В настоящей работе рассмотрены задачи усреднения в перфорированных областях с непериодической структурой и краевыми условиями Дирихле, Неймана либо смешанного типа на границе полостей.

1°. Предположим, что имеется конечное число геометрически различных множеств вида $Y_j = Q \setminus \overline{G^j}$, $j = 1, \dots, M$; Q – единичный куб, $\overline{G^j} \subset Q$, каждая связная компонента G^j диффеоморфна шару в $\mathbb{R}^n$. Обозначим $Y_j^\varepsilon = \varepsilon Q \setminus \overline{a_\varepsilon^j G^j}$, $a_\varepsilon^j \leq \varepsilon$. Будем предполагать, что выполнено следующее соотношение:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|\partial G^j|}{(a_\varepsilon^j)^{1-n_\varepsilon n}} = C_0,$$

где $j = 1, \dots, M$; $C_0 = \text{const} > 0$, не зависящая от j , $|\partial G^j|$ – мера Лебега множества ∂G^j .

Пусть ω_ε – неограниченная область в $\mathbb{R}^n$, которую можно разбить на ячейки, причем каждая из ячеек геометрически совпадает с одним из множеств Y_j^ε , $j = 1, \dots, M$.

Пусть Ω , Ω_* – гладкие ограниченные области и $\overline{\Omega_*} \subset \Omega$. Положим $\Omega_*^\varepsilon = \Omega_* \cap \omega_\varepsilon$, $\gamma_\varepsilon = \partial\Omega_* \cap \partial\Omega_*^\varepsilon$, $\Omega_\varepsilon = (\Omega \setminus \Omega_*) \cup \overline{\Omega_*^\varepsilon} \cup \gamma_\varepsilon$, $S_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \setminus \partial\Omega$, $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \setminus S_\varepsilon$. При некоторых дополнительных предположениях на геометрию области Ω_ε изучим поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения задачи

$$(1) \quad -\Delta u_\varepsilon = f \quad \text{при } x \in \Omega_\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} + b u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } S_\varepsilon, \quad u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon, \quad b = \text{const} > 0.$$

Определим функцию $v_0(x)$ как решение задачи:

$$-\Delta v_0 = f \quad \text{в } \Omega \setminus \overline{\Omega_*}; \quad v_0 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega; \quad -\Delta v_0 + b C_0 v_0 = f \quad \text{в } \Omega_*; \quad [v_0] \Big|_{\partial\Omega_*} = \left[\frac{\partial v_0}{\partial \nu} \right] \Big|_{\partial\Omega_*} = 0.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть u_ε – обобщенное решение задачи (1). Тогда имеет место оценка

$$\|u_\varepsilon - v_0\|_{H_1(\Omega_*)}^2 \leq K \left\{ \left(\max_{1 \leq j \leq M} a_\varepsilon^j \right)^{(n-1)/2} \varepsilon^{(1-n)/2} + \max_{1 \leq j \leq M} |\mu_\varepsilon^j - C_0| + \varepsilon^{1/2} \right\}.$$

2°. Предположим, что выполнено следующее соотношение: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (a_\varepsilon^j)^{n-1} \varepsilon^{-n} = \infty$, $j = 1, \dots, M$. Пусть v_0 – решение задачи: $-\Delta v_0 = f$ при $x \in \Omega \setminus \overline{\Omega_*}$; $v_0 = 0$ на $\partial(\Omega \setminus \overline{\Omega_*})$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть u_ε – обобщенное решение задачи (1). Тогда $\|u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^*)} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\|u_\varepsilon - v_0\|_{L_2(\Omega \setminus \overline{\Omega_*})} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ и ННИО № 96-01-00033.

3. Иосифьян Г. А. “О некоторых контактных задачах для упругих тел с изрезанной поверхностью”

Рассматривается семейство областей с “изрезанной” границей, зависящих от малого параметра и приближающихся к некоторой фиксированной ограниченной области при стремлении параметра к нулю. Для упругого тела, занимающего соответствующую область, на изрезанной части границы ставятся краевые условия одного из следующих типов: а) одностороннего контакта без трения; б) двустороннего контакта с трением; в) нормального перемещения с трением. Возникающие краевые задачи сводятся к вариационным неравенствам на замкнутых выпуклых множествах в соболевском пространстве; эти неравенства могут содержать выпуклые недифференцируемые функционалы. Указываются предположения о данных задачи и геометрических характеристиках изрезанной части границы, гарантирующие наличие предельной задачи и близость решений исходных задач к решению предельной. Выясняется зависимость множества допустимых перемещений в предельной задаче от краевых условий на изрезанной части границы.

4. Лапшин Е. А., Панасенко Г. П. “Осреднение одной задачи нелинейной акустики”

Рассматривается распространение нелинейного акустического сигнала в плоскостной неоднородной среде, когда характерный размер неоднородности среды много меньше единицы. Проведено исследование асимптотического поведения решения исходной задачи. Предложено осредненное уравнение. Доказаны теоремы существования и единственности решения исходной и осредненной задач. Даны количественные оценки близости этих решений.

Рассматривается следующая система, предложенная в [1]:

$$\begin{aligned} (\nabla \psi_\varepsilon)^2 &= n^2 \left(z, \frac{z}{\varepsilon} \right), \quad z \in (0, z_0), \quad x \in \mathbb{R}, \\ \nabla \psi_\varepsilon \nabla p_\varepsilon + \frac{1}{2} \Delta \psi_\varepsilon p_\varepsilon - \frac{1}{2} p_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon \nabla \ln \rho \left(z, \frac{z}{\varepsilon} \right) - E \left(z, \frac{z}{\varepsilon} \right) p_\varepsilon \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \tau} &= 0, \\ z &\in (0, z_0), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \\ \text{где } \nabla &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \\ \psi_\varepsilon|_{z=0} &= \psi_0(x), \quad p_\varepsilon|_{z=0} = p_0(x, \tau). \end{aligned}$$

Здесь $\psi_\varepsilon(x, z)$ и $p_\varepsilon(x, z, \tau)$ – неизвестные функции; $n(z, \frac{z}{\varepsilon})$, $\rho(z, \frac{z}{\varepsilon})$, $E(z, \frac{z}{\varepsilon})$, $\psi_0(x)$, $p_0(x, \tau)$ известны; $\varepsilon \ll 1$;

$$\begin{aligned} \psi_0 &\in C^3(\mathbb{R}); \quad p_0 \in C^1(\mathbb{R}^2); \quad n, \rho, E \in C^1(\mathbb{R}_+^2); \\ \exists k_1, k_2 > 0 : k_1 &\leq n(z, \xi), \rho(z, \xi), E(z, \xi) \leq k_2; \\ \sup_{\eta \in \mathbb{R}} (\psi'_0(\eta))^2 &< \inf_{(z, \xi) \in \mathbb{R}_+^2} n^2(z, \xi). \end{aligned}$$

[1] Руденко О. В., Сухорукова А. К., Сухоруков А. П. // Акустич. журн. 1994. Т. 40. № 2. С. 290–294.

5. Пастухова С. Е. “Усреднение системы уравнений Стокса в перфорированной области с условием неполного прилипания”

Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$; Ω, F_1 – липшицевы области в $\mathbb{R}^d$, $\Omega \Subset \mathbb{R}^d$, F имеет 1-периодическую структуру; $F_\varepsilon = \varepsilon F_1$, $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap F_\varepsilon$, $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega \cap F_\varepsilon$, $S_\varepsilon = \partial F_\varepsilon \cap \Omega$; $Q = (0, 1)^d$, $F = Q \cap F_1$, $S = \partial F_1 \cap \overline{Q}$, $\text{mes}(Q \setminus F) > 0$; n, N – внешние единичные нормали к S_ε (или $\partial\Omega$) и S . В $\Omega_\varepsilon, \Omega, F$ рассмотрим 3 краевые задачи для пар функций $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$, (u, p) , (z^i, q^i) : (1) $\nabla p^\varepsilon - \nu \Delta u^\varepsilon = f$, $\nabla \cdot u^\varepsilon = 0$ в Ω_ε ; $u^\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon} = 0$; $u^\varepsilon \cdot n = 0$, $\lambda u^\varepsilon = T(u^\varepsilon, n)$ на S_ε ; (2) $\nabla \cdot u = 0$, $u = K(f - \nabla p)$ в Ω , $u \cdot n = 0$ на $\partial\Omega$; (3) $\nabla q^i - \nu \Delta z^i = e^i$, $\nabla \cdot z^i = 0$ в F ; z^i, q^i – 1-периодические, $z^i \cdot N = 0$, $B(z^i) = 0$ на S ; где $f \in L^2(\Omega)$, $\nu = \text{const} > 0$, $\lambda = \lambda(\varepsilon)$, и при $\varepsilon \rightarrow 0$ верно одно из трех: $\lambda\varepsilon \rightarrow 0$ (I), $\lambda\varepsilon \rightarrow \lambda_0 = \text{const} > 0$ (II), $\lambda\varepsilon \rightarrow \infty$ (III); $T(w, n) = 2\nu \left(\frac{\partial w}{\partial n} \cdot n \right) n - \nu e(w)n$,

$e(w)$ – тензор деформации; K имеет компоненты $K_{ij} = \int_F z_j^i dy$, где z^i – решение (3_i) ; e^i – i -й базисный вектор в $\mathbb{R}^d$, $i, j = \overline{1, d}$; $B(z)$ есть $T(z, N)$, $T(z, N) + \lambda_0 z$, $z - z \cdot N$ в случаях (I), (II), (III) соответственно. Пусть $H_\varepsilon = \{u \in H^1(\Omega_\varepsilon)^d : u|_{\Gamma_\varepsilon} = 0, u \cdot n|_{S_\varepsilon} = 0\}$.

ТЕОРЕМА. При $\varepsilon < \varepsilon_0$ задачи (1), (2) разрешимы единственным образом в пространствах $H_\varepsilon \times L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$, $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$; если $U^\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon} = u^\varepsilon$, $U^\varepsilon|_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} = 0$, то для любой $\omega \Subset \Omega$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ $U^\varepsilon/\varepsilon^2 \rightharpoonup u$ в $L^2(\Omega)^d$, $|p^\varepsilon - p|_{L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon)}/\mathbb{R} \rightarrow 0$.

С учетом (2) это означает, что усреднение задачи (1) дает закон Дарси, и тензор проницаемости K в нем определяется с помощью задачи (3_i) различным образом в случаях (I), (II), (III).

6. Чечкин Г. А. “Об усреднении краевой задачи для системы теории упругости в тонкой пластинке с быстроосциллирующей поверхностью”

Обозначим

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x_1 < a; 0 < x_2 < b; \varepsilon \varphi\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) < x_3 < k\varepsilon \right\},$$

$\Gamma_1^\varepsilon = \{x \mid x \in \overline{\Omega_\varepsilon}; x_3 = \varepsilon \varphi\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right)\}$, $\Gamma_1 = \{x \mid x \in \overline{\Omega_\varepsilon}; x_3 = 0\}$, $\Gamma_2 = \{x \mid x \in \overline{\Omega_\varepsilon}; x_3 = k\varepsilon\}$, $S_\varepsilon = \{x \mid x \in \partial\Omega_\varepsilon \setminus (\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_2)\}$. Здесь $-k < \varphi \leq 0$, $\varphi(\hat{x}, \hat{\xi})$ – гладкая функция от $\hat{x} = (x_1, x_2)$, $\hat{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, 1-периодическая по ξ_1 и ξ_2 и равная нулю для $(\hat{x}, 0)$ из фиксированной окрестности $\partial\Gamma_1$; ε – малый параметр.

Рассмотрим задачу

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{ij}^{kl}(x) \frac{\partial u_j^\varepsilon(x)}{\partial x_l} \right) = -f_i^\varepsilon(x) & \text{в } \Omega_\varepsilon, \quad u_i^\varepsilon = 0 \text{ на } S_\varepsilon, \\ a_{ij}^{3l}(x) \frac{\partial u_j^\varepsilon(x)}{\partial x_l} = 0 & \text{на } \Gamma_2, \quad a_{ij}^{kl}(x) \frac{\partial u_j^\varepsilon(x)}{\partial x_l} \nu_k^\varepsilon = g_i^\varepsilon\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}\right) \text{ на } \Gamma_1^\varepsilon \quad (i = 1, 2, 3), \end{cases}$$

где $(\nu_1^\varepsilon, \nu_2^\varepsilon, \nu_3^\varepsilon)$ – единичная внешняя нормаль к Γ_1^ε , $a_{ij}^{kl}(x)$ – ограниченные измеримые функции, причем $a_{ij}^{kl}(x) = a_{ji}^{lk}(x) = a_{il}^{kj}(x)$, $\lambda_1 \eta_{ik} \eta_{ik} \leq a_{ij}^{kl}(x) \eta_{ik} \eta_{jl} \leq \lambda_2 \eta_{ik} \eta_{ik}$ для любых симметрических матриц (η_{ik}) , $\lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$.

Сделаем замену переменных $\hat{z} := \hat{x}$, $z_3 := x_3/\varepsilon$. Обозначим через $U_i^\varepsilon(z)$ новые неизвестные функции, через ω_ε – образ области Ω_ε , через $F_i^\varepsilon(z)$ и $G_i^\varepsilon\left(\hat{z}, \frac{\hat{z}}{\varepsilon}\right)$ – соответствующие правые части уравнений и краевых условий.

ТЕОРЕМА. Пусть $F_\alpha^\varepsilon(z) = O(1)$ ($\alpha = 1, 2$), $F_3^\varepsilon(z) = O(\varepsilon^2)$, $G_\alpha^\varepsilon\left(\hat{z}, \frac{\hat{z}}{\varepsilon}\right) = O(\varepsilon)$ ($\alpha = 1, 2$), $G_3^\varepsilon\left(\hat{z}, \frac{\hat{z}}{\varepsilon}\right) = O(\varepsilon^3)$, $G_i^\varepsilon\left(\hat{z}, \frac{\hat{z}}{\varepsilon}\right)$ являются 1-периодическими по ξ_1, ξ_2 . Тогда $U_i^\varepsilon(z) \rightharpoonup U_i^0(z)$ ($i = 1, 2, 3$) слабо в $H^2(\omega_\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Функции $U_i^0(z)$ имеют вид: $U_3^0 = \mathcal{W}(\hat{z})$, $U_\alpha^0 = -z_3 \frac{\partial \mathcal{W}(\hat{z})}{\partial z_\alpha} + \mathcal{U}_\alpha(\hat{z})$ ($\alpha = 1, 2$), где $\mathcal{W} \in \overset{\circ}{H}^2(\Gamma_1)$ и $\mathcal{U}_\alpha \in \overset{\circ}{H}^1(\Gamma_1)$ определяются из явно выписываемых уравнений.

Работа выполнена совместно с Д. Чоранеску (D. Cioranescu) (Париж, Университет имени Пьера и Мари Кюри).

7. Сандраков Г. В. “Осреднение линейризованной системы уравнений гидродинамики в пористых средах”

Пусть Ω – ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^m$, F_1 – связная липшицева 1-периодическая область в $\mathbb{R}^m$, $F = (0, 1)^m \cap F_1$, $S = (0, 1)^m \cap \partial F_1$, $m \geq 2$, и $F_\varepsilon = \varepsilon F_1 = \{ \varepsilon x, x = (x_1, \dots, x_m) \in F_1 \}$, где $\varepsilon \rightarrow 0$. Меры множеств F и $(0, 1)^m \setminus F$ положительны. Определим $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap F_\varepsilon$ и рассмотрим начально-краевую задачу на $\Omega_\varepsilon \times (0, T)$:

$$(1) \quad \begin{aligned} u'_t - \nu \Delta u - \nu \eta \nabla \operatorname{div} u + \nabla p &= f, & \gamma p'_t + c_\varepsilon \operatorname{div} u &= 0, \\ u|_{\partial \Omega_\varepsilon} &= 0, & u|_{t=0} &= 0, & p|_{t=0} &= p_0, \end{aligned}$$

где $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^m)$ и $p_0 \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$. Предполагается, что положительное ν зависит от ε и ν/ε^2 стремится к ∞ или 0 при $\varepsilon \rightarrow 0$. В первом случае $c_\varepsilon = \nu/\varepsilon^2$, иначе $c_\varepsilon = 1$; остальные параметры в (1) фиксированы. В дальнейшем доопределяем u нулем на $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$.

Пусть E – единичная матрица и n, N обозначают внешние нормали для $\partial \Omega$ и S . Рассмотрим 1-периодические задачи на F :

$$-\Delta a + \nabla b = E, \quad \operatorname{div} a = 0, \quad a|_S = 0; \quad \Delta B = 0, \quad (E - \nabla B, N)|_S = 0.$$

Определим $\theta = \langle 1 \rangle$, $A_1 = \langle a \rangle$ и $A_2 = \langle E - \nabla B \rangle$, где $\langle \cdot \rangle$ – среднее по F .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon^2/\nu \rightarrow 0$; u, p – решение задачи (1). Тогда

$$\begin{aligned} (\nu/\varepsilon^2)u &\rightarrow A_1(f - \nabla q) \quad \text{слабо в } L^2(0, T; L^2(\Omega)^m), \\ p &\rightarrow q \quad \text{в норме } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где q является решением начально-краевой задачи на $\Omega \times (0, T)$:

$$\gamma \theta q'_t - \operatorname{div} A_1(\nabla q - f) = 0, \quad (A_1(\nabla q - f), n)|_{\partial \Omega} = 0, \quad q|_{t=0} = p_0.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\nu/\varepsilon^2 \rightarrow 0$; u, p – решение задачи (1). Тогда

$$\begin{aligned} u &\rightarrow A_2 \int_0^t (f - \nabla q) dt \quad \text{*слабо в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^m), \\ p &\rightarrow q \quad \text{в норме } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где q является решением начально-краевой задачи на $\Omega \times (0, T)$:

$$\gamma \theta q''_{tt} - \operatorname{div} A_2(\nabla q - f) = 0, \quad (A_2(\nabla q - f), n)|_{\partial \Omega} = 0, \quad q|_{t=0} = p_0, \quad q'_t|_{t=0} = 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01394).

8. Якубенко Т. А. “Теплопроводность пористых сред с вытянутыми порами”

Рассматривается проблема осреднения для двумерной задачи теплопроводности в анизотропной среде с периодической системой пор. Предполагается, что $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1 \ll 1$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – периоды среды в направлениях x_1, x_2 . Наличие малого параметра $1/\omega = \varepsilon_2/\varepsilon_1$ позволяет построить в явном виде приближенные решения задач на ячейке, возникающих при применении алгоритма осреднения. Получены явные приближенные формулы для эффективных коэффициентов теплопроводности пористой среды с вытянутыми порами. Даны оценки погрешности этих формул.

Вечернее заседание 21 января 1998 г., секция 2.

1. Астахова И. В. “Об асимптотическом поведении решений одномерного уравнения Шрёдингера с постоянным комплекснозначным потенциалом”

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$(1) \quad y'' + (a + bi)|y|^\gamma y = 0,$$

где $\gamma > 0$, $b \neq 0$. Приводятся асимптотические свойства его решений (ср. [1]–[3]).

ТЕОРЕМА. Любое решение уравнения (1) может быть продолжено до решения одного из следующих типов:

- 1) до единственного решения, определенного на всей числовой прямой, $y(x) \equiv 0$;
- 2) до решения, определенного на некоторой полусоси $(-\infty, x_0)$ или $(x_0, +\infty)$ и имеющего вид:

$$|y(x)| = C|x - x_0|^{-2/\gamma}, \quad \arg y(x) = W \ln |x - x_0| + \varphi_0,$$

где φ_0 – действительное число,

$$(2) \quad C = \left(\frac{4\gamma + 8}{\gamma^2(R + a)} \right)^{1/\gamma}, \quad W = \frac{(R - a)(\gamma + 4)}{2b\gamma}, \quad R = \sqrt{a^2 + \frac{8(\gamma + 2)}{(\gamma + 4)^2}b^2};$$

- 3) до решения, определенного на некотором конечном интервале (x_1, x_2) и удовлетворяющего вблизи его границ x_k , $k = 1, 2$, соотношениям:

$$|y(x)| = C|x - x_k|^{-2/\gamma}(1 + o(1)), \quad \arg y(x) = W \ln |x - x_k|(1 + o(1))$$

с константами C и W , определяемыми равенствами (2).

Обратно, для любых x_0 и φ_0 существуют оба решения второго типа, а для любых x_1 и x_2 существует решение третьего типа.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00504).

[1] Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. Асимптотическое поведение решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990.

[2] Kato T. // Israel J. Math. 1972. V. 13. P. 135–148.

[3] Brezis H., Kato T. // J. Math. Pures Appl. 1979. V. 58. P. 137–151.

2. Иванов А. Б. “О разрешимости краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка”

Рассматривается краевая задача:

$$(1) \quad y''(x) + \lambda y(x) = f(y),$$

$$(2) \quad y(a) = A, \quad y(b) = B,$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\xi)$ – непрерывная функция при $-\infty < \xi < +\infty$. Известно [1], что если $\lambda \neq \frac{\pi^2 n^2}{(b-a)^2}$, то решение (1), (2) существует для любых A и B . Изучается случай $\lambda = \frac{\pi^2 n^2}{(b-a)^2}$. Легко показать, что если f ограничена, то решения может и не быть. Если же $|f(\xi)| \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$ и $f(\xi)\xi \geq 0$ при $-\infty < \xi < +\infty$, то решение существует для любых A и B [2]. Основным результатом данной работы является следующее утверждение:

ТЕОРЕМА. Пусть

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} |f(\xi)| &= \infty, \\ f(\xi)\xi &\leq 0, \quad -\infty < \xi < +\infty, \\ |f(\xi)| &\leq c_1 + c_2|\xi|^\sigma, \quad -\infty < \xi < +\infty, \end{aligned}$$

где $0 \leq \sigma < 1$. Тогда для любых A и B существует хотя бы одно решение задачи (1), (2).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-15-96177).

[1] Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988.

[2] Иванов А. Б. // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 11. С. 1576.

З. Кигурадзе И. Т. (Грузия, Тбилиси) "К вопросу о разрешимости двухточечных сингулярных краевых задач"

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} (1) \quad & u^{(n)} = f(t, u, u', \dots, u^{(n-1)}), \\ (2) \quad & u^{(2i)}(b-) = 0 \quad (i = 0, \dots, n-m-1), \quad u^{(2j+n-2m)}(a+) = 0 \quad (j = 0, \dots, m-1), \end{aligned}$$

где $n \geq 2$, m — целая часть числа $n/2$, $-\infty < a < b < +\infty$, а $f:]a, b[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, которая не определена на гиперплоскостях $t = a$ и $t = b$ и, вообще говоря, не интегрируема относительно первого аргумента на отрезке $[a, b]$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть на $]a, b[\times \mathbb{R}^n$ соблюдается неравенство

$$f(t, x_1, \dots, x_n) \operatorname{sgn} x_{n-1} \geq - \sum_{k=1}^n h_k |x_k| - h_0(t),$$

где h_k ($k = 1, \dots, n$) — неотрицательные постоянные, а $h_0:]a, b[\rightarrow [0, +\infty[$ — непрерывная функция такие, что

$$\begin{aligned} (3) \quad & \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{(n-2m+1)(b-a)}{\pi} \right)^{n-k+1} h_k + \frac{b-a}{2(2m+2-n)} h_n < 1, \\ & \int_a^b (t-a)^{\frac{2m+1-n}{2}} (b-t)^{1/2} h_0(t) dt < +\infty. \end{aligned}$$

Тогда задача (1), (2) имеет хотя бы одно решение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть на $]a, b[\times \mathbb{R}^n$ соблюдается условие

$$[f(t, x_1, \dots, x_n) - f(t, y_1, \dots, y_n)] \operatorname{sgn}(x_{n-1} - y_{n-1}) \geq - \sum_{k=1}^n h_k |x_k - y_k|,$$

где h_k ($k = 1, \dots, n$) — неотрицательные постоянные, удовлетворяющие неравенству (3). Тогда задача (1), (2) имеет не более одного решения.

ЗАМЕЧАНИЕ. Неравенство (3) является неулучшаемым в том смысле, что в его правой части 1 нельзя заменить на $1 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.

Работа поддержана грантом 1.6/1997 АН Грузии.

4. Клоков Ю. А. (Латвия, Рига) “Об условиях Бернштейна–Нагумо в краевых задачах для сингулярных обыкновенных дифференциальных уравнений”

Рассмотрим сингулярное векторное дифференциальное уравнение

$$(1) \quad x'' + kt^{-1}x' = f(t, x, x')$$

с краевыми условиями двух типов:

$$(2) \quad x'(0) = 0, \quad x(t_1) = a;$$

$$(3) \quad x'(0) = 0, \quad x'(t_1) = b;$$

здесь $x, a, b \in \mathbb{R}^n$, $f \in C(I \times \mathbb{R}^{2n})$, $I = [0, \tau]$, $0 < t_1 \leq \tau$, $k \geq 0$.

ТЕОРЕМА 1. Для любой f и любого $M > 0$ существует $k_0 > 0$ такое, что задача (1), (2) имеет решение для любого a , $\|a\| \leq M$, если $k > k_0$.

Таким образом, увеличение параметра в уравнении (1) “благоприятно” влияет на разрешимость задачи (1), (2). В случае же задачи Неймана влияние параметра k обратное.

Рассмотрим задачу (1), (3) при $n = 1$. Пусть для некоторого $r_0 > 0$

$$(4) \quad f(t, x, r) \rightarrow +\infty \text{ при } x \rightarrow \pm\infty \text{ равномерно по } (t, r) \in I \times [-r_0, r_0].$$

Пусть, далее, для любого $m > 0$ существует $B > 0$ такое, что

$$(5) \quad |f(t, x, y)| \leq B(1 + |y|)^p \text{ при } |x| \leq m, (t, y) \in I \times \mathbb{R}, \text{ где } p \geq 0.$$

Если $p \leq 2$, то выполнено условие Бернштейна, и задача (1), (2) разрешима. Если же $p > 2$, то эта задача может не иметь решения (примеры легко строятся). Однако справедлив следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Рассмотрим уравнение

$$(6) \quad x'' + kt^{-1}x' = f(t, x, x') + c|x'|^\gamma,$$

где f удовлетворяет условиям (4) и (5), $k \geq 0$, $c \neq 0$ и $p \in [0, \infty)$. Задача (6), (3) разрешима для любых $(t_1, b) \in (0, \tau] \times \mathbb{R}$, если $\gamma > p$.

5. Кудрявцев Л. Д. “Начальные задачи с данными в бесконечно удаленной точке”

Рассматриваются задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, когда начальные условия задаются в бесконечно удаленной точке в виде некоторой функции, к которой в каком-то смысле приближается искомое решение. Возникают три вопроса: 1) в каком смысле следует понимать приближение; 2) имеют ли место теоремы существования, единственности и устойчивости решений; 3) какие функции для данного уравнения следует выбирать в качестве начальных данных.

Для уравнения $x^{(m+1)}(t) = f(t, x, x', \dots, x^{(m)})$ получены теоремы существования, единственности и устойчивости решений, асимптотически приближающихся при $t \rightarrow +\infty$ к заданному многочлену степени $\leq m$. Для системы уравнений $x'(t) = f(t, x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ выясняется, когда все ее решения асимптотически приближаются к вектор-многочленам не выше данной степени.

Для системы $Lx(t) = f(t, x)$, $L = \frac{d}{dt} + A(t)$, $A(t): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, вводится понятие L -асимптотического приближения $x(t) \underset{L}{\sim} v(t)$ функции $x(t)$ к функции $v(t) \in \ker L$. Доказываются теоремы существования и единственности решения $x(t) \underset{L}{\sim} v(t)$ при заданной $v(t)$. Выясняются условия, когда все решения системы L -асимптотически приближаются к функциям ядра $\ker L$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00243) и Фонда господдержки научных школ РФ (грант № 96-15-96102).

[1] Кудрявцев Л. Д. // Докл. АН. 1997. Т. 354. № 2. С. 162–164.

[2] Кудрявцев Л. Д. // Докл. АН. 1997. Т. 355. № 6. С. 734–736.

6. Матросов И. В. "Оценки решений в критических случаях теории устойчивости"

Рассматривается система дифференциальных уравнений:

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + X(x, y), \quad \dot{y} = By + Y(x, y),$$

где $A - 2 \times 2$ -матрица с собственными числами с $\operatorname{Re} \kappa_i = 0$; $B - (n \times n)$ -матрица с $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$; $X(x, y), Y(x, y) = O(|x|^2 + |y|^2)_{|x|^2 + |y|^2 \rightarrow 0}$ — аналитические функции. Для системы $\dot{x} = Ax + \bar{X}(x)$ при любой аналитической функции $\bar{X}(x) = O(|x|^2)$ найдены: а) оценки $c_{1i} t^{\gamma_i} \leq |x_i(t)| \leq c_{2i} t^{\gamma_i}$; б) порядок $N + 1$ возмущений системы, сохраняющих эти оценки.

Для нахождения порядка стремления к 0 решений системы (1) предлагается следующий алгоритм.

1°. Приводим матрицу B к жордановой форме.

2°. Для $Y(x, 0)$ находим m_l с $l = 1$: $Y(x, 0) = O(|x|^{m_l})$ при $x \rightarrow 0$.

3°. Для $\dot{x} = Ax + X(x, 0)$ находим порядок возмущений $N + 1$.

4°. Если $m_l < N$, то коэффициенты $u_i^{(m_l)}$ однородной вектор-формы однозначно определяются из линейной системы уравнений

$$\lambda_i u_i^{(m_l)} - \sum_{j=1}^k \frac{\partial u_j^{(m_l)}}{\partial x_j} A_j x = -Y_i(x, 0) + \beta_i u_{i+1}^{(m_l)} + O(|x|^{m_l+1}), \quad i = n, \dots, 1,$$

где $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ — наддиагональные элементы B . В системе (1) делаем замену $y = \tilde{y} + u^{(m_l)}$, $m_l + 1$ находим из условия $\tilde{Y}(x, 0) = O(|x|^{m_l+1})$, систему (1) заменяем преобразованной. Переходим к шагу 3°.

5°. Если $m_l \geq N$, то порядок стремления к нулю компонент x решения системы (1) ищем по методу б), см. выше, с функцией $\bar{X} = X(x, 0)$.

6°. Оценку для y получаем подстановкой $x_i = c_{2i} t^{\gamma_i}$ в формулу

$$y = u^{(m_1)}(x) + \dots + u^{(m_l)}(x) + O(|x|^{m_l+1}).$$

Даны условия применимости алгоритма.

7. Белых В. Н. (Нижегород) "Отображение с особенностями и бифуркации странных аттракторов"

Рассматриваются разрывные отображения последования Пуанкаре, моделирующие потоки гладких динамических систем со многими седловыми состояниями равновесия и сложными гомо- гетероклиническими связками. Пусть в $\mathbb{R}^{n+1}$ задана секущая G , состоящая из конечного числа p непересекающихся шаров и (или) цилиндров D_i с локальными координатами $x_i \in \mathbb{R}^1$, $y_i \in \mathbb{R}^n (S^1 \times \mathbb{R}^{n-1})$. Пусть на G задано отображение $T: G \rightarrow M$ такое, что $t_i^{+(-)} = T|_{D_i(x_i > 0 (< 0))}: D_i \rightarrow d_i^{+(-)}; t_i^{+(-)}: (x_i, y_i) \rightarrow (|x_i|^\nu, R(x_i)|x_i|^\alpha y_i)$ для шаров и $(x_i, \varphi_i) \rightarrow (|x_i|^\nu \cos(\varphi_i - \omega \ln |x_i|), |x_i|^\nu \sin(\varphi_i - \omega \ln |x_i|))$, где $\varphi_i = y_{1j}$, для цилиндров; $M = \bigcup_{i=1}^p d_i^{+(-)}$. Пусть диффеоморфизм $S: M \rightarrow G$ такой, что $s_j^{+(-)} = S|_{d_i^{+(-)}}: d_i^{+(-)} \rightarrow D_j$.

Тогда композиция $f = S \circ T: G \rightarrow G$ представляет семейство рассматриваемых отображений с особенностями. В предположении $fG \subset G$ обсуждаются свойства странных аттракторов отображения f и их бифуркации. Основной пример — отображение в расширенной окрестности седло-фокуса с двумя гомоклиническими орбитами [1]:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= -\pi/2 + (\pi/2 + a|x|^\nu \cos(\varphi - \omega \ln |x|)) \operatorname{sgn} x, \\ \bar{x} &= \mu_1 \operatorname{sgn} x - a|x|^\nu \sin(\varphi - \omega \ln |x|), \\ \bar{y} &= \mu_2 \operatorname{sgn} x + R(x)|x|^\alpha y, \end{aligned}$$

имеющее при $\|R\| < 1, 0 < \nu < 1/2$ "дикий" странный аттрактор.

[1] Belykh V. N. // Int. Conference on Control of Oscillations and Chaos, St. Petersburg. Proceedings. V. 1, 1997. P. 105–108.

Вечернее заседание 21 января 1998 г., секция 3.

1. Константинов А. Ю. (Украина, Киев) “Спектральный анализ матричных дифференциальных операторов смешанного порядка”

В докладе развиваются результаты [1]. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{H} = (L_2(\mathbb{R}^n))^n L_2(\mathbb{R}^n)$ самосопряженные операторы вида

$$H = \begin{pmatrix} -\Delta + q & -\operatorname{grad} b + v \\ \bar{b} \operatorname{div} + v^* & h \end{pmatrix}, \quad H_0 = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & h_0 \end{pmatrix}.$$

Здесь h – вещественная, b – комплексная функции на $\mathbb{R}^n$; q, v – функции, значениями которых являются соответственно эрмитовы матрицы размера $n \times n$ и комплексные матрицы размера $n \times 1$; v^* – матрица, сопряженная к v ; $h_0 = h - |b|^2$. Предполагается, что b, v, h – функции класса C^2 , ограниченные вместе с первыми и вторыми производными, и множество $\tau(h_0)$ пороговых значений функции h_0 (см. [1]) не более чем счетно. Положим $\tau = \tau(h_0) \cup \{0\}$.

ТЕОРЕМА. *Предположим, что $\bar{b}(x)v(x) \in \mathbb{R}^n$ для $x \in \mathbb{R}^n$ и для некоторых $c > 0$, $\varepsilon > 0$*

$$|q(x)| + |b(x)| + |v(x)| + |b'(x)|^2 + |v'(x)|^2 \leq c(1 + |x|)^{-1-\varepsilon}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда

- (а) для пары H, H_0 существуют полные волновые операторы;
- (б) оператор H не имеет сингулярного непрерывного спектра;
- (в) собственные значения H , не принадлежащие τ , конечнократны и не могут иметь (конечных) точек накопления вне τ .

[1] Константинов А. Ю. // Функци. анализ и его прил. 1997. Т. 31. № 3. С. 77–80.

2. Копачевский Н. Д. (Украина, Симферополь) “Спектральные вопросы теории колебаний релаксирующей жидкости”

Рассматривается задача о нормальных (пропорциональных $e^{-\lambda t}$) колебаний идеальной вертикально стратифицированной жидкости, заполняющей произвольную область Ω . Жидкость считается релаксирующей с уравнением состояния

$$p(t, x) = a_\infty^2(x) \rho(t, x) - \int_0^t K_0(x) e^{-\tau(t-s)} \rho(s, x) ds,$$

где $\rho(t, x)$ и $p(t, x)$ – отклонения полей плотности и давления от их равновесных значений, $a_\infty(x)$ – скорость звука, $0 < \tau \ll 1$ – время релаксации.

Методами [1] задача сводится к спектральной задаче

$$(1) \quad L(\lambda)v := [\lambda^2(1 - \tau\lambda)A - \lambda\tau I + B]v = 0, \quad v \in L_2(\Omega),$$

для кубического операторного пучка $L(\lambda)$, $A = a_\infty^{-1}(x)A_0a_\infty^{-1}(x)$, $0 < A_0 \in \mathfrak{S}_\infty$, $Bv = \alpha(\tau, x)v$, $0 < \alpha_-(\tau) \leq \alpha(\tau, x) = 1 - \tau K_0(x)/a_\infty^2(x) \leq \alpha_+(\tau) < 1$.

ТЕОРЕМА. *Спектр задачи (1) состоит из двух множеств:*

- 1°) *двух ветвей дискретного спектра $\{\lambda_k^\pm\}_{k=1}^\infty$, примаыкающих к мнимым полюсам и имеющих предельную точку $\lambda = \infty$; система корневых элементов задачи (1), отвечающая $\{\lambda_k^\pm\}_{k=1}^\infty$, двукратно полна (с точностью до конечного дефекта) в $L_2(\Omega)$;*
- 2°) *предельного спектра в виде отрезка $[\alpha_-(\tau)/\tau, \alpha_+(\tau)/\tau] \subset \mathbb{R}_+$ и дискретного спектра на $(\alpha_+(\tau)/\tau, 1/\tau) \subset \mathbb{R}_+$, состоящего из конечного или счетного множества с предельными точками на $[\alpha_-(\tau)/\tau, \alpha_+(\tau)/\tau]$ (волны релаксации).*

[1] Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуи Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. М.: Наука, 1989.

3. Костюченко А. Г., Мирзоев К. А. “Обобщенные матрицы Якоби и индексы дефекта обыкновенных дифференциальных операторов”

Пусть l_p^2 – гильбертово пространство последовательностей $u = (u_0, u_1, \dots)$, $u_j \in \mathbf{C}^p$ со скалярным произведением $(u, v) = \sum_{j=0}^{+\infty} v_j^* u_j$, где знак $*$ означает сопряженную матрицу, а $y^* x$ – скалярное произведение элементов x и y в $\mathbf{C}^p$. Бесконечную матрицу $\mathbf{C}_n$ с матричными элементами C_{ij} , $(i, j = 0, 1, \dots)$ размерности $p \times p$ назовем обобщенной якобиевой матрицей порядка $2n$, если $C_{ij} = C_{ij}^*$, $C_{ij} = 0$ при $|i - j| > n$ и $C_{i, i+n} \neq 0$, где 0 – нулевая матрица. Через $\mathbf{C}_m^{(0)}$ обозначим обобщенную якобиеву матрицу с элементами $C_{ij} = 0$ при $i - j \neq m$ и $C_{i, i+m} = B_i$, где B_i – последовательность обратимых матриц порядка p , а через $\mathbf{L}_n$ – минимальный замкнутый оператор, порожденный якобиевой матрицей $\mathbf{C}_n$ в пространстве l_p^2 .

ТЕОРЕМА. Пусть $\mathbf{C}_n = \mathbf{C}_m^{(0)} + \mathbf{C}_n^{(1)}$, где элементы B_j матрицы $\mathbf{C}_m^{(0)}$ таковы, что

$$\|B_{j-m}\| \|B_{j+m}\| \leq \|B_j^{-1}\|^{-2}, \quad \sum_{j=0}^{+\infty} \|B_j^{-1}\| < +\infty,$$

а элементы $C_{ij}^{(1)}$ матрицы $\mathbf{C}_n^{(1)}$ ограничены: $\|C_{ij}\| \leq M$ при некотором $M > 0$. Тогда дефектные числа оператора $\mathbf{L}_n$ равны числу m .

Эта теорема является обобщением известной теоремы Ю. М. Березанского и позволяет найти дефектные числа некоторых дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами в $L_2(-\infty, +\infty)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 96-15-96091, № 96-01-00333).

4. Лесч М. (Германия, Берлин), Маламуд М. М. (Украина, Донецк) “Обратная спектральная задача для систем на полуоси”

Рассмотрим на полуоси $\mathbb{R}_+$ систему дифференциальных уравнений

$$(1) \quad Ly := (-iBd/dx + Q(x))y = \lambda y, \quad y = \text{colon}(y_1, y_2)$$

с непрерывной матрицей-функцией $Q = Q^*: \mathbb{R}_+ \rightarrow M(2n, \mathbb{C})$, имеющей нулевую диагональ, и невырожденной диагональной матрицей $B = \text{diag}(B_1, -B_2)$, где $B_i \in M(n, \mathbb{C})$, $B_i > 0$. Здесь y_1, y_2 – n -мерные вектор-функции из компонент вектора y .

Пусть L_H – оператор, порожденный в $L_2(0, \infty) \otimes \mathbb{C}^{2n}$ уравнением (1) и условиями

$$(2) \quad y_2(0) = Hy_1(0), \quad H \in M(n, \mathbb{C}).$$

Оператор L_H самосопряжен точно тогда, когда $B_1 = H^* B_2 H$.

ТЕОРЕМА. Пусть $\sigma_0(\lambda) = (2\pi B_1)^{-1} \lambda$. Для того чтобы монотонная $(n \times n)$ матрица-функция $\sigma(\lambda): \mathbb{R} \rightarrow M(n, \mathbb{C})$ была спектральной функцией задачи (1), (2) с непрерывной $Q(x) = Q^*(x)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

а) Пусть $g \in L_{\text{comp}}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{2n})$ и

$$G_0(\lambda) := \int_{\mathbb{R}_+} e_0(x, \lambda)^* g(x) dx, \quad e_0(x, \lambda) = e^{-i\lambda B^{-1}x} \begin{pmatrix} I_n \\ H \end{pmatrix}.$$

Тогда верна импликация

$$\int_{\mathbb{R}} G_0^*(\lambda) d\sigma(\lambda) G_0(\lambda) = 0 \Rightarrow g = 0.$$

б) Матрица-функция

$$\tilde{F}(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{e}_0(x, \lambda) d(\sigma(\lambda) - \sigma_0(\lambda)) \tilde{e}_0(t, \lambda)^*, \quad \tilde{e}_0(x, \lambda) := \int_0^x e_0(t, \lambda) dt$$

существует и имеет вторую смешанную производную $D_x D_t \tilde{F}(x, t) =: F(x, t)$.

Для системы Дирака ($B_1 = -B_2 = I_n$) – это результат Гасимова–Левитана.

5. Серебряков В. П. “Аналоги теорем о предельной точке в случае матричных дифференциальных операторов”

На полуоси $I = [0, \infty)$ рассматривается (вообще говоря, несамосопряженная) система дифференциальных уравнений $(p_i(x)y'_i)' = \sum_{j=1}^n q_{i,j}(x)y_j$ ($i = 1, \dots, n$), где функции $\{p_i(x)\}^{-1}$ и $q_{i,j}(x)$ локально суммируемы на I и действительнзначны. Положим

$$q_{i,i}^-(x) = -\min\{q_{i,i}(x), 0\}, \quad q_{i,i}^+(x) = q_{i,i}(x) + q_{i,i}^-(x), \quad s_i(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \{p_i(x)\}^{-1} dx.$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА. Пусть $1 \leq p < \infty$ и существует последовательность попарно непересекающихся интервалов $I_m = (a_m, b_m) \subset I$ ($m = 1, 2, \dots$) такая, что: 1) почти всюду (п.в.) на $\bigcup I_m$ функции $p_i(x)$ положительны; 2) все недиагональные элементы матрицы $\hat{Q}(x) = GQ(x)G$ неотрицательны п.в. на $\bigcup I_m$, где $Q(x) = (q_{i,j}(x))_{i,j=1}^n$, а G – некоторая диагональная матрица n -го порядка, у которой по главной диагонали могут стоять только 1 и -1 ; 3) имеет место неравенство

$$\alpha_{i,m} = 4 - s_i(a_m b_m) \int_{I_m} q_{i,i}^-(x) dx > 0 \quad (i = 1, \dots, n; m = 1, 2, \dots);$$

4) найдется пара индексов i, j , для которых п.в. на I_m $p_i(x) \geq M_m$, $p_j(x) \geq N_m$ и ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} (b_m - a_m)^{1-p} \left\{ M_m N_m \alpha_{i,m} \alpha_{j,m} \int_{I_m} \{s_i(x, b_m) s_j(a_m, x)\}^2 \theta_{i,j}(x) dx \right\}^{p/2}$$

расходится, где M_m, N_m – положительные константы, $\theta_{i,j}(x) = q_{i,i}^+(x)$ при $i = j$, $\theta_{i,j}(x) = |q_{i,j}(x)|$ при $i \neq j$. Тогда хотя бы одна из систем – рассматриваемая или сопряженная с ней – имеет решение, не принадлежащее пространству $L^p(I)$.

6. Троицкая С. Д. “О непрерывном спектре задачи Соболева”

Пусть $G \in \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с кусочно гладкой поверхностью, удовлетворяющая условию конуса, S – подпространство пространства $L_2^3(G) := \{\vec{U} = (u_1, u_2, u_3), u_i \in L_2(G)\}$ (с естественным скалярным произведением), являющееся замыканием множества $S_0 := \{\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \varphi_i \in C_0^\infty(G), \nabla \vec{\varphi} = 0\}$ соленоидальных векторов, а P – оператор ортогонального проектирования на S . Рассмотрим оператор Соболева $B: S \rightarrow S$, определяемый формулой $B\vec{U} = P(\vec{U} \times \vec{k})$, где $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Известно, что спектр $\sigma(iB) = [-1, 1]$ для произвольной G , структура же спектра оператора B , с которой тесно связано поведение решений задачи Соболева о вращающейся жидкости, зависит от конфигурации G . Пусть G – область, “заметаемая” при вращении вокруг оси Oz двумерной области $D := \{(x, z) : 0 < c < x < d, 0 < \alpha_1(x) < z < \alpha_2(x)\}$, где $\alpha_i(x)$ – гладкие функции, заданные на $[c - \varepsilon, d + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, такие, что либо $\alpha_1(c) = \alpha_2(c)$, $\alpha'_1(c) \neq \alpha'_2(c)$, либо $\alpha_1(d) = \alpha_2(d)$, $\alpha'_1(d) \neq \alpha'_2(d)$. В [1] приведено разложение пространства S в бесконечную ортогональную сумму подпространств S_k , инвариантных относительно B и таких, что спектр каждого из операторов $iB_k := iB|S_k$ совпадает со всем отрезком $[-1, 1]$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $M := \max_{c \leq x \leq d} \{|\alpha'_i(x)|, i = 1, 2\}$. Для любого $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, любого $\delta > 0$ точечный спектр $\sigma_P(iB_k) \cap \{(-1/\sqrt{1+M^2} + \delta, -\delta) \cup (\delta, 1/\sqrt{1+M^2} - \delta)\}$ либо пуст, либо состоит из конечного множества собственных значений кратности 1.

Работа поддержана Программой поддержки научных школ (грант № 96-15-96091).

[1] Троицкая С. Д. // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 2. С. 304–309.

7. Шондин Ю. Г. (Нижний Новгород) “Сингулярные возмущения нечетного оператора в $\mathbb{Z}_2$ -градуированном пространстве Понтрягина”

Пусть S – нечетный эрмитов оператор с индексом дефекта $(1, 1)$ в $\mathbb{Z}_2$ -градуированном пространстве Понтрягина $\Pi_m = \Pi^+ \oplus \Pi^-$, разложенном на четные и нечетные подпространства по отношению к оператору четности τ : τ самосопряжен и $\tau^2 = 1$.

ТЕОРЕМА 1. *Существуют в точности два нечетных канонических самосопряженных расширения A_1, A_2 оператора S , резольвенты которых связаны формулой Крейна*

$$(A_2 - z)^{-1} = (A_1 - z)^{-1} - \Gamma_z M(z)^{-1} \Gamma_z^*, \quad z \in \rho(A_1) \cap \rho(A_2),$$

где Q -функция $M(z)$, соответствующая S и A_1 , характеризуется свойствами:

1) $M(z) \in N_m(\mathbb{C})$ и 2) $M(-z) = -M(z)$.

Квадрат A_j^2 , $j = 1, 2$, каждого из этих операторов четен и представляется в виде $A_j^2 = \text{diag}(A_j^+, A_j^-)$. Для $iy \in \rho(A)$ зафиксируем знак τ : $\tau \Gamma_{iy} = -\Gamma_{-iy}$ и обозначим

$$\Gamma_+ = \frac{1}{2iy}(\Gamma_{iy} - \Gamma_{-iy}), \quad \Gamma_- = \frac{1}{2}(\Gamma_{iy} + \Gamma_{-iy}).$$

ТЕОРЕМА 2. *Каждая из пар $\{A_1^+, A_2^+\}$ и $\{A_1^-, A_2^-\}$ является парой канонических расширений соответствующего эрмитова оператора $S^\pm$ в $\Pi^\pm$ – одномерного сужения $A_1^\pm$ на $\text{dom}(S^\pm) = \{(f, f') \in A_1^2 \mid \Gamma_\pm^*(f' + y^2 f) = 0\}$. Резольвенты для каждой пары связаны формулой Крейна, причем в знаменателях стоят соответствующие Q -функции $M_\pm(z)$, определяемые по правилу*

$$M_+(w) = (z^{-1} M(z))|_{w=z^2}, \quad M_-(w) = (zM(z))|_{w=z^2}.$$

Приведенные результаты уточняются в приложениях к сингулярным возмущениям нечетного самосопряженного дифференциального оператора A_0 типа оператора Дирака в $\mathbb{Z}_2$ -градуированном гильбертовом пространстве.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00716).

8. Юркин М. Ю. “ J – самосопряженность линейаризованного уравнения Эйлера на алгебре Ли”

Рассмотрим полупростую конечномерную вещественную алгебру Ли $\mathcal{H}$ с коммутатором $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{H}}$, которая в то же время является вещественным евклидовым пространством со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$. Пусть $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ – инвариантная квадратичная форма и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}} = (A \cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$, где A – оператор инерции. Рассмотрим алгебру Ли $\mathcal{F}$, являющуюся прямой суммой $\mathcal{H}$ и алгебры Ли $\mathcal{G}$, которая может быть бесконечномерной. Элементы $\mathcal{F}$ запишем в виде $(h, g)^t$. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{G}}$ – скалярное произведение в $\mathcal{G}$. Введем скалярное произведение в $\mathcal{F} = \mathcal{H} \dot{+} \mathcal{G}$ по формуле $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{F}} = (\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}} + \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{G}}$, и пусть $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & I \end{pmatrix}$ – самосопряженный ограниченный, положительный относительно этого скалярного произведения оператор. Уравнением Эйлера на $\mathcal{F}$ называется уравнение $\dot{f} = \mathbf{B}(f, f)$, где $\mathbf{B}(\cdot, \cdot)$ – билинейная операция, определенная тождеством $\langle \mathbf{B}(c, a), \mathbf{A}b \rangle_{\mathcal{F}} \equiv \langle [a, b]_{\mathcal{F}}, \mathbf{A}c \rangle_{\mathcal{F}}$ при любых a, b, c из $\mathcal{F}$.

ТЕОРЕМА. *Пусть e – собственный вектор оператора A и λ – соответствующее собственное значение. Тогда элемент $(e, 0)^t$ есть стационарное решение уравнения Эйлера на $\mathcal{F}$, а линейаризация около этого решения представляется в виде $\dot{f} = \mathbf{M}f$, где оператор $\mathbf{M}$ – симметрический в пространстве Понтрягина Π_{κ} с индексом κ , равным числу отрицательных квадратов квадратичной формы $((\lambda I - A) \cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-15-96091, № 96-01-00333) и Международного научного фонда (грант ISSEP a97-1559).

Утреннее заседание 22 января 1998 г., секция 1.

1. Борисов Д. И., Гадыльшин Р. Р. (оба — Уфа) “О лапласиане с быстро и квазипериодически изменяющимся типом граничных условий”

Пусть Γ — граница круга единичного радиуса с центром в начале координат, (r, θ) — полярные координаты, $\omega_\varepsilon = \{(r, \theta) : r = 1, -\varepsilon \frac{\pi}{2} < \theta < \varepsilon \frac{\pi}{2}\}$, $\delta_\varepsilon \subset \omega_\varepsilon$, $\varepsilon = 2N^{-1}$, где $N \gg 1$ — целое число. Обозначим $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \setminus \overline{\gamma_\varepsilon}$, где γ_ε — объединение частей границ, получающихся из δ_ε сдвигами, кратными $\varepsilon\pi$. Для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, являющейся образом единичного круга при отображении $\mathcal{P} \in C^\infty$, под квазипериодическим типом граничных условий (г.у.) будем понимать случай, когда на $\mathcal{P}(\Gamma_\varepsilon)$ задается г.у. Неймана, а на $\mathcal{P}(\gamma_\varepsilon)$ — г.у. Дирихле. Пусть $s = s(t)$ — длина образа дуги $\{r = 1, 0 < \theta < t\}$, а $\theta(s)$ — обратная функция к $s(\theta)$. Доказана

ТЕОРЕМА. Пусть выполнено одно из условий: 1) $a(\varepsilon) > c > 0$ или $a(\varepsilon)$ стремится к нулю не более чем степенным образом, 2) $a(\varepsilon) = \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon^2 A}\right\}$, где $A > 0$, 3) $a(\varepsilon) = \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon A}\right\}$. Тогда предельными краевыми задачами для $-\Delta$ в Ω с квазипериодическими г.у. являются: 1) задача Дирихле, 2) задача Неймана, 3) задача Робена с граничным оператором $(\partial/\partial\nu + A\theta'(s))$, а асимптотики собственных значений (с.з.) λ_ε , сходящихся к простым с.з. λ_0 предельных задач, имеют вид:

$$\begin{aligned} 1) \quad \lambda_\varepsilon &\sim \lambda_0 + \varepsilon \ln \sin a \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial\psi_0}{\partial\nu}\right)^2 \frac{ds}{\theta'(s)}, & 2) \quad \lambda_\varepsilon &\sim \lambda_0 + \varepsilon A \int_{\partial\Omega} \psi_0^2(s) \theta'(s) ds, \\ 3) \quad \lambda_\varepsilon &\sim \lambda_0 - \varepsilon^3 \frac{A^2 \zeta(3)}{8} \int_{\partial\Omega} (\lambda_0 \psi_0^2(s) + 2(\psi_0'(s))^2) \frac{ds}{\theta'(s)}, \end{aligned}$$

где ψ_0 — нормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции предельных задач, а $\zeta(t)$ — дзета-функция Римана.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00501).

2. Денисов В. Н. “О стабилизации решений задачи Коши для параболических уравнений, заданных на сетках”

На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим обычную квадратную сетку с естественной линейной мерой μ . Определим на сетке оператор Лапласа (см. [1]) и рассмотрим задачу Коши

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_\mu u, \quad u|_{t=0} = \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная и периодическая на сетке функция. Наряду с задачей (1) рассмотрим обычную задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$(2) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v, \quad v|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x),$$

где $\tilde{\varphi}(x)$ задана всюду в $\mathbb{R}^2$, непрерывна и периодична в $\mathbb{R}^2$ и является восполнением функции $\varphi(x)$.

ТЕОРЕМА. Если функции $\varphi(x)$ и $\tilde{\varphi}(x)$ удовлетворяют условию

$$\int_{\square} \varphi(x) d\mu = \int_{\square} \tilde{\varphi}(x) dx,$$

где $\square$ — ячейка периодичности, то решения задач Коши (1), (2) обладают свойством равностабилизированности [2]:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |u(x, t) - v(x, t)| = 0$$

в каждой точке $x \in \mathbb{R}^2$.

Аналогичный результат имеет место, когда на сетке в $\mathbb{R}^N$ определен параболический оператор дивергентного типа с периодическими коэффициентами и $N \geq 2$.

[1] Жиков В. В. // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 8. С. 3–40.

[2] Денисов В. Н. // Докл. АН. 1995. Т. 340. № 6. С. 736–738.

З. Райтумс У. (Латвия, Рига) “Эффективные расширения задач оптимального управления для одного эллиптического уравнения”

Рассматривается задача оптимального расположения материалов

$$(1) \quad I(u) \rightarrow \min, \quad \operatorname{div} A \nabla u = f \quad \text{в } \Omega, \quad A \in M, \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная липшицева область, а

$$M = \left\{ A \mid A(x) = \theta_1(x)R_1(x)A_1R_1^*(x) + \dots + \theta_N(x)R_N(x)A_NR_N^*(x), \right. \\ \left. \theta_i(x) = 0 \text{ или } 1, \theta_1(x) + \dots + \theta_N(x) = 1, R_i^*(x) = R_i^{-1}(x) \text{ для п.в. } x \in \Omega, \right. \\ \left. \int_{\Omega} \theta_i(x) dx \leq d_i, i = 1, \dots, N \right\}.$$

Положительно определенные симметрические постоянные матрицы A_i и числа d_i , $i = 1, \dots, N$, заданы. Пусть

$$M_* = \left\{ A \mid \lambda_1(A)(x) \leq \lambda_n(A)(x), (\lambda_1(A)(x))^{-1}, \lambda_n(A)(x) \right. \\ \left. \leq \left(\sum_{i=1}^N p_i(x) \lambda_1(A_i)^{-1}, \sum_{i=1}^N p_i(x) \lambda_n(A_i) \right), p_i(x) \geq 0, \right. \\ \left. \int_{\Omega} p_i(x) dx \leq d_i, i = 1, \dots, N, p_1(x) + \dots + p_N(x) = 1 \text{ для п.в. } x \in \Omega \right\},$$

где через $\lambda_j(A)(x)$ обозначаются собственные значения матрицы A в точке x , упорядоченные в порядке возрастания, а $(a, b) \leq (a', b')$ означает, что $a \leq a'$ и $b \leq b'$.

ТЕОРЕМА. Для любых фиксированных $f \in H^{-1}(\Omega)$ и слабо непрерывного на $H_0^1(\Omega)$ функционала I задача

$$(2) \quad I(u) \rightarrow \min, \quad \operatorname{div} A \nabla u = f \quad \text{в } \Omega, \quad A \in M_*, \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

имеет решение, и задача (2) является расширением задачи (1) в смысле [1].

[1] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. // Труды ММО. 1968. Т. 18. С. 187–245.

4. Амосов А. А. (Москва) “О слабой сходимости одного класса быстроосциллирующих функций”

Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^N$, $Y = [0, 1]^N$, а функция $f(x, y)$ задана на $\Omega \times \mathbb{R}^N$ и удовлетворяет по y условию 1-периодичности. Для математической теории гомогенизации, особенно в связи с изучаемой в последнее время двухмасштабной сходимостью [1], весьма важным является выделение классов функций f , для которых суперпозиции $f^\varepsilon(x) \equiv f(x, x/\varepsilon)$ измеримы на Ω при всех $\varepsilon > 0$ и слабо сходятся при $\varepsilon \rightarrow 0^+$ к среднему по переменной y значению $\langle f \rangle(x) \equiv \int_Y f(x, y) dy$.

Установлен следующий новый результат [2], играющий важную роль при обосновании осреднения уравнений одномерного движения вязкого газа с негладкими быстроосциллирующими данными [3].

ТЕОРЕМА. Пусть $f \in L_p(\Omega; L_\infty^{\sharp}(Y))$ для некоторого $p \in [1, \infty]$ и $f^\varepsilon(x) \equiv \lim \operatorname{ar}_{y \rightarrow x/\varepsilon} f(x, y)$, где $\lim \operatorname{ar}$ – аппроксимативный предел. Тогда $f^\varepsilon \in L_p(\Omega)$, причем $\|f^\varepsilon\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega; L_\infty^{\sharp}(Y))}$. Кроме того, $f^\varepsilon \rightarrow \langle f \rangle$ слабо в $L_p(\Omega)$ для $p \in [1, \infty)$ и *-слабо в $L_\infty(\Omega)$ для $p = \infty$. В случае $p \in [1, \infty)$ справедливо также свойство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} |f^\varepsilon(x)|^p dx = \int_{\Omega \times Y} |f(x, y)|^p dx dy.$$

Здесь $L_\infty^{\sharp}(Y)$ – банахово пространство заданных на $\mathbb{R}^N$ измеримых 1-периодических функций с конечной нормой $\|\cdot\|_{L_\infty^{\sharp}(Y)} = \|\cdot\|_{L_\infty(Y)}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96-01-00621 и 97-01-00214).

[1] Allaire G. // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23. P. 1482–1518.

[2] Амосов А. А. // Матем. заметки. 1997. Т. 62. №1. С. 145–150.

[3] Амосов А. А., Злотник А. А. // Докл. АН. 1997. Т. 354. №4. С. 439–442.

5. Ильин А. М., Леликова Е. Ф. (оба – Екатеринбург) “Асимптотика решений сингулярных задач при больших значениях времени”

Начальная задача для простейшего уравнения

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2 u = \varepsilon f\left(u, \frac{du}{dt}\right), \quad u(0) = a, \quad \frac{du}{dt}(0) = b, \quad \varepsilon > 0,$$

при малых $\varepsilon > 0$ фактически является сингулярной, если рассматривать большие значения t . Регулярный ряд по степеням малого параметра ε для решения этой задачи, вообще говоря, не является асимптотическим при $t \gg 1$. Известные методы [1], [2] позволяют получить равномерное асимптотическое приближение при $t = O(\varepsilon^{-1})$, но получающиеся при этом ряды перестают быть асимптотическими при $t \gg \varepsilon^{-1}$. В сообщении показывается, что после обычного перехода к фазовым переменным ρ, φ и введения медленной фазы $\theta = \varepsilon \varphi$ можно получить асимптотический ряд для решения, равномерный с точностью до любой степени ε на промежутке времени $t = O(\varepsilon^{-N})$, где N – произвольное натуральное число.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 96-01-00501, № 96-15-96241).

[1] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Изд-во АН СССР, 1963.

[2] Гребеников Е. А. Метод усреднения в прикладных задачах. М.: Наука, 1986.

6. Левенштам В. Б. (Ростов-на-Дону) “Исследование устойчивости решений задачи о конвекции жидкости в поле быстроосциллирующих сил”

В условиях и обозначениях работы [1] справедлива следующая

ТЕОРЕМА. Пусть спектр $\Lambda = \Lambda_- \cup \Lambda_+$, где $\Lambda_{\pm} = \{\lambda \in \Lambda : \pm \operatorname{Re} \lambda > 0\}$. Тогда для каждого $s \in R$ в окрестности нуля пространства $S_q \times W_q^1$ определены конечномерное многообразие Y_{ω}^- и многообразие конечной коразмерности Y_{ω}^+ , обладающие следующими свойствами: 1) если $(\bar{u}_0, \tau_0) \in Y_{\omega}^+$, $\bar{u}'_s = u'_{\omega}(\cdot, s) + \bar{u}_0 + (I - \omega^{-1} \nu \Pi \Delta)^{-1} \sum_{0 < |k| \leq k_2} \bar{a}_k \times \exp(ik\omega s) \tau_0$, $T'_s = T'_{\omega}(\cdot, s) + \tau_0$, то существует единственное решение $(\bar{u}^s_{\omega}, T^s_{\omega})$ задачи Коши для уравнения (1) из [1] с начальными условиями $\bar{u}^s_{\omega}(x, s) = \bar{u}'_s$, $T^s_{\omega} = T'_s$, и разность $(\bar{u}'_{\omega}(\cdot, t), T'_{\omega}(\cdot, t)) - (\bar{u}^s_{\omega}(\cdot, t), T^s_{\omega}(\cdot, t))$ экспоненциально стремится к нулю по норме $S_q \times W_q^1$ при $t \rightarrow +\infty$; 2) если вектор (u'_s, T'_s) достаточно близок к $(u'_{\omega}(\cdot, s), T'_{\omega}(\cdot, s))$, но не может быть представлен указанным выше образом, то соответствующая разность решений при $t \rightarrow +\infty$ выходит из некоторой фиксированной окрестности нуля пространства $S_q \times W_q^1$; 3) для многообразия Y_{ω}^- аналогичные утверждения имеют место при $t \rightarrow -\infty$; 4) многообразия Y_{ω}^- и Y_{ω}^+ касаются в нуле инвариантных относительно соответствующего оператора монодромии подпространств, отвечающих его спектральным подмножествам, расположенным вне и внутри единичного круга.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

[1] Левенштам В. Б. // Сиб. матем. журн. 1996. Т. 37. № 5. С. 1103–1116.

Утреннее заседание 22 января 1998 г., секция 2.

1. Введенская Н. Д. “Нелинейные уравнения, возникающие в теории очередей”

Изучение ряда асимптотических задач теории очередей (когда число приборов в системе очень велико) приводит к краевым задачам вида

$$(1) \quad \frac{du_k(t)}{dt} = \lambda \sum_{j=1}^{\infty} b_j (h(u_{k-j}(t)) - h(u_k(t))) - u_k(t) + u_{k+1}(t), \quad k \geq 1,$$

$$(2) \quad u_k(t) \equiv 1, \quad k \leq 0, \quad u_k(0) = g_k \geq 0, \quad g_{k-1} \geq g_k, \quad k \geq 1,$$

либо, в более общем случае,

$$(3) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \lambda \int_{s=0}^{\infty} (h(u(x-s, t)) - h(u(x, t))) dB(s) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad x > 0,$$

$$u(x, t) \equiv 1, \quad x \leq 0,$$

$$(4) \quad u(x, 0) = g(x) \geq 0, \quad x > 0.$$

Здесь $b_j \geq 0$, $\sigma \sum_{j=1}^{\infty} j b_j < 1$, $\sum_{j=1}^{\infty} j^2 b_j < \infty$ в задаче (1)–(2) и g – невозрастающая, а B – неубывающая и непрерывная слева функции, $B(0) = 0$, $B(s) \rightarrow 1$ при $s \rightarrow \infty$, $\sigma \int_{s=0}^{\infty} s dB(s) < 1$, $\int_{s=0}^{\infty} (1 + s^2) dB(s) < \infty$ в задаче (3)–(4); $h(x)$ – возрастающая функция, $h(x) = O(x^M)$, $M > 1$, при $x \rightarrow 0$; $\sigma = \lambda \sup h(x)/x$, $0 \leq x \leq 1$.

У задачи (1)–(2) (соответственно (3)–(4)) при всех $t > 0$ существует невозрастающее по k решение $u_k(t)$ (соответственно невозрастающее по x решение $u(x, t)$). Если $\{g_k\} \in \mathbf{I}_1$ ($g \in \mathbf{L}_1$), то $\{u_k(t)\} \in \mathbf{I}_1$ ($u(\cdot, t) \in \mathbf{L}_1$) $\forall t > 0$ и $u_k(t) \rightarrow u_k^c$ (соответственно $u(x, t) \rightarrow u^c(x)$) при $t \rightarrow \infty$, где u_k^c – единственное в $\mathbf{I}_1$ стационарное решение (1) (соответственно $u^c(x)$ –

единственное в $\mathbf{L}_1$ стационарное решение (3)). Если $b_j = 0$, $j > J$ ($B(x) = 1$, $x > X$), то $u_k^c = O(\lambda^{m^{c_k}})$ ($u^c(x) = O(\lambda^{m^{c_x}})$), $1 < m \leq M$, $c > 0$.

Пример: пусть $b_j = \delta_{1j}$, $h(x) = x^2$ в (1), тогда $u_k^c = \lambda^{2^k - 1}$.

[1] Введенская Н. Д., Добрушин Р. Л., Карпелевич Ф. И. // Проблемы передачи информации. 1996. Т. 32. № 1. С. 20–34.

[2] Vvedenskaya N. D., Suhov Yu. M. // RR INRIA, France. № 3328, 1997. P. 1–37.

2. Власов В. В. “Некоторые спектральные задачи, возникающие в теории функционально-дифференциальных уравнений”

Рассмотрим следующую задачу

$$(1) \quad \sum_{j=0}^n \left(B_j u(t - h_j) + D_j \frac{du}{dt}(t - h_j) \right) = 0, \quad t > 0,$$

$$(2) \quad u(t) = y(t), \quad t \in [-h, 0], \quad u(+0) = \varphi_0 = y(-0).$$

Здесь B_j, D_j – матрицы размера $m \times m$ с постоянными комплексными элементами, $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_n = h$, вектор-функция $y(t) \in W_2^1((-h, 0), \mathbb{C}^m)$.

Обозначим через $\mathcal{L}(\lambda)$ матрицу-функцию

$$\mathcal{L}(\lambda) = \sum_{j=0}^n (B_j + \lambda D_j) \exp(-\lambda h_j),$$

через $l(\lambda)$ – ее определитель $\det \mathcal{L}(\lambda)$, через ν_q – кратности нулей λ_q функции $l(\lambda)$, через $y_{q,j,s}(t)$ экспоненциальные [1] решения уравнения (1).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\det D_0 \neq 0$ и $\inf_{\lambda_p \neq \lambda_q} |\lambda_p - \lambda_q| > 0$. Тогда:

(а) любое сильное решение $u(t) \in W_2^1((-h, T), \mathbb{C}^m)$, $T > 0$, задачи (1), (2) допускает оценку

$$(3) \quad \|u(t + \cdot)\|_{W_2^1(-h, 0)} \leq d \exp(\kappa t) (t + 1)^{N-1} \|y\|_{W_2^1(-h, 0)}, \quad t \geq 0,$$

где $\kappa = \sup_{\lambda_q} \operatorname{Re} \lambda_q$, $N = \max \nu_q$, а постоянная d не зависит от $y(t)$;

(б) при дополнительном условии $\det D_n \neq 0$ система подпространств V_{λ_q} , где V_{λ_q} – линейная оболочка экспоненциальных решений $y_{q,j,s}(t)$, отвечающих λ_q , образует базис Рисса из подпространств пространства $W_2^1((-h, 0), \mathbb{C}^m)$.

Результаты, близкие к теореме 1, приведены в [1], [2].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00333).

[1] Власов В. В. // Изв. вузов. Матем. 1996. № 1. С. 22–25.

[2] Власов В. В. // УМН. 1996. Т. 51. № 1. С. 143–144.

3. Горбачук В. И. (Украина, Киев) “О представлении решений дифференциально-операторных уравнений”

Рассмотрим уравнение

$$(1) \quad y''(t) + \alpha_1 A y'(t) + \alpha_2 A y(t) = 0, \quad t \in (0, \infty),$$

где $A \geq 0$ – самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$). Решение (1) ищется в классе вектор-функций $y(t): (0, \infty) \rightarrow \mathcal{D}(A)$, принадлежащих $C^2((0, \infty), \mathfrak{H})$. Обозначим через $\omega_i(\lambda)$ ($i = 1, 2$) корни уравнения $\omega^2 + \alpha_1 \lambda \omega + \alpha_2 \lambda = 0$ ($\lambda \in \sigma(A)$, $\sigma(\cdot)$ – спектр оператора). Описание всех решений уравнения (1) дает

ТЕОРЕМА. Вектор-функция $y(t)$ является решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда она допускает представление вида

$$y(t) = e^{\omega_1(\hat{A})t} f_1 + e^{\omega_2(\hat{A})t} f_2,$$

где: 1) $f_1 \in \mathfrak{H}$, $f_2 \in \mathfrak{A}'(A)$ при $\alpha_1 > 0$ ($\sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\omega_1(\lambda)| < \infty$); 2) $f_1 \in \mathfrak{H}$, $f_2 \in \mathfrak{A}_c(A)$ при $\alpha_1 < 0$ ($\sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\omega_1(\lambda)| < \infty$); 3) $f_1, f_2 \in \mathcal{D}(A)$ при $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 > 0$; 4) $f_1 \in \mathfrak{A}'(\sqrt{A})$, $f_2 \in \mathfrak{A}_c(\sqrt{A})$ при $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 < 0$ ($\omega_2(\lambda) > 0$).

Здесь $\mathfrak{A}(\cdot)$ и $\mathfrak{A}_c(\cdot)$ – пространства аналитических и, соответственно, целых векторов оператора, $\mathfrak{A}'(\cdot)$ – двойственное к $\mathfrak{A}(\cdot)$, $\hat{A}$ – расширение по непрерывности сужения $A \upharpoonright \mathfrak{A}(A)$ на $\mathfrak{A}'(A)$.

Из теоремы следует, что в случае 3) каждое решение уравнения (1) продолжаемо в $C^2((-\infty, \infty), \mathfrak{H})$, а в случае 2) – до целой вектор-функции.

В конкретной ситуации, когда A порождается выражением $-\Delta$, уравнение (1) в случае 3) превращается в уравнение колебаний струны, в случае 4) – в уравнение Лапласа, а в случае 1) описывает распространение возмущений в вязком газе.

Работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект 1.4162).

4. Лаврентьев М. М.-мл. (Новосибирск), Шпиглер Р. (Италия, Рим) “Уравнение Курамото–Сакагучи с интегральным слагаемым”

В полуполосе $[0, 2\pi] \times [0, \infty)$ рассматривается уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta^2} - \omega \frac{\partial \rho}{\partial \theta} - K \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\rho(\theta, t, \omega) \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\varphi - \theta) \rho(\varphi, t, \omega) g(\omega) d\omega d\varphi \right]$$

с положительными постоянными D , K и гладкой финитной функцией $g(\omega)$. Считается, что параметр ω изменяется в пределах носителя g .

Начальные данные предполагаются гладкими, положительными и имеющими единичную норму в $L_1([0, 2\pi])$; граничными условиями являются условия периодичности.

Эта модель нестандартного типа, впервые предложенная в работах Курамото и Сакагучи, описывает динамику некоторой бесконечной системы случайных осцилляторов с нелинейными связями. Главной особенностью является интегрирование по “коэффициентной переменной” ω , что затрудняет, в частности, применение развитого аппарата линеаризации.

ТЕОРЕМА. Классическое решение поставленной задачи: а) существует; б) единственно; в) неотрицательно; г) имеет единичную L_1 -норму по θ ; д) дифференцируемо по параметру ω ; е) ограничено вместе со своими производными по θ равномерно относительно t и размеров носителя функции $g(\omega)$.

5. Мышкис А. Д. “Смешанные функционально-дифференциальные уравнения”

Смешанные функционально-дифференциальные уравнения (СФДУ) – это ФДУ относительно функции более чем одного аргумента, в которых производная берется только по одному из аргументов.

В докладе рассматривается СФДУ запаздывающего типа общего вида:

$$(1) \quad \dot{u}(x, t) = f(x, t, u_{xt}) \quad (a < x < b, \quad 0 < t < T; \quad \dot{} = \partial/\partial t),$$

где $u(x, t) \in \mathbb{R}^n$, $u_{xt}(\xi, \theta) := u(x + \xi, t + \theta)$ ($|\xi| \leq h$, $-g \leq \theta \leq 0$; $h, g = \text{const} \geq 0$).

Обозначим $\Pi_T := (a, b) \times (0, T)$, $D_T := (a - h, b + h) \times [-g, T]$, $u^\varphi := u$ в Π_T , $u^\varphi := \varphi$ в $D_T \setminus \Pi_T$, где $\varphi: D_\infty \setminus \Pi_\infty \rightarrow \mathbb{R}^n$ – заданная *продолжающаяся функция*. Аналог задачи Коши для уравнения (1) имеет вид

$$(2) \quad \dot{u}(x, t) = f(x, t, u_{xt}^\varphi) \quad (a < x < b, \quad 0 < t < T), \quad u(x, 0^+) = \varphi(x, 0) \quad (a < x < b).$$

Эта задача включает как начальное, так и граничные условия.

Назовем *регулярной* функцию от x, t , которая локально ограничена, измерима по x и локально равномерно непрерывна по t . Решение u понимается в классическом смысле и от него требуется регулярность в $(a, b) \times (0, T_1) \quad \forall T_1 \in (0, T)$. Функционал f определен в $\Pi_\infty \times P$, где P – пространство всех регулярных в $[-h, h] \times [-g, 0]$ функций с равномерной метрикой.

ТЕОРЕМА. Пусть функционал $(x, t, w) \mapsto f(x, t, w)$ суперпозиционно регулярный, локально ограниченный, локально равномерно непрерывный по t и локально липшицев по w ; функция φ регулярная. Тогда $\exists T \in (0, \infty]$: решение задачи (2) существует; для любого $T_1 \in (0, T)$ это решение на Π_{T_1} единственно и непрерывно зависит от φ ; если $T < \infty$, то u не является равномерно непрерывным по t на Π_T .

Рассмотрены также СФДУ нейтрального типа, аналогичные СФДУ (1).

6. Осипов А. С. “Об обратной задаче и l^p -свойствах решений для некоторых классов разностных уравнений”

Исследуются свойства принадлежности пространству l^p , $p \in [1, \infty)$, всех решений уравнения

$$(1) \quad (lu)_i = \sum_{j=-q}^1 a_{i,i+j} u_{i+j} = 0; \quad i \geq q, \quad a_{i,i+1} \neq 0, \quad a_{i,i-q} = 1,$$

в терминах обратной спектральной задачи для соответствующего ему оператора L . Используя [1], получаем следующий l^p -критерий для (1):

ТЕОРЕМА 1. Принадлежность l^p всех решений (1) равносильна условию

$$\sum_{i_1=n}^{\infty} \sum_{i_2=n}^{i_1} \cdots \sum_{i_{q+1}=n}^{i_q} |K(i_1, \dots, i_{q+1})|^p < \infty$$

для некоторого n , $n \geq 1$, где $K(i_1, \dots, i_{q+1})$ – определитель фундаментальной системы решений (1), составленной из многочленов первого и второго родов [2].

Данные многочлены можно выразить через элементы обратной задачи.

ТЕОРЕМА 2. Последовательность $(S_k^1 \cdots S_k^q)_{k=0}^\infty$, $S_k^i \in \mathbb{C}$, есть моментная последовательность матрицы Вейля оператора L [2], соответствующего уравнению (1) при дополнительном предположении $a_{i,i+j} = 0$, $j = -q+1, \dots, 0$, с решениями из l^p тогда и только тогда, когда выполнены условия:

- 1) $\Delta_k \neq 0$ для любого $k \geq 0$, где $\Delta_k = \det[\alpha_{ij}]_{i,j=0}^k$, $\alpha_{ij} = S_{j+k+1}^{l+1}$, $i = kq + l$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $l = 0, \dots, q-1$ ($\Delta_{-1} = 1$);
- 2) $S_{m+k(1+q)}^{l+1} = 0$, $m = 0, \dots, q$, $m \neq l+1$;
- 3) $\sum_{n=0}^\infty b_n < \infty$, где $b_n = \left(\frac{\prod_{i=0}^k \Delta_{(q+1)i+m}^2}{\prod_{i=0}^k \Delta_{(q+1)i+m-1} \Delta_{(q+1)i+m+1}} \right)^p$, $n = m + k(1+q)$.

[1] Костюченко А. Г., Мирзоев К. А. // УМН. 1996. Т. 51. № 6. С. 207–208.

[2] Осипов А. С. // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1. № 3. С. 711–727.

7. Россковский Л. Е. “Первая краевая задача для одного эллиптического функционально-дифференциального уравнения”

Рассматривается задача Дирихле

$$\begin{aligned} -\Delta R u &= f \quad (x \in Q), \\ u|_{\partial Q} &= 0, \end{aligned}$$

где $Q \subset \mathbb{R}^n$ – гладкая ограниченная область, удовлетворяющая условию $\overline{Q} \subset qQ$, $q > 1$; $(Ru)(x) = \sum_{m=0}^l a_m(x) u(q^{-m}x)$, $a_m \in C^2(\overline{Q})$ – комплекснозначные функции.

Обозначим $r(x, \lambda) = \sum_{m=0}^l a_m(x) \lambda^m$ ($x \in \overline{Q}$, $\lambda \in \mathbb{C}$).

I. Введем неограниченный оператор $A_R: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, действующий по формуле $A_R = -\Delta R$, с областью определения $\mathbf{D}(A_R) = \{u \in \overset{\circ}{W}^1(Q) : A_R u \in L_2(Q)\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $r(0, \lambda) \neq 0$ ($|\lambda| \leq q^{\frac{n}{2}-1}$) и $r(x, 0) = a_0(x) \neq 0$ ($x \in \overline{Q}$). Тогда оператор A_R фредгольмов и $\mathbf{D}(A_R) = \overset{\circ}{W}^1(Q) \cap W^2(Q)$.

В случае постоянных коэффициентов показано, что нарушение условия теоремы приводит к появлению бесконечномерного ядра оператора A_R , содержащего функции, не принадлежащие $W^2(Q)$.

II. Рассмотрим ограниченный оператор $\mathcal{L}_R: H_a^{k+2}(Q) \rightarrow H_a^k(Q)$, действующий по формуле $\mathcal{L}_R = -\Delta R$, с областью определения $\mathbf{D}(\mathcal{L}_R) = \{u \in H_a^{k+2}(Q) : u|_{\partial Q} = 0\}$. Здесь $H_a^k(Q)$ – пополнение множества $\dot{C}^\infty(Q \setminus \{0\})$ по норме

$$\|u\|_{H_a^k(Q)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_Q |x|^{2(a+|\alpha|-k)} |\mathcal{D}^\alpha u|^2 dx \right)^{1/2}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть

- 1) $r(0, \lambda) \neq 0$ ($|\lambda| \leq q^{\frac{n}{2}+a-k-2}$) и $r(x, 0) \neq 0$ ($x \in \overline{Q}$),
- 2) числа $a \in \mathbb{R}$ и $k = 0, 1, \dots$ таковы, что модельное уравнение $\Delta v = g$ имеет единственное решение $v \in H_a^{k+2}(\mathbb{R}^n)$ для любой функции $g \in H_a^k(\mathbb{R}^n)$.

Тогда оператор $\mathcal{L}_R$ – нётеров.

8. Рамазанов М. Д. (Уфа) “Современное состояние соболевской теории кубатурных формул”

Утреннее заседание 22 января 1998 г., секция 3.

1. Бурский В. П. (Украина, Донецк) “Об условиях Вишика существования разрешимых расширений и сравнении Хермандера для общих дифференциальных операторов”

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$, и пусть $\mathcal{L} = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$, $a_\alpha \in C^\infty(\bar{\Omega})$, – дифференциальная операция общего вида с $(j \times k)$ -матрицами a_α , $\mathcal{L}^+$ – формально сопряженная операция. Формула Грина для гладких u и v :

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}u \cdot \bar{v} - u \cdot \overline{\mathcal{L}^+v}) dx = \sum_{q=0}^{m-1} (L_{m-q-1}u, \partial_\nu^q v)_{\partial\Omega} =: \langle \mathcal{L}_{\partial\Omega} \gamma u, \gamma v \rangle \quad (= -\langle \gamma u, \mathcal{L}_{\partial\Omega}^+ \gamma u \rangle)$$

порождает явные выражения $L_p u$, образующие оператор $\mathcal{L}_{\partial\Omega}$,

$$\gamma u = (u|_{\partial\Omega}, u'_\nu|_{\partial\Omega}, \dots, u_\nu^{(m-1)}|_{\partial\Omega}).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для того чтобы у минимального оператора L_0 существовало разрешимое расширение (и для уравнения $Lu = f$ с максимальным оператором L существовала корректная граничная задача), необходимо, чтобы следы γu любого гладкого (из $H^m(\Omega)$) решения уравнения $\mathcal{L}u = 0$ не принадлежали ядру оператора $\mathcal{L}_{\partial\Omega}$ и чтобы следы любого гладкого решения уравнения $\mathcal{L}^+u = 0$ не принадлежали ядру оператора $\mathcal{L}_{\partial\Omega}^+$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть две дифференциальные операции $\mathcal{L}$ и $\mathcal{P}$ имеют одинаковые порядок m и размер матричных коэффициентов $j \times k$. Для сравнения по Хермандеру $\mathcal{L} \succ \mathcal{P}$ (т.е. $D(L_0) \subset D(P_0)$) необходимо, чтобы выполнялось включение $\ker \mathcal{L}_{\partial\Omega} \subset \ker \mathcal{P}_{\partial\Omega}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. В условиях утверждения 2 при $j = k$ для сравнения $\mathcal{L} \succ \mathcal{P}$ необходимо, чтобы множество $S_m(\mathcal{L}) = \{x \in \partial\Omega \mid \det l_m(x, \nu(x)) = 0\}$ характеристических точек оператора $\mathcal{L}$ на $\partial\Omega$ содержалось в множестве $S_m(\mathcal{P}) = \{x \in \partial\Omega \mid \det p_m(x, \nu(x)) = 0\}$ характеристических точек оператора $\mathcal{P}$ на $\partial\Omega$, где $l_m(x, \xi)$ и p_m – старшие символы операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{P}$.

2. Павлов А. Л. (Украина, Донецк) “Задача Коши для дифференциальных уравнений типа Соболева–Гальперна”

3. Шананин Н. А. “О приложениях одной оценки карлемановского типа для квазиэллиптических операторов”

Пусть в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ определен квазиэллиптический линейный дифференциальный оператор $P(x, D_x)$ с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами. Обозначим через x' совокупность переменных, которым соответствуют минимальные веса, через x'' – дополнение x' до полного набора координат. Пусть $p_m(x, \xi)$ – взвешенный главный символ. Используемые ниже обозначения аналогичны принятым в книге [1].

ТЕОРЕМА 1. Если характеристический многочлен оператора $p_m(x^0, \xi' + z\varphi_{x'}(x^0), \xi'')$, $z \in \mathbb{C}$, при любых точке $x^0 \in \Omega$, дифференцируемой в точке x^0 функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей условию $\varphi_{x'}(x^0) \neq 0$, и векторе $\xi \in \mathbb{R}^n$, неколлинеарном $\varphi_{x'}(x^0)$, имеет простые корни по z , то для любой функции $u(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$, удовлетворяющей уравнению $Pu = 0$, справедливо включение $N(\text{supp } u) \subset \{(x, \xi) \mid \xi' = 0\}$.

Если $u(x, y)$ – обобщенная функция переменных x, y и $P = P(x, D_x)$, то

$$WF_w(Pu) \subseteq WF_w(u) \subseteq WF_w(Pu) \cup \{(x, y, \xi, \eta) \mid \xi = 0\}.$$

Через $WF_w(u)$ обозначен взвешенный волновой фронт функции $u(x, y)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда множество $WF_w(u) \setminus WF_w(Pu)$ инвариантно относительно сдвигов по x' .

[1] Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. М.: Мир, 1986.

4. Альбеверио С. (Германия, Бонн), Гейлер В. А. (Саранск) “Конечность периодических точечных потенциалов”

Известная гипотеза Бете–Зоммерфельда утверждает, что спектр периодического оператора Шрёдингера H в $L^2(\mathbb{R}^d)$, $d = 3$, имеет лишь конечное число лакун. Первый нетривиальный класс операторов H , для которых была обоснована гипотеза Бете–Зоммерфельда, составили операторы Шрёдингера с точечным возмущением [1] (полное доказательство впервые дано в [2], см. также [3]). При этом доказательства в [1] и [3] существенно использовали предположение, что в элементарной ячейке периодов Q имеется лишь один точечный рассеиватель; это доказательство принципиально не переносится на случай нескольких точечных рассеивателей в Q [3]. Несмотря на то, что для достаточно регулярных периодических потенциалов гипотеза Бете–Зоммерфельда была обоснована М. М. Скригановым [4], для общего случая периодических точечных потенциалов она оставалась до сих пор недоказанной. Основной результат настоящей работы:

ТЕОРЕМА. Пусть H – оператор Шрёдингера в $L^2(\mathbb{R}^d)$, $d = 2$ или 3 , с периодическим “локальным” [3] точечным возмущением. Тогда спектр H имеет лишь конечное число лакун.

[1] Grossman A. et. al. // Comm. Math. Phys. 1980. V. 77. № 1. P. 87–110.

[2] Карпешина Ю. Е. // ТМФ. 1983. Т. 57. № 3. С. 304–313.

[3] Альбеверио С. и др. Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991.

[4] Skriganov M. M. // Invent. Math. 1985. V. 80. № 1. P. 107–121.

5. Гомилко А. М. (Украина, Киев) “О производящих операторах ограниченных полугрупп линейных операторов”

6. Горбачук М. Л., Якимив Р. Я. (оба – Украина, Киев) “Прямые и обратные теоремы теории приближений вариационными методами для дифференциальных уравнений”

Рассмотрим уравнение

$$(1) \quad Au = f,$$

где A – положительно определенное самосопряженное (п.о.с.) расширение с дискретным спектром минимального оператора, порожденного эллиптическим дифференциальным выражением в пространстве $L_2(G)$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in L_2(G)$. Пусть B – п.о.с. оператор в $L_2(G)$, сходный с A , $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ – ортонормированный базис в $L_2(G)$, состоящий из собственных функций оператора B , $\{m_n\}_{n=0}^\infty$ – неубывающая последовательность положительных чисел, растущая определенным образом при $n \rightarrow \infty$. Положим $C^\infty(B) = \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{D}(B^n)$, $C_{\{m_n\}}(B) = \{x \in C^\infty(B) \mid \exists \alpha > 0, \exists c > 0: \|B^n x\| \leq c \alpha^n m_n\}$. Обозначим также через u_n приближенное по Рунту относительно координатной системы $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ решение уравнения (1).

ТЕОРЕМА. При указанных предположениях относительно A , B , $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{m_n\}_{n=0}^\infty$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} u \in C^\infty(B) &\iff \forall k \in \mathbb{N} \quad \|Au_n - f\| = o(\lambda_n^{-k}), \\ u \in C_{\{m_n\}}(B) &\iff \exists \alpha > 0, \exists c > 0: \forall k \in \mathbb{N} \quad \|Au_n - f\| \leq c \rho^{-1}(\alpha \lambda_k). \end{aligned}$$

Здесь λ_k – собственное число оператора B , соответствующее e_k , $\rho(\lambda) = \sup_n \{\lambda^n / m_n\}$.

Аналогичные утверждения справедливы для других вариационных методов (наименьших квадратов и моментов).

Работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект 1.4162) и Совместного американо-украинского фонда (грант UM 1-298).

7. Радзиевский Г. В. (Украина, Киев) “Формула для вычисления радиуса голоморфности вектора в терминах наилучших его приближений посредством корневых векторов оператора”

Пусть A – линейный оператор, действующий в банаховом пространстве X и имеющий компактную резольвенту $R(\lambda; A)$ при $\lambda \in \rho(A)$, где $\rho(A)$ – резольвентное множество A . Введем обозначения: $\mathfrak{P}_\zeta(A)$ – линейная оболочка корневых векторов A , отвечающих собственным значениям $\lambda_k(A)$ с $|\lambda_k(A)| \leq \zeta$; $E_\zeta(f, A) := \inf_{g \in \mathfrak{P}_\zeta(A)} \|f - g\|$, $f \in X$, $\zeta > 0$, а $\mathfrak{D}_\infty(A) := \bigcap_{r \in \mathbb{N}} \mathfrak{D}(A^r)$, где $\mathfrak{D}(A^r)$ – область определения A^r .

Оператор $A \in \mathcal{R}_1$, если его резольвента удовлетворяет следующим условиям: существует такая последовательность чисел $\{\zeta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, что $0 < \zeta_m \nearrow \infty$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \zeta_{m+1}/\zeta_m = 1$, почти все точки окружности $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \zeta_m\}$ принадлежат $\rho(A)$ и для каждого $\varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \ln^+(e^{-\varepsilon \zeta_m} \|R(\zeta_m e^{i\theta}; A)\|) d\theta = 0.$$

ТЕОРЕМА. Пусть оператор A имеет компактную резольвенту и $A \in \mathcal{R}_1$. Тогда для того чтобы вектор $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$ и радиус сходимости $R_A(f)$ ряда $\sum_{r=0}^\infty (z^r A^r f)/r!$ не равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы число $c(f) := \overline{\lim}_{\zeta \rightarrow \infty} E_\zeta(f, A)^{1/\zeta} < 1$. При этом $R_A(f) = -\ln c(f)$.

8. Галахов Е. И., Скубачевский А. Л. “О существовании полугрупп Феллера”

В теории диффузионных процессов возникает вопрос о существовании полугрупп Феллера, порожденных эллиптическими операторами с нелокальными условиями. Для дифференциальных операторов эта проблема исследовалась в работе [1].

Рассмотрим неограниченный интегро-дифференциальный оператор

$$Au(x) = \Delta u(x) + \int_{Q_x} [u(x+z) - u(x) - \nabla u(x) \cdot z] m(dz) \quad (x \in Q),$$

где $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область, $\partial Q \in C^\infty$, $Q_x = \{z \in \mathbb{R}^n : x+z \in \overline{Q}\}$, а $m(\cdot)$ – неотрицательная борелевская мера такая, что

$$\int_{Q_x \cap \{|z| \leq r\}} |z|^2 m(dz) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0), \quad \int_{Q_x \cap \{|z| > r\}} |z| m(dz) < \infty \quad (r > 0).$$

Рассмотрим также нелокальное условие

$$Bu(x) = \gamma(x)u(x) + \int_Q [u(x) - u(y)] \mu(x, dy) = 0 \quad (x \in \partial Q),$$

где $\gamma(x) \geq 0$, $\mu(x, \cdot)$ – неотрицательная борелевская мера на $\overline{Q}$.

Обозначим $C_B(\overline{Q}) = \{u \in C(\overline{Q}) : Bu = 0\}$. Введем оператор $A_B : C_B(\overline{Q}) \rightarrow C_B(\overline{Q})$ по формуле $A_B u = Au$ ($u \in \mathcal{D}(A_B)$), $\mathcal{D}(A_B) = \{u \in C^2(Q) \cap C_B(\overline{Q}) : Au \in C_B(\overline{Q})\}$.

При определенных геометрических условиях на меру $\mu(x, \cdot)$, сформулированных в [1], справедлива

ТЕОРЕМА. Оператор $\overline{A}_B : C_B(\overline{Q}) \rightarrow C_B(\overline{Q})$ является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера на $C_B(\overline{Q})$.

[1] Галахов Е. И., Скубачевский А. Л. // Матем. сб. 1998. Т. 165(207). № 1. С. 45–78.

Вечернее заседание 22 января 1998 г., секция 1.

1. Белан Е. П. (Украина, Симферополь) “Об инерциальных многообразиях параболического уравнения с монотонной нелинейной функцией”

Пусть $\{S_t\}$ – полугруппа, определяемая уравнением

$$\partial_t u + Au + B(u) + g = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – область с гладкой границей, $Au = -\sum_{i,j=1}^3 \partial_i(a_{i,j}(x)\partial_j u)$, $B(u) = f(u)$, $g \in L_2(\Omega)$. Коэффициенты $a_{i,j} \in L_\infty(\Omega)$ и

$$a_{i,j} = a_{j,i}, \quad \sum_{i,j=1}^3 a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu_0\|\xi\|^2$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^3$ и некоторого $\mu_0 > 0$. Функция $f(u) \in C^1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям

$$0 \leq f'(u) \leq C(1 + |u|^{p_0-2}), \quad f(u)u \geq \mu_0|u|^{p_0}, \quad f(0) = 0,$$

где $p_0 > 2$, C – постоянная. Выберем $\alpha \in (3/4, 1)$. Обозначим $H = L_2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega) \cap H^{2\alpha}(\Omega)$, $\|u\|_V^2 = \langle A^\alpha u, A^\alpha u \rangle$. Пусть $G \subset \{u : \|u\|_V < \rho/2\}$ является H -поглощающим множеством полугруппы $\{S_t\}$. Согласно теореме вложения Соболева существуют такие постоянные M_1, M_2 , что

$$\|B(u)\| \leq M_1, \quad \|B(u_1) - B(u_2)\| \leq M_2\|u_1 - u_2\|$$

для всех u, u_1, u_2 , удовлетворяющих неравенствам $\|u\|_V \leq \rho$, $\|u_i\|_V \leq \rho$ ($i = 1, 2$). Пусть λ_k – собственные значения A , занумерованные в порядке возрастания. Обозначим $k(\alpha) = e^{-\alpha}/(1 - \alpha)$.

ТЕОРЕМА. Пусть

$$k(\alpha)(M_1 + \|g\|)(\lambda_{N+1})^{-(1-\alpha)} \leq \rho/2,$$

$$\lambda_{N+1} - \lambda_N \geq (1 + 2\sqrt{2})M_2, \quad \lambda_{N+1} > \sqrt{2}M_2.$$

Тогда существует N -мерное инерциальное многообразие $\mathfrak{M}$ полугруппы $\{S_t\}$. Поверхность $\mathfrak{M}$ непрерывна в V и липшицева в H .

2. Вишик М. И. “Аттракторы и их колмогоровская ε -энтропия”

В области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ рассматриваются системы уравнений вида:

$$(1) \quad \partial_t u = A(u) + g(x, t), \quad u|_{t=\tau} = u_\tau, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Здесь $g(x, t) \in \Sigma$, где Σ – компактное множество в $C(\mathbb{R}, H)$, $H = (L_2(\Omega))^N$, и притом трансляционно инвариантное: $T(t)\Sigma = \Sigma \forall t \in \mathbb{R}$, $T(t)g(x, s) = g(x, t + s)$. В частности, (1) может совпадать с $2D$ системой Навье–Стокса или с системой уравнений реакции-диффузии с диссипативной вектор-функцией $f(u)$, имеющей по u порядок роста $p \leq n/(n - 2)$ при $n > 2$ (p – любое число при $n \leq 2$). Такие системы (1) обладают равномерным (относительно $g \in \Sigma$) аттрактором $\mathcal{A}$. Хаусдорфова размерность $\mathcal{A}$ может быть бесконечной. Поэтому изучается колмогоровская ε -энтропия $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A})$ аттрактора $\mathcal{A}$: $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) = \log_2 N_\varepsilon(\mathcal{A})$, где $N_\varepsilon(\mathcal{A})$ – наименьшее число ε -шаров в H , покрывающих $\mathcal{A}$. Доказана следующая оценка:

$$(2) \quad \mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \leq \mathbf{H}_{a\varepsilon}(\Sigma_{0,b}) + c \log_2(2R_0/\varepsilon).$$

Здесь $\Sigma_{0,b}$ – сужение множества функций Σ на интервал $[0, b]$; $\mathbf{H}_{\varepsilon_1}(\Sigma_{0,b})$ – ε_1 -энтропия компактного множества $\Sigma_{0,b}$ в $C([0, b], H)$; $b = h \cdot \log_2(2R_0/\varepsilon)$, где R_0 – диаметр $\mathcal{A}$ в H ; константы a, c, h определяются из свойства сжатия и свойства липшицевости решений $u(x, t)$ уравнения (1).

Оценка (2) иллюстрируется рядом примеров, в которых Σ совпадает:

- 1) с оболочкой $\mathcal{H}(g_0(x, t))$ почти периодической по t функции $g_0(x, t)$;
- 2) с классом функций, встречающихся в теории информации;
- 3) с трансляционно ограниченными функциями в пространствах Соболева.

Изложенные в докладе результаты получены совместно с В.В. Чепыжовым. Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00354).

3. Горицкий А. Ю. “Явное построение экспоненциально притягивающих многообразий”

Рассматривается задача Коши для неавтономного уравнения

$$(1) \quad \frac{du}{dt} + Au = F(u, t), \quad u|_{t=\tau} = u_\tau \in H$$

в гильбертовом пространстве H , которое раскладывается в прямую сумму инвариантных подпространств $P(H)$ и $Q(H)$ линейного оператора A : $P(H) \perp Q(H)$, $P(H) \oplus Q(H) = H$, $\dim P(H) = N < +\infty$. Предполагается, что

$$\begin{aligned} (Ap, p) &\leq (\lambda - \delta)|p|^2 \quad \forall p \in P(H), \quad \delta > 0, \\ (Aq, q) &\geq (\lambda + \delta)|q|^2 \quad \forall q \in Q(H) \cap \mathcal{D}(A). \end{aligned}$$

$F(u, t)$ – нелинейный оператор, удовлетворяющий условию Липшица:

$$|F(u_1, t) - F(u_2, t)| \leq L|u_1 - u_2| \quad \forall u_1, u_2 \in H \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

причем $\mu = \delta - L > 0$. Найдем β , $0 < \beta < 1$, из условия $\frac{1}{2}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = 1 + \frac{2\mu}{L}$.

ТЕОРЕМА. Решение задачи (1) будем представлять в виде $u(t) = U(t, \tau)u_\tau$, $t \geq \tau$. Определим $M = \bigcup_{t \geq 0} (U(t, 0)P(H), t)$ – множество в расширенном фазовом пространстве $H \times \mathbb{R}_t$. Тогда

1) M является графиком функции $\Phi: P(H) \times \mathbb{R}_+ \rightarrow Q(H)$;

$$|\Phi(p_1, t) - \Phi(p_2, t)|^2 \leq \beta|p_1 - p_2|^2 \quad \forall p_1, p_2 \in P(H), \quad \forall t \geq 0;$$

2) у любой траектории $u(t) = U(t, \tau)u_\tau$, $t \geq \tau \geq 0$, существует “след” на M , т.е. такое решение $\tilde{u}(t)$, $t \geq 0$, уравнения (1), $(\tilde{u}(t), t) \in M$, что

$$|u(t) - \tilde{u}(t)| \leq C(\beta)|u_\tau|e^{-(\lambda+\mu)(t-\tau)} \quad \text{при } t \geq \tau \geq 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Вместо N -мерного пространства $P(H)$ в определении множества M можно взять график произвольной функции $\Phi_0: P(H) \rightarrow Q(H)$, удовлетворяющей условию Липшица с константой $\sqrt{\beta}$.

Результаты получены совместно с В.В. Чепыжовым. Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00354).

4. Зелик С. В. “Траекторный аттрактор нелинейной эллиптической системы в неограниченной области”

В неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ рассматривается квазилинейная эллиптическая система второго порядка

$$(1) \quad a\Delta u + \gamma \mathcal{D}u - f(u) = g(x), \quad x \in \Omega; \quad u|_{\partial\Omega} = u_0.$$

Здесь $u = (u^1, \dots, u^k)$, $f = (f^1, \dots, f^k)$ и $g = (g^1, \dots, g^k)$ – векторные функции, $x = (x^1, \dots, x^n)$, Δ – оператор Лапласа по переменным $x = (x^1, \dots, x^n)$, $a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ – постоянная матрица, удовлетворяющая условию $a + a^* > 0$, а $\gamma \mathcal{D}u$ – дифференциальный оператор первого порядка с постоянными коэффициентами. Предполагается, что нелинейная функция f имеет порядок роста $p-1$, $p > 2$ по переменной u и удовлетворяет некоторому условию диссипативности. Под решением задачи (1) понимается обобщенное решение из пространства $\Theta(\Omega) = [W_{\text{loc}}^{1,2}(\overline{\Omega}) \cap L_{\text{loc}}^p(\overline{\Omega})]^k$. Краевое условие u_0 выбирается из пространства $V_0(\partial\Omega)$ следов функций из $\Theta(\Omega)$ на границе $\partial\Omega$, а правая часть g предполагается принадлежащей пространству $\Xi(\Omega) = [W_{\text{loc}}^{-1,2}(\overline{\Omega}) + L_{\text{loc}}^q(\overline{\Omega})]^k$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Предполагается также, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ существует некоторое выделенное направление $\vec{l} \in \mathbb{R}^n$, такое что

$$T_s \Omega \subset \Omega \quad \forall s \geq 0 \quad \text{и} \quad \bigcup_{s \geq 0} T_{-s} \Omega = \mathbb{R}^n, \quad \text{где } T_s x = x + s\vec{l}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены перечисленные выше условия. Тогда задача (1) имеет хотя бы одно решение из пространства $\Theta(\Omega)$. Пусть, кроме того, правая часть g трансляционно компактна в направлении $\vec{l}$ в пространстве $\Xi^w(\Omega)$ (здесь и далее символом X^w обозначается пространство X , наделенное слабой топологией, $X = \Xi, \Theta$). Тогда уравнение (1) обладает траекторным аттрактором $\mathcal{A}$ в пространстве $\Theta^w(\Omega)$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00354).

5. Ильин А. А. “Глобальное усреднение диссипативных динамических систем”

Основные результаты доклада опубликованы в [1].

[1] Ильин А. А. // Матем. сб. 1996. Т. 187. №5. С. 635–677.

6. Лесик С. Л. “Об аттракторах неавтономного гиперболического уравнения с малым параметром”

Рассматривается гиперболическое неавтономное уравнение с трансляционно компактными коэффициентами и малым параметром при старшей производной:

$$(1) \quad \begin{aligned} \varepsilon \partial_t^2 u + \gamma(t) \partial_t u - \Delta u + f(u, t) + \Phi(x, t) &= 0, \\ x \in \Omega, \quad \Omega \in \mathbb{R}^3, \quad \varepsilon \in [0; \varepsilon_0], \quad \varepsilon_0 > 0. \end{aligned}$$

На $\partial\Omega$ задается граничное условие Дирихле:

$$(2) \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

В области Ω рассматривается также неавтономное параболическое уравнение

$$(3) \quad \gamma(t) \partial_t u - \Delta u + f(u, t) + \Phi(x, t) = 0$$

при граничном условии (2).

При некоторых предположениях о $\gamma(t)$, $f(u, t)$, $\Phi(x, t)$ и начальных данных существует единственное решение уравнения (1) с граничным условием (2), принадлежащее $C(\mathbb{R}_+, H_0^1 \times L_2(\Omega))$. Задача (3), (2) с начальной функцией из $H_0^1(\Omega)$ имеет единственное решение в $C(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$.

Для решений задач (1), (2) и (3), (2) существуют максимальные аттракторы A_ε и A_0 , компактные в $H^{2-\delta}(\Omega) \times H^{1-\delta}(\Omega) = E_{1-\delta}$ при любых $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$ и $\delta \in (0, 1)$. Доказана теорема о полунепрерывности сверху аттракторов A_ε : $\text{dist}_{E_{1-\delta}}(A_\varepsilon, A_0) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ для всякого $\delta \in (0, 1)$.

7. Романов А. В. “Конечномерная предельная динамика параболических уравнений”

Рассматривается полулинейное параболическое уравнение

$$(1) \quad \dot{u} = -Au + F(u)$$

с линейным секториальным оператором A и “подчиненной” ему нелинейностью F в гильбертовом пространстве H . При некоторых условиях общего характера на A и F вопрос о возможности описания предельной фазовой динамики (1) (динамики на аттракторе $K \subseteq H$) системой ОДУ с липшицевым векторным полем в R^n решен в чисто топологических терминах. Установлено, что такое описание возможно (предельная динамика (1) конечномерна), если $K \subset M$, где M – компактное конечномерное C^2 -подмногообразие в H . Обратное утверждение справедливо с условием гладкости $M \in \text{Lip}$ вместо $M \in C^2$. Получен ряд других критериев конечномерности предельной динамики: а) векторное поле $-Au + F(u)$ удовлетворяет на K условию Липшица; б) фазовый полупоток уравнения (1) расширяется на K до липшицева потока; в) аттрактор K обладает достаточно регулярной конечномерной декартовой структурой.

Показано также, что в общем случае векторное поле уравнения (1) гёльдерово на аттракторе с показателем $L = (1 - \alpha)/(2 - \alpha)$, если $F \in C^2(H^\alpha, H)$ для некоторого $\alpha \in [0, 1]$, где $\{H^\alpha\}$ – шкала гильбертовых пространств, порожденная оператором A .

8. Чепыжов В. В. “Оценка фрактальной размерности аттракторов неавтономных уравнений”

Рассматривается неавтономная $2D$ система Навье–Стокса в области $\Omega \in \mathbb{R}_x^2$ с квазипериодической внешней силой:

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_t u + \nu Lu + B(u, u) = g(x, \omega), & u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \\ \partial_t \omega = \alpha, & \omega|_{t=0} = \omega_0. \end{cases}$$

Здесь $u \in H$, H – пространство бездивергентных векторных полей с нормой из $(L_2(\Omega))^2$, $\omega \in \mathbf{T}^k$, $\mathbf{T}^k$ – k -мерный тор, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ – рационально независимые числа, $g(\omega) \in C^1(\mathbf{T}^k; H)$. Задаче (1) ставится в соответствие подгруппа $\{S(t)\}$, $S(t)(u_0, \omega_0) = (u(t), \omega(t))$, действующая в $E = H \times \mathbf{T}^k$, которая обладает глобальным аттрактором $\mathcal{A} \subseteq E$. Изучается фрактальная размерность $\mathbf{d}_F \mathcal{A}$ в E множества $\mathcal{A}$: $\mathbf{d}_F \mathcal{A} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) / \log_2(1/\varepsilon)$, где $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A})$ – ε -энтропия в E множества $\mathcal{A}$.

ТЕОРЕМА. *Справедливо следующее неравенство:*

$$\mathbf{d}_F \mathcal{A} \leq k + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\mu(\Omega)}{\nu^2} \Gamma + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\mu(\Omega) \Gamma_1}{\nu} \right)^{2/3} k^{1/3},$$

где

$$\Gamma^2 = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{\mathbf{T}^k} \|g(\omega)\|^2 d\omega, \quad \Gamma_1^{4/3} = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{\mathbf{T}^k} \|g'_\omega(\omega)\|^{4/3} d\omega.$$

При доказательстве используется уточненная теорема Константина, Фояша, Темема (Constantin, Foias, Temam) о сжатии объектов, которая позволяет получать оценки сверху фрактальной размерности, совпадающие с известными оценками для хаусдорфовой размерности. Аналогичные оценки сверху фрактальной размерности аттракторов доказаны для неавтономных систем уравнений реакции-диффузии и для неавтономного гиперболического уравнения с диссипацией.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00354).

9. Чуешов И. Д. (Украина, Харьков) “Граничные определяющие функционалы для диссипативных начально-краевых задач”

В гладкой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ рассматривается параболическое уравнение с нелинейным граничным условием:

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta u - f(u), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} + h(u) \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x).$$

Здесь n – внешняя нормаль к $\partial\Omega$, $\nu > 0$, а $f(z)$ и $h(z)$ – функции из $C^1(\mathbb{R})$ такие, что $f'(z) \geq 0$, $h'(z) \geq -\beta$, где $\beta \geq 0$ – некоторая константа.

Пусть $\mathcal{L} = \{l_j : j = 1, \dots, N\}$ – множество линейных функционалов на пространстве $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Определим его дефект полноты $\varepsilon_{\mathcal{L}}$ относительно $L^2(\partial\Omega)$ формулой

$$\varepsilon_{\mathcal{L}} = \sup \{ \|w\|_{L^2(\partial\Omega)} : w \in H^{1/2}(\partial\Omega), l_j(w) = 0, l_j \in \mathcal{L}, \|w\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq 1 \}.$$

ТЕОРЕМА. *Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при условии $\varepsilon_{\mathcal{L}} < \varepsilon_0$ множество $\mathcal{L}$ является асимптотически определяющим для задачи (1), т.е. для любой пары ее решений $u_1(t, x)$ и $u_2(t, x)$ из условия*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+1} |l_j(u_1(\tau)) - l_j(u_2(\tau))|^2 d\tau = 0 \quad \text{для } j = 1, \dots, N$$

вытекает, что $\|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Аналогичное утверждение может быть установлено и для нелинейного волнового уравнения вида

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta u - f(u), & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, \quad t > 0, \\ \left(\nu \frac{\partial u}{\partial n} + \delta \frac{\partial u}{\partial t} + h(u) \right) \Big|_{\partial \Omega} = 0, & u|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = u_1(x). \end{cases}$$

Здесь ν, γ, δ – положительные параметры, а $f(z)$ и $h(z)$ – непрерывно дифференцируемые функции с ограниченными производными.

10. Шаповал А. Б. “Интегральные многообразия эллиптических и параболических нелинейных динамических систем”

В полосе $\Omega = \omega \times \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$, исследуется эллиптическое уравнение

$$(1) \quad \begin{cases} \varepsilon^2 \partial_t^2 u - 2b \partial_t u - Au - f(u, t) = g(x, t), \\ u|_{t=\tau} = u_\tau, \quad u_\tau \in (H_{3/2,2}(\omega) \cap H_{1,2}^0(\omega))^m, \\ u|_{\partial \Omega} = 0, \quad \sup_{T > \tau} \|u\|_{H_{2,2}(\omega \times [T, T+1])^m} < \infty. \end{cases}$$

Здесь $A = -\partial_x^2$, $b > 0$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, функции f и g дифференцируемы по своим аргументам и $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|g_t^{(i)}(\cdot, t)\|_V < \infty$, $V = (L_2(\omega))^m$, $i = 0, 1$. Предполагается, что f удовлетворяет условиям, при которых предельное ($\varepsilon = 0$) параболическое уравнение является диссипативным. Тогда уравнение (1) обладает поглощающим в V множеством радиуса ρ , $\rho = \rho(g)$.

Интегральное многообразие $\mathfrak{M}_\varepsilon$, $\varepsilon \geq 0$, соответствующее уравнению (1), строится (см. [1]) как график липшицевой функции $\varphi_\varepsilon: E_+ \times \mathbb{R} \rightarrow E_-$, $E_+ = [e_1, \dots, e_N]$ – линейная оболочка первых N собственных векторов оператора A ($Ae_i = \lambda_i e_i$), E_- – замыкание $[e_{N+1}, \dots]$ в V , N – наименьшее натуральное число, для которого выполнено спектральное условие $\lambda_{N+1} - \lambda_N > K(f)$.

ТЕОРЕМА. Интегральные многообразия $\mathfrak{M}_\varepsilon$ сходятся к $\mathfrak{M}_0$ в следующем смысле:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{\|u_+\|_{E_+} \leq \rho} \|\varphi_\varepsilon(u_+, t) - \varphi_0(u_+, t)\| \zeta(t - \tau) \leq C\varepsilon,$$

где $\zeta(t) = e^{\gamma t}$ при $t < 0$, $\zeta(t) = 1$ при $t \geq 0$, γ зависит от $\lambda_{N+1} - \lambda_N$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00354).

[1] Шаповал А. Б. // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 3. С. 476–480.

Вечернее заседание 22 января 1998 г., секция 2.

1. Волевич Л. Р., Ширикян А. Р. “Локальная линейаризация для полудлинейных гиперболических уравнений высокого порядка”

Рассматривается уравнение

$$(1) \quad P(\partial)u(t, x) + \varepsilon Q(x, \partial^m u(t, x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}$ – малый параметр, $\partial = (\partial_t, \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$, $\partial^m = \{\partial^\alpha : |\alpha| \leq m\}$. Предполагается, что выполнены следующие условия.

Условие (P). Оператор

$$P(\partial) = P(\partial_t, \partial_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} p_\alpha \partial^\alpha, \quad p_\alpha \in \mathbb{R},$$

является строго гиперболическим, и найдется такое $\delta > 0$, что полный символ $P(\tau, \xi)$ оператора (1) не обращается в нуль при $|\operatorname{Re} \tau| < \delta$, $i\xi \in \mathbb{R}^n$.

Для области $D \subset \mathbb{R}^k$ обозначим через $C_b^\infty(D)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций на D , равномерно ограниченных вместе со всеми производными.

Условие (Q). Нелинейный оператор Q имеет вид

$$Q(x, \partial^m u) = \sum_{|\alpha| \leq m} q_\alpha(x) \partial^\alpha u + q(x, \partial^{m-1} u),$$

где функции $q_\alpha(x)$ и $q(x, z)$, $z = \{z_\alpha : |\alpha| \leq m-1\} \in \mathbb{R}^d$, принадлежат пространствам $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $C_b^\infty(\mathbb{R}^n \times B_\rho)$, соответственно, для любого шара $B_\rho = \{z \in \mathbb{R}^d : |z| \leq \rho\}$.

Обозначим через $H^{(s)} = H^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ пространство Соболева порядка s . Пусть $\mathbb{E}_{m-1,s} = \prod_{j=0}^{m-1} H^{(m-1+s-j)}$, а $\mathbb{B}_{m-1,s}(\rho)$ – открытый шар в $\mathbb{E}_{m-1,s}$ радиуса ρ . Обозначим через $\mathcal{U}_\varepsilon(t, U_0)$ оператор, переводящий вектор-функцию $U_0 = [u_0, \dots, u_{m-1}] \in \mathbb{E}_{m-1,s}$ в $[u(t, \cdot), \dots, \partial_t^{m-1} u(t, \cdot)]$, где $u(t, x)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $\partial_t^j u(0, x) = u_j$, $j = 0, \dots, m-1$. При $\varepsilon = 0$ оператор $\mathcal{U}_\varepsilon(t, \cdot)$ является линейным и обозначается через $\mathcal{U}_0(t)$.

ТЕОРЕМА. Пусть выполнены условия (P) и (Q). Тогда для любого $\rho > 0$ и любого целого числа $s > n/2$ найдутся $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\rho, s) > 0$ и семейство гомеоморфизмов $\Phi_\varepsilon : \mathbb{B}_{m-1,s}(\rho) \rightarrow V_{\varepsilon,\rho}$, где $V_{\varepsilon,\rho}$ – окрестность нуля в $\mathbb{E}_{m-1,s}$, такие, что если $U_0 \in \mathbb{B}_{m-1,s}(\rho)$ и $\mathcal{U}_\varepsilon(t, U_0) \in \mathbb{B}_{m-1,s}(\rho)$ при $t \in J$ для некоторого интервала $J \subset \mathbb{R}$, то $\mathcal{U}_0(t)\Phi_\varepsilon(U_0) = \Phi_\varepsilon(\mathcal{U}_\varepsilon(t, U_0))$ при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, $t \in J$.

2. Дороговцев А. Я. (Украина, Киев) “Периодические по распределению решения граничной задачи для уравнения теплопроводности”

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A \in C(\mathbb{R}, \mathcal{L}(B))$ – периодическая с периодом τ функция. Если для каждого $g \in C_0^1([0, \pi], \mathbb{C})$ и B -значного периодического по распределению с периодом τ случайного процесса ξ такого, что $\sup\{\mathbf{E}\|\xi(t)\| : 0 \leq t \leq \tau\} < +\infty$, граничная задача

$$(1) \quad \begin{cases} u_t'(t, x) - u_{xx}''(t, x) = A(t)u(t, x) + g(x)\xi(t), & (t, x) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]; \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = \bar{0}, & t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

имеет единственное периодическое по распределению по переменной t решение u , то справедливо следующее включение

$$(2) \quad \{e^{k^2 + i\alpha} \mid k \in \mathbb{N}, \alpha \in [0, 2\pi]\} \subset \rho(U(\tau)),$$

где U – решение задачи $U'(t) = A(t)U(t)$, $U(0) = I$. Если условие (2) выполнено, функция $g \in C_0^3$ и B -значный периодический случайный процесс ξ таков, что $\mathbf{E} \sup\{\|\xi(t)\| : 0 \leq t \leq \tau\} < +\infty$, то граничная задача (1) имеет единственное периодическое по распределению по переменной t решение u .

ТЕОРЕМА 2. *Граничная задача (1) с $A(t) \equiv A \in \mathcal{L}(B)$ для каждой функции $g \in C_0^3$ и стационарного B -значного процесса ξ с $\mathbf{E}\|\xi(0)\| < +\infty$ имеет единственное стационарное по переменной t решение и тогда и только тогда, когда*

$$\{k^2 + i\mathbb{R} \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \rho(A).$$

Результаты применяются к уравнению Шрёдингера с периодическим потенциалом.

3. Сукачева Т. Г. (Новгород) “О разрешимости нестационарных задач термомонекции несжимаемых вязкоупругих жидкостей”

Система уравнений

$$(1) \quad \begin{cases} (1 - \lambda \nabla^2) \mathbf{v}_t = \nu \nabla^2 \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \sum_{l=1}^K \beta_l \nabla^2 \mathbf{w}_l - g \gamma \theta - \nabla p + \mathbf{f}, \\ 0 = \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad \frac{\partial \mathbf{w}_l}{\partial t} = \mathbf{v} + \alpha_l \mathbf{w}_l, \quad \alpha_l \in \mathbb{R}_-, \quad l = \overline{1, K}, \\ \theta_t = \varkappa \nabla^2 \theta - \mathbf{v} \cdot \nabla \theta + \mathbf{v} \cdot \gamma \end{cases}$$

моделирует эволюцию скорости $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $v_i = v_i(x, t)$, градиента давления $\nabla p = (p_1, \dots, p_n)$, $p_i = p_i(x, t)$ и температуры $\theta = \theta(x, t)$ несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта порядка $K > 0$. Свободный член $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$, $f_i = f_i(x, t)$, отвечает внешнему воздействию на жидкость. Параметры $\lambda \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}_+$, $\varkappa \in \mathbb{R}_+$, $g \in \mathbb{R}_+$; вектор $\gamma = (0, \dots, 0, 1)$ – орт в $\mathbb{R}^n$. Параметры $\beta_l \in \mathbb{R}_+$, $l = \overline{1, K}$, определяют время ретардации (запаздывания) давления. На основе полугруппового подхода и понятия относительно p -секториального оператора [1] установлено существование квазистационарных полутраекторий в первой начально-краевой задаче для системы (1). При этом использованы результаты из [2]. Описано множество допустимых начальных значений.

Работа поддержана ISSEP (грант № d756).

[1] Свиридюк Г. А. // УМН. 1994. Т. 49. № 4. С. 47–74.

[2] Сукачева Т. Г. // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 4. С. 552–557.

4. Емельянов К. В. (Екатеринбург) “Об устойчивости в задаче о безударном сжатии плоского слоя газа”

Рассматривается двумерная возмущенная задача Релея–Гюгонио о безударном сжатии плоского слоя газа. А именно, на закон движения поршня

$$r - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}(1 - t)^{\frac{2}{\gamma+1}} - \frac{2}{\gamma - 1}(1 - t) \equiv r - \varphi(t) = 0,$$

при котором происходит безударное сжатие, накладываются возмущения:

$$F(t, r, z) \equiv r - \varphi(\bar{t})(1 + \varepsilon \sin \omega z) = 0, \quad \bar{t} = t(1 + \varepsilon)^{-1}.$$

Математическая постановка задачи следующая. Найти в области

$$G = \{(t, r, z) : (0 \leq t < 1, 0 \leq r \leq \varphi(\bar{t})(1 + \varepsilon \sin \omega z), z \in \mathbb{R}^1)\}$$

формальное асимптотическое по ε решение системы уравнений

$$\begin{aligned} u_t + uu_r + vu_z + \frac{2}{\gamma - 1}cc_r &= 0, \quad \gamma > 1, \quad \gamma \neq 3, \\ v_t + uv_r + vv_z + \frac{2}{\gamma - 1}cc_z &= 0, \\ c_t + uc_r + vc_z + \frac{\gamma - 1}{2}c(u_r + v_z) &= 0, \end{aligned}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{t=0} = v|_{t=0} = 0; \quad c|_{t=0} = 1$$

и условию на поверхности поршня $F(t, r, z) = 0$

$$F_t + F_r u + F_z v = 0.$$

Показано, что сформулированная задача является бисингулярной. Найдены первый член внешнего разложения (нулевой известен – это решение задачи Релея–Гюгонио) и два члена ряда нулевого внутреннего разложения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-15-96246).

5. Шишмарев И. А. “Асимптотика при $t \rightarrow \infty$ решений обобщенного уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова”

Рассматривается задача Коши для обобщенного уравнения КПП

$$(1) \quad u_t + \sum_{k=1}^n a_k u^k + \mathbb{K}u = 0, \quad u|_{t=0} = \bar{u}(x), \quad x \in \mathbb{R}_N, \quad N \geq 1, \quad t \geq 0.$$

Здесь $\mathbb{K}u$ – линейный псевдодифференциальный оператор, определенный с помощью обратного преобразования Фурье:

$$(2) \quad \mathbb{K}u = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}_N} e^{i(p,x)} K(p) \hat{u}(p, t) dp, \quad \hat{u}(p, t) = \int_{\mathbb{R}_N} e^{-i(p,x)} u(x, t) dx,$$

$K(p)$ – символ оператора $\mathbb{K}$, $u(x, t)$ – действительная функция, a_k – вещественные числа, $n \geq 1$ – натуральное число.

ТЕОРЕМА. Пусть

1. $K(p) = a|p|^\delta + O(|p|^\beta)$ при $|p| = \sqrt{p_1^2 + \dots + p_N^2} \leq 1$, $\beta > \delta > 0$, $a > 0$; $\operatorname{Re} K(p) \geq 2\kappa(p)$, $p \in \mathbb{R}_N$, $\kappa(p) = c_1 m^\delta(p)$;

$$|K(p_1) - K(p_2)| \leq c_2 |\Delta p|^{\sigma_1} M^\alpha(p_2), \quad |\Delta p| = |p_1 - p_2| \leq 1, \\ p_1, p_2 \in \mathbb{R}_N, \quad \alpha \geq 0, \quad \sigma_1 \in (0, 1].$$

2. Для Фурье-образа начального условия $\bar{u}(x) \in L_1(\mathbb{R}_N)$ выполнены оценки $|\hat{u}(p)| \leq \varepsilon M^{-s-\alpha}(p)$, $p \in \mathbb{R}_N$; $|\hat{u}(p_1) - \hat{u}(p_2)| \leq \varepsilon |\Delta p|^{\sigma_2} M^{-s}(p_2)$, $|\Delta p| \leq 1$, $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_N$, $\sigma_2 \in (0, 1]$, $s > N$, $c_1, c_2 > 0$, $\varepsilon > 0$ – достаточно мало, $m(p) = \min(1, |p|)$, $M(p) = \max(1, |p|)$.

Тогда для классического решения $u(x, t)$ задачи Коши (1) справедлива следующая асимптотика при $t \rightarrow +\infty$, равномерная по $x \in \mathbb{R}_N$:

1) если $a_1 > 0$, $a_2, \dots, a_n$ – произвольные вещественные числа, то

$$(3) \quad u(x, t) = A e^{-a_1 t} t^{-N/\delta} \int_{\mathbb{R}_N} e^{-a|p|^\delta} \cos(p, \eta) dp + O(e^{-a_1 t} t^{-N/\delta-\gamma}), \\ \gamma > 0, \quad \eta = x t^{-1/\delta};$$

2) если $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $a_4, \dots, a_n$ – произвольные вещественные числа, то выполнено представление (3) с $a_1 = 0$ и другой константой A_1 , $a \delta \in (0, 3)$.

При $N = 1$ и более жестких ограничениях эта теорема была доказана ранее в [1].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01158).

[1] Конотоп В. В., Шишмарев И. А. // Дифференц. уравнения. 1998 (в печати).

6. Калякин Л. А. (Уфа) “Сингулярные решения линеаризованного уравнения Лиувилля”

Рассматривается неоднородное уравнение $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + 2u \exp \varphi = f(x, t)$, $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, с начальными условиями $u(x, 0) = \psi_0(x)$, $\partial_t u(x, 0) = \psi_1(x)$. Функция $\varphi(x, t)$, будучи решением нелинейного уравнения Лиувилля $\partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi + 2 \exp \varphi = 0$, выражается по формуле $\varphi(x, t) = \ln(4r'_+ r'_- / r^2)$, $(r = r_+ + r_-)$ через пару заданных функций $r_\pm(s^\pm) \in C^3$, $(s^\pm = x \pm t)$. У этой функции допускаются особенности, обусловленные нулями знаменателя r . Особенности сосредоточены на времениподобных линиях Γ . Задача ставится в $\Omega = \mathbb{R}^2 - \Gamma$.

Решение линеаризованной задачи имеет сингулярности порядка $\mathcal{O}(1/r)$ на линиях Γ и в таком классе функций оказывается неоднозначным. Для единственности требуется условие сшивки при переходе через линии Γ в виде задания скачков для двух выражений

$$[u_t \varphi_t + u_x \varphi_x + 2u \exp(\varphi) - 2u_{xx}] = \chi_0, \quad [u_t \varphi_x + u_x \varphi_t - 2u_{tx}] = \chi_1.$$

ТЕОРЕМА. Пусть исходные данные достаточно гладкие: $f, f_x(x, t) \in C^0(\mathbb{R}^2)$, $\psi_0(x) \in C^2(\Omega, t=0)$, $\psi_1(x) \in C^1(\Omega, t=0)$, $\chi_k(x, t) \in C^0(\Gamma)$, и начальные функции согласованы с условиями сшивки. Если интегралы вдоль характеристик

$$F_\pm(s^\pm, t) = \int_0^t \left(\partial_s \left(\frac{f(s^\pm \mp \eta, \eta)}{2r'_\pm(s^\pm)} \right) + \frac{f(s^\pm \mp \eta, \eta)}{r(s^+, s^-)} \right) d\eta \quad \text{при} \quad s^\mp = s^\pm \mp 2\eta$$

непрерывны всюду в $\mathbb{R}^2$, то существует решение $u(x, t)$, единственное в классе функций с непрерывными вторыми производными в области Ω . Все условия, кроме гладкости функции f , необходимы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 97-01-00459, № 96-15-96241).

Вечернее заседание 22 января 1998 г., секция 3.

1. Александров В. В., Жермоленко В. Н. “Минимаксная стабилизация параметрически возмущаемой системы второго порядка”

Получено новое решение задачи о минимаксной стабилизации управляемой и параметрически возмущаемой системы второго порядка. Выведены конструктивные необходимые и достаточные условия оптимальности стратегий игроков в рассмотренных минимаксных задачах. Доказано существование седловой точки дифференциальной игры, использованной при решении задачи стабилизации. Исследовано поведение на фазовой плоскости экстремальных траекторий, соответствующих решению минимаксных задач дифференциальной игры, и найден неустойчивый предельный цикл для этих траекторий. Построен синтез оптимальной минимаксной стабилизирующей стратегии управления. Доказано, что область внутри предельного цикла является областью гарантированной стабилизации системы.

2. Братусь А. С., Посвянский В. П. “Об оптимальной форме изгибаемой колонны”

Пусть $A(h) = \frac{d^2}{dx^2} \left(h^p(x) \frac{d^2}{dx^2} \right)$, $p \neq 0$, $p \in \mathbb{R}$, $x \in (0, 1)$. Множество неотрицательных измеримых функций таких, что $\int_0^1 h(x) dx = 1$, обозначим через $\mathcal{H}$. Рассмотрим краевую задачу

$$(1) \quad \begin{aligned} A(h)u &= f(x), & 0 < x < 1; \\ u(0) &= u'(0) = 0, & u(1) = u'(1) = 0. \end{aligned}$$

Здесь $u \in H_0^2$, $f(x)$ – элемент сопряженного пространства к H_0^2 . Ставится задача об отыскании такой функции $h(x) \in \mathcal{H}$, при которой функционал

$$(2) \quad \Phi(h) = \int_0^1 h^p(x) (u''(x))^2 dx$$

достигает своего минимального значения.

ТЕОРЕМА. Пусть $p > 1$. Функционал (2) достигает своего минимального значения тогда и только тогда, когда существуют такие точки $x_0 \in (0, 1)$, в которых функция $h(x)$ обращается в нуль.

Задача (1)–(2) по своей постановке близка к известной задаче Лагранжа, хотя и более проста, поскольку в ряде случаев допускает точные аналитические решения. В частности, если $f(x)$ представляет собой сумму двух дельта-функций, сосредоточенных симметрично относительно точки $x = 1/2$, то колонна может распадаться на две независимые консольные балки.

З. Бабич В. М., Чередниченко К. Д. (оба – Санкт-Петербург) “Об анзатце Фока”

ТЕОРЕМА. Пусть $U(\theta)$, $V(\theta)$ – бесконечно дифференцируемые на отрезке $[-\varepsilon, \varepsilon]$ четные функции, $U(0) = 1$. Тогда существуют линейно независимые решения $y_{\pm}$ уравнения

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + \frac{U(\theta)}{\theta} \frac{dy}{d\theta} + \left(\nu^2 + \frac{V(\theta)}{\theta^2} \right) y = 0,$$

имеющие при $\nu \rightarrow \infty$ следующие асимптотические разложения, равномерные по $\theta \in (0, \varepsilon]$:

$$(1) \quad y_{\pm}(\theta, \nu) \simeq \theta^{\mp \mu} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(\pm \mu)}(\theta) f_{n \pm \mu}(\theta, \nu),$$

где $f_p(\theta, \nu) = J_p(\theta \nu) \theta^p / \nu^p$, $p \in \mathbb{C}$; $\mu^2 = -V(0)$, $\mu \notin \mathbb{Z}_+$, $A_n^{(\pm \mu)}(\theta)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, – бесконечно дифференцируемые на $[0, \varepsilon]$ функции; J_p – функции Бесселя.

Анзатц (1) восходит к В. А. Фоку [1], см. также [2], [3]. В случае $\mu \in \mathbb{Z}_+$ анзатц более сложен. Разложения (1) определяют функции $y_{\pm}$ однозначно.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда INTAS RFBR (грант № 95-0012).

[1] Фок В. А. // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39. № 7. С. 279–283.

[2] Babich V. M., Cherednichenko K. D. // Integral Transforms and Special Functions. 1997. V. 5. № 1–2. P. 1–18.

[3] Бабич В. М. // Алгебра и анализ. 1995. Т. 3. № 5. С. 1–37.

4. Боровиков В. А. “Особенности функции Грина для нестрого гиперболических операторов”

Пусть $G(t, \mathbf{x})$ – функция Грина для нестрого гиперболического уравнения $L(\partial/\partial t, \partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)u = f$. Здесь $L(\tau, \xi)$ – однородный полином степени m , который при любых $\xi \neq 0$ имеет m вещественных корней относительно τ . Пусть S – поверхность, заданная уравнением $L(1, \xi) = 0$, Ξ – множество ее особых точек, соответствующих кратным корням. Предполагается, что Ξ – гладкое многообразие, $\text{codim } \Xi = q$, $2 \leq q \leq n$.

Как известно, в этом случае у функции Грина может возникать новая сингулярная поверхность Γ' . Автором доказано, что Γ' возникает лишь при нечетных q и при $q = 2$, найдены особенности функции Грина в окрестности Γ' (включая ее границу $\partial\Gamma'$). Множество Γ' имеет вид $\Gamma' = \bigcup_{P \in \Xi} \Gamma_P$. Здесь $\Gamma_P \subset Q_P$, где Q_P – множество всех $(t, \mathbf{x})$, для которых плоскость $\Sigma : t + (\mathbf{x}, \xi) = 0$ касается в P многообразия Ξ , с границей $\partial\Gamma_P$, состоящей из всех $(t, \mathbf{x})$, для которых Σ касается в P поверхности S . Положим $\partial\Gamma' = \bigcup_P \Gamma_P$.

Введем в проходящей через регулярную точку $M \in \partial\Gamma'$ перпендикулярной к $\partial\Gamma'$ плоскости Σ такие координаты (u, v) , чтобы пересечение Σ с характеристическим конусом имело уравнение $u = v^2$, а пересечение Σ с Γ' – уравнение $v = 0$, $u > 0$. В окрестности точки $v < 0$, $u = v^2$ характеристического конуса функция Грина $G(u, v)$ имеет [1], с точностью до более гладкого слагаемого, вид $C(M, v) f_{n/2-m+1/2}^s(u - v^2)$; $s = \pm$. Здесь $f_0^+(\xi) = \text{sign } \xi$; $f_0^- = \ln |\xi|$; функция $f_\nu^s(\xi)$ получается из f_0^s ν -кратным интегрированием; знак s определен в [1].

Пусть $F_p(u, v) = (\sqrt{u} + v)^p / \sqrt{u}$ при $u > v^2$; $F_p(u, v) = [(\sqrt{u} + v)^p + (\sqrt{u} - v)^p] / \sqrt{u}$ при $v > 0$, $0 < u < v^2$ и $F_p(u, v) = 0$ при $v > 0$, $u < 0$ или $v < 0$, $u < v^2$.

Тогда в окрестности M с точностью до более гладкого слагаемого $G(u, v) = C(M)F_p(u, v) * f_\nu^s(u)$, где s – то же, что и выше, $p = -(q-2)/2$ и $\nu = m - (n-q+7)/2$.

[1] Боровиков В. А. // Труды ММО. 1959. Т. 8. С. 199–257.

5. Киселев А. П., Перель М. В. (оба – Санкт-Петербург) “Асимптотические и соответствующие им точные локализованные решения волнового уравнения”

Построение локализованных решений гиперболических уравнений многократно привлекало внимание исследователей. В [1] для уравнения

$$(1) \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$$

с гладкой функцией c предложена основанная на лучевом методе локальная асимптотическая конструкция, сосредоточенная вблизи точки, которая движется вдоль луча со скоростью c . В случае $c = \text{const}$ мы даем примеры точных решений уравнения (1), согласующихся с теорией [1]. Среди них есть и локализованные, и не локализованные глобально.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если ε – любая положительная константа, а

$$\theta = z - ct + \frac{x^2 + y^2}{z + ct - i\varepsilon},$$

то функция

$$(2) \quad u = \frac{1}{z + ct - i\varepsilon} \exp(ip(A\theta + B)^\gamma),$$

где A , B , p и γ – произвольные постоянные, удовлетворяет уравнению (1). Далее, пусть $AB \neq 0$. Для $0 < \gamma < 1$ можно выбрать ветвь степенной функции и константы A и B так, что решение (2) имеет конечную энергию и локализовано при $p \rightarrow \infty$ в окрестности движущейся точки $x = y = 0$, $z = ct$. Для $\gamma \geq 1$ энергия бесконечна, а для $\gamma > 1$ решение неограничено.

Работа поддержана грантом РФФИ–ИНТАС № 95-0012.

[1] Бабич В. М., Улин В. В. // Записки научн. семин. ЛОМИ. 1981. Т. 117. С. 5–11.

6. Сабитов К. Б. (Стерлитамак) “Теорема о косой производной решения вырождающегося эллиптического уравнения и ее применение к уравнениям смешанного типа”

В области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, рассматривается уравнение

$$(1) \quad Lu \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = 0,$$

эллиптическое в D и, вообще говоря, вырождающееся на ∂D . При предположении $c(x) \leq 0$ и некоторых ограничениях на коэффициенты $b_i(x)$ доказана

ТЕОРЕМА. Если решение $u(x)$ уравнения (1) имеет изолированный максимум в точке $x^0 \in \partial D$ границы области D , удовлетворяющей условию конуса, то в любой окрестности x^0 найдется такая точка $x^1 \in \partial D$, что $\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x^1) > 0$, где γ – направление, образующее острый угол с внешней нормалью к ∂D .

Аналогичное утверждение впервые было доказано Н. С. Надирашвили в случае, когда оператор L является равномерно эллиптическим в D . Л. И. Камынин распространил результат Н. С. Надирашвили на слабо вырождающиеся эллиптические уравнения.

С помощью сформулированной выше теоремы установлен принцип экстремума для уравнений смешанного типа на плоскости с негладкой линией перемены типа.

7. Колесов А. Ю. (Ярославль), Розов Н. Х. “Явление буферности в математической модели генератора Ван-дер-Поля с распределенными параметрами”

Математической моделью генератора Ван-дер-Поля с распределенными параметрами является гиперболическая краевая задача

$$(1) \quad \begin{aligned} u_t &= v_x, & v_t &= u_x - \varepsilon v + \varepsilon[(\varepsilon/4 + \varepsilon^2\gamma)u|_{x=1} - u^3|_{x=1}], \\ v|_{x=0} &= v|_{x=1} = (\varepsilon/4 + \varepsilon^2\gamma)u|_{x=1} - u^3|_{x=1}; \end{aligned}$$

здесь $0 < \varepsilon \ll 1$ и $\gamma \sim 1$. Рассмотрим краевую задачу

$$(2) \quad w_{tx} = w + \lambda(1 - w^2)w_x, \quad w(t, x+1) \equiv -w(t, x),$$

где $\lambda = 16\gamma$, получающуюся из задачи (1) в результате процесса нормализации [1] и “сворачивания” нормальной формы – счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений – в скалярное уравнение.

ТЕОРЕМА. Если задача (2) имеет периодическое решение $w = w_0(\xi)$, $\xi = \sigma_0 t + x$, экспоненциально орбитально устойчивое или дихотомичное (в метрике W_2^1), то при всех $0 < \varepsilon \ll 1$ в задаче (1) ему соответствует цикл (периодическое по t решение) той же устойчивости.

Для задачи (2) в предположении $0 < \lambda \ll 1$ устанавливается феномен буферности, т.е. существование – при надлежащем выборе λ – любого числа устойчивых циклов. Специальный физический эксперимент подтверждает реализуемость этого феномена.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

[1] Колесов Ю. С. // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 3. С. 121–136.

8. Пламеневский Б. А. (Санкт-Петербург) “Задача Коши–Дирихле для волнового уравнения в областях с ребрами”

Утреннее заседание 23 января 1998 г., секция 1.

Заседание было посвящено памяти Е. М. Ландиса.

1. Ибрагимов А. И., Ландис Е. М. “О поведении на бесконечности решений смешанной задачи для параболических уравнений в неограниченных областях”

Рассматривается смешанная задача типа задачи Зарембы для уравнения

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

в $G = D \times (-\infty, 0]$ с граничными условиями $u = f(x, t)$ на Γ_1 , $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ на Γ_2 . Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial G$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, Γ_1 – компакт, f – непрерывная функция такая, что $f(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, D – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$.

Исследуется вопрос о регулярности бесконечно удаленной точки. Пусть $G(T) = G \cap \{t \geq -T\}$ и $F(x, t)$ – непрерывная в $\overline{G(T)}$ функция. Тогда существует обобщенное по Ландису [1] решение $u_T(x, t)$ задачи

$$Lu_T = 0 \text{ в } G(T), \quad u_T = F(x, t) \text{ при } t = -T, \quad \frac{\partial u_T}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma_2, \quad u_T = f(x, t) \text{ на } \Gamma_1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Бесконечно удаленная точка называется регулярной, если для любой функции $F(x, t)$ существует предел $\lim_{T \rightarrow \infty} u_T(x, t)$.

ТЕОРЕМА. Для регулярности бесконечно удаленной точки достаточно, чтобы при любом α расходился ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{\frac{n}{2}, \alpha}(\Gamma_1 \cap \{-(m+1) \leq t \leq -m\})$.

Здесь $\gamma_{\frac{n}{2}, \alpha}$ – тепловые емкости (см. [1]).

[1] Ландис Е. М. // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. № 3. С. 517–520.

2. Гервер М. Л. “Ширина многоугольника”

Если вырезанный из картона выпуклый многоугольник можно, непрерывно двигая по столу, протащить между двумя гвоздями, вбитыми в стол на расстоянии 1, то его, разумеется, можно протащить и между гвоздями, вбитыми на расстоянии $r > 1$. Спрашивается: *верно ли то же самое и для любого невыпуклого многоугольника?*

При дополнительных ограничениях утвердительный ответ на этот вопрос дан в [1]. Методы и результаты [1] послужили основой для построений [2], где положительный ответ получен для любого многоугольника. Кроме того, в [2] доказана следующая теорема двойственности:

Минимальное расстояние w_M между двумя точками в $\mathbb{R}^2$, позволяющее протащить плоский многоугольник M между ними, назовем *шириной* M . Пусть A и B — две точки на границе P многоугольника M . Ясно, что если длина d отрезка AB не слишком велика, то его можно непрерывно протащить вдоль P — так, что его концы A и B все время будут находиться на P и отрезок AB , сделав полный оборот вокруг M , вернется в исходное положение.

Спрашивается: *каково максимальное значение d_M длины d , допускающее такое перемещение концов отрезка по границе M ?*

Оказывается, d_M в точности равно ширине w_M многоугольника M .

[1] Goodman J. E., Pach J., Yip C. K. // Amer. Math. Monthly. 1989. V. 96. P. 494–510.

[2] Гервер М. Л. // Матем. просвещение. 1998. № 2. С. 173–191.

3. Космодемьянский А. А. (мл.) “О положении опасных точек в задаче кручения упругих стержней”

Функция $u(x, y)$ напряжений в задаче кручения упругих призматических стержней является решением следующей краевой задачи:

$$\Delta u = -1 \text{ в области } D, \quad u|_{\Gamma} = 0,$$

где D — сечение стержня, а Γ — граница этого сечения.

Величина $\tau = \max_{\Gamma} |\nabla u|$ — максимум модуля касательных напряжений достигается в некоторой точке границы, которая называется опасной. В докладе даются оценки, которые позволяют выделить на Γ участки, свободные от опасных точек.

Пусть $|D|$ — площадь области D , а $|\Gamma|$ — периметр Γ . Область D предполагается выпуклой, а ее граница — достаточно гладкой.

Определение положения опасных точек базируется на двусторонних оценках τ .

ТЕОРЕМА. *Кривизна K границы Γ в опасной точке удовлетворяет неравенству*

$$K \leq \frac{|\Gamma|}{2|D|}.$$

Из приведенной теоремы следует, в частности, что точка, где кривизна границы Γ максимальна, не может быть опасной.

Другие результаты получены сравнением решения в области D с решением в описанном прямоугольнике.

4. Надирашвили Н. С. “Гармонические функции с конечным числом узловых линий”

5. Туваев М. В. “Теорема об устранимой особой точке решения бесконечномерного уравнения Лапласа”

Рассмотрим на пространстве финитных последовательностей $\mathbb{R}^\infty$ цилиндрическую алгебру множеств. На ней определим цилиндрическую меру E , порожденную конечномерными распределениями с плотностями, равными фундаментальным решениям n -мерных лапласианов.

Меру E нельзя продолжить до σ -аддитивной меры на σ -алгебру борелевских подмножеств пространства l_2 . Но для пространства H , полученного из $\mathbb{R}^\infty$ замыканием по норме $\|x\| = (\sum (x_k^2/k^6))^{1/2}$, справедлив следующий факт.

ЛЕММА. Мера E продолжается до σ -аддитивной меры на σ -алгебру борелевских подмножеств пространства H .

ЗАМЕЧАНИЕ. Вместо k^6 можно взять любую последовательность, растущую не медленнее, чем k^6 .

Пусть Ω – борелевское подмножество H . Ограниченную на Ω меру μ будем называть гармонической, если тождество

$$\int (\varphi_{x_1 x_1} + \varphi_{x_2 x_2} + \dots) \cdot \mu = 0$$

выполнено для любой функции φ , обладающей следующими свойствами: производные $D_x^\alpha \varphi$, где $|\alpha| \leq 3$, непрерывны и равны нулю в окрестности $\partial\Omega$; нормы $\|\varphi(\cdot, \dots, \cdot, x_{n+1}, \dots)\|_{C^3(\mathbb{R}^n)}$ ограничены постоянной, не зависящей ни от x , ни от n . (Примером может служить функция вида $\varphi(\|x\|)$.)

ТЕОРЕМА. Пусть μ – гармоническая в $\{0 < \|x\| < 1\}$, и

$$(1) \quad n|\mu|(\{x_1^2 + \dots + x_n^2 < r^2\})/r^2 \rightarrow 0 \quad (r + 1/n \rightarrow 0).$$

Тогда μ – гармоническая в $\{\|x\| < 1\}$.

Условие (1) существенно, так как для меры E предел левой части (1) равен $1/2$.

6. Багиров Л. А., Кондратьев В. А. “Асимптотика решений полулинейных краевых задач”

В области $\Omega = G \times \mathbb{R}$ ($G \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей Γ , $x \in G$, $t \in \mathbb{R}$) рассматриваются задачи:

$$(1) \quad \partial_t u = A(x, \partial_x)u + f(u), \quad \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0;$$

$$(2) \quad \partial_t u = A(x, \partial_x)u + f(u), \quad u|_{\partial\Omega} = 0;$$

здесь $A(x, \partial_x) = \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} (a_{ij}(x) \partial_{x_j})$;

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \delta |\xi|^2, \quad \delta > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n;$$

$a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ – вещественные гладкие коэффициенты, ∂_ν – производная по ко нормали к Γ . В случае $f(u) = \mu u - u^3$ справедлива следующая

ТЕОРЕМА. Если задача $A(x, \partial_x)v(x) + \mu v(x) = 0$, $\partial_\nu v|_\Gamma = 0$ ($A(x, \partial_x)v(x) + \mu v(x) = 0$, $v|_\Gamma = 0$) имеет нетривиальное решение, то существует такое $N_1 > 0$, что при $N > N_1$ задача (1) (задача (2)) имеет решение вида

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^N t^{-1/2-k} \sum_{j=0}^k p_{kj}(x) \ln^j t + v_N(x, t),$$

где $v_N(x, t) = o(t^{-1/2-N})$ при $t \rightarrow +\infty$.

Аналогичные результаты справедливы для $f(u) = \mu u - u^2$, $f(u) = \mu u - |u|^2 u$.

Утверждение из линейной теории уравнений с операторными коэффициентами, необходимые для доказательства теоремы, изложены авторами в работе: Багиров Л. А., Кондратьев В. А. Об асимптотических свойствах решений уравнения диффузии. I. Уравнение с операторным коэффициентом. Препринт Института проблем механики РАН № 605, 1997.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00504).

7. Коньков А. А. “Сингулярные решения эллиптических неравенств”

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $n \geq 2$, $0 \in \overline{\Omega}$, $L = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$, где $\lambda^{-1} |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \lambda |\xi|^2$ для некоторого $\lambda > 0$ при всех $x, \xi \in \mathbb{R}^n$. Обозначим: $D = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, $Q_r^x = \{y : |y - x| < r\}$, $B_r^x = \{y : |y - x| \leq r\}$, $S_r^x = \{y : |y - x| = r\}$, $\text{cap}(K, \omega) = \inf_{\varphi \in \Gamma} \int_{\omega} |\nabla \varphi|^2 dx$, где $\Gamma = \{\varphi \in C_0^\infty(\omega) : \varphi|_K = 1\}$. Пусть далее $1 < \sigma$, $0 \leq R < R_0 < R_*$, $\sigma R_0 \leq R_*$, $\Omega \subset Q_{R_*}^0$, $S_{R_0}^0 \cap \Omega \neq \emptyset$, $1 < \nu$, $0 < \delta < 1$, $1/(1-\delta) < \theta$, $1 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_4$, и притом $F: \Omega \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f: (R, R_*) \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ и $\Lambda: (0, R_*) \rightarrow [0, \infty)$ – измеримые функции такие, что $\forall \varepsilon, T \in (0, \infty)$ $F \in L_\infty((\Omega \setminus Q_\varepsilon^0) \times [0, T])$, и одновременно $\forall r \in (R, R_0)$, $t \in (0, \infty)$

$$f(r, t) \leq \text{ess inf}_{x \in \Omega \cap Q_{r\sigma}^0 \setminus (Q_{\frac{r}{\theta}}^0 \cup Q_R^0)} F(x, t), \quad f(r, t-0) = f(r, t)$$

и

$$\Lambda(r) \leq \inf_{x \in \Omega \cap Q_{r\theta}^0 \setminus (Q_{\frac{r}{\theta}}^0 \cup Q_R^0)} \mu^2(x; \delta, \nu) + r^{-n} \text{cap}(D \cap B_{r\sigma_3}^0 \setminus Q_{r\sigma_2}^0, Q_{r\sigma_4}^0 \setminus B_{r\sigma_1}^0),$$

где $\mu(x; \delta, \nu) = \sup_{\rho \in (0, \delta|x|)} \rho^{1-n} \text{cap}(D \cap B_\rho^x, Q_{\nu\rho}^x)$. Допустим также, что F, f не убывают по второму аргументу и $f|_{[R_0, R_*) \times (0, \infty)} = 0$, $\Lambda|_{(R_0/\theta, R_*)} = 0$.

ТЕОРЕМА. Пусть w – неотрицательное решение неравенства $Lw \geq F(x, w)$ в области $\Omega \setminus B_{R_*}^0$, удовлетворяющее условиям $w|_{(\partial\Omega) \setminus B_R^0} = 0$ и $\text{ess sup}_{\Omega \cap S_{R_0}^0} w > 0$. Тогда найдутся постоянные $\alpha > 0$ и $a > 0$, зависящие от n, σ и λ , постоянная $\beta > 0$, зависящая от σ , и постоянная $\gamma > 0$, зависящая от $n, \lambda, \delta, \nu, \theta$ и σ_j ($j = 1, \dots, 4$), такие, что справедливо следующее утверждение: на всем промежутке (R, R_*) существует решение уравнения $m'' + \frac{n-1}{r} m' = \alpha f(r, \beta m) + \gamma \Lambda(r) m$, удовлетворяющее условиям $m(R_*) = 0$ и $m(R_0) = a \text{ess sup}_{\Omega \cap S_{R_0}^0} w$, для которого при всех $r \in (R, R_0]$ имеет место оценка $\text{ess sup}_{\Omega \cap S_r^0} w \geq m(r)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-15-96177).

8. Ильяшенко Ю. С., Городецкий А. С. “Случайные динамические системы как подсистемы гладких”

Под (универсальной) случайной динамической системой будем понимать отображение

$$(1) \quad F: \Sigma^k \times M \rightarrow \Sigma^k \times M, \quad (\omega, x) \mapsto (\sigma\omega, f(\omega, x)),$$

где Σ^k – пространство двусторонних последовательностей из k символов, σ – сдвиг Бернулли, M – замкнутое многообразие.

ТЕОРЕМА. Пусть типичное однопараметрическое семейство векторных полей $\{X_\varepsilon\}$ содержит такое векторное поле X_0 , что X_0 имеет седлоузловой цикл L с k гладкими гомоклиническими торами. Пусть U – малая окрестность объединения этих торов и самого цикла. Тогда (возможно, после перепараметризации) все поля X_ε при $\varepsilon < 0$

имеют неблуждающее множество, состоящее из двух гиперболических циклов, стремящихся к L при $\varepsilon \rightarrow 0$. Все поля X_ε при $\varepsilon > 0$ имеют инвариантное множество Λ , содержащее все неблуждающие точки X_ε и обладающее следующим свойством. Существуют глобальное сечение Γ , трансверсальное X_ε , и отображение $\Delta_\varepsilon: G \rightarrow G'$, $G \subset \Gamma$, $G' \subset \Gamma$ вдоль орбит X_ε . Ограничение отображения Δ_ε на некоторое инвариантное подмножество Λ_ε топологически сопряжено с отображением класса (1) при $M = S^1$. Кроме того, существует такое сюръективное отображение $\Phi_\varepsilon: \Lambda_\varepsilon \rightarrow \Sigma^k$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_\varepsilon & \xrightarrow{\Delta_\varepsilon} & \Lambda_\varepsilon \\ \Phi_\varepsilon \downarrow & & \downarrow \Phi_\varepsilon \\ \Sigma^k & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma^k \end{array}$$

коммутативна, и слои $\Phi_\varepsilon^{-1}\omega$ являются C^r -вложенными окружностями S^1 (чем меньше ε , тем больше r). Соответствующее вложение (как элемент пространства C^r -вложений $S^1 \rightarrow \Gamma$) гёльдерово зависит от ω .

Бифуркация, описанная в теореме, впервые рассмотрена в [1].

[1] Афраймович В. С., Шильников Л. П. // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219. № 3. С. 1281–1285.

Утреннее заседание 23 января 1998 г., секция 2.

1. Волович И. В. “Эргодические свойства суперструнной динамической системы”

2. Жибер А. В. (Уфа) “О структуре высших инвариантов Лапласа для нелинейных гиперболических уравнений, интегрируемых по Дарбу”

Рассматривается задача описания всех уравнений вида

$$(1) \quad u_x u_y = a(x, y, u_x, u_y),$$

для которых существуют функции $\omega(x, y, u, u_x, u_y, \dots)$ и $\bar{\omega}(x, y, u, u_x, u_y, \dots)$ такие, что для любого решения $u(x, y)$ уравнения (1) ω и $\bar{\omega}$ не зависят от y и x соответственно. В работе [1] получен конструктивный критерий интегрируемости по Дарбу в терминах высших инвариантов Лапласа оператора линеаризации. Таким образом, решение классификационной задачи сведено к исследованию структуры инвариантов h_k , заданных формулами $h_0 = a_u + a_{u_x} a_{u_y} - D_x a_{u_x}$,

$$h_{-1} = a_u + a_{u_x} a_{u_y} - D_y a_{u_y}, \quad 2h_i - h_{i+1} - h_{i-1} = D_x D_y \ln h_i, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ТЕОРЕМА 1. Для уравнений, интегрируемых по Дарбу, исключая уравнения типа Лувилля ($\text{ord } \omega = \text{ord } \bar{\omega} = 2$) и уравнения с нулевым инвариантом Лапласа, при $\text{ord } \omega \geq \text{ord } \bar{\omega}$ выполняется одно из следующих условий: 1) $\text{ord } h_k \leq 1$ для любого k ; 2) $h_{-k} = \frac{\alpha_{k-2}(u_k + p_k)}{(u_{k-1} + p_{k-2})^2}$, $k = 2, 3, \dots, n-1$, $h_{-n} = 0$, $h_k = \frac{\lambda_k(u_{k+2} + q_{k+1})}{(u_{k+1} + q_k)^2}$, $k = 1, 2, \dots, n-3$, при этом либо $h_{n-2} = 0$, либо $\text{ord } h_{n-2} < n-1$ и $h_{n-1} = 0$; 3) $\text{ord } \omega = \text{ord } \bar{\omega}$, $h_k = \frac{\lambda_k(u_{k+2} + q_{k+1})}{(u_{k+1} + q_k)^2}$, $k = 1, 2, \dots, n-2$, $h_{n-1} = 0$; порядок функций α_k , p_k , λ_k , q_k по переменным $u_1, u_2, \dots$ ($u_k = D_x^k u$) не более чем k , а $n = \text{ord } \omega$.

Теорема 1 позволяет составить список уравнений, интегрируемых по Дарбу.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00382).

[1] Sokolov V. V., Zhiber A. V. // Phys. Letters A. 1995. V. 208. P. 303–308.

3. Кочубей А. Н. (Украина, Киев) “*p*-адический бесконечномерный анализ”
4. Бормисов А. А., Гудкова Е. С., Мукминов Ф. Х. (все — Уфа) “Об алгебрах Ли, связанных с гиперболическими системами типа уравнения Риккати”
5. Новокшенов В. Ю. (Уфа), Шагалов А. Г. (Екатеринбург) “Решения типа связанных состояний для эллиптического уравнения “синус-Гордон””
Основные результаты доклада опубликованы в статьях [1], [2].
- [1] Novokshenov V. Yu., Shagalov A. G. // Phys. D. 1997. V. 106. P. 81–94.
- [2] Новокшенов В. Ю., Шагалов А. Г. // ТМФ. 1997. Т. 111. № 1. С. 15–31.
6. Фоменко А. Т. “Симметрии бифуркаций интегрируемых систем”
7. Шавгулидзе Е. Т. “Решение супераналога уравнения Шрёдингера с помощью функциональных интегралов”

На гильбертовом суперпространстве H (см. [1]) доказано существование функциональных интегралов вида $\int f(x)e^{iP(x)}\Phi(dx)$, где Φ — обобщенная мера Фейнмана, порожденная суперскалярным произведением, f — аналитическая функция на суперпространстве H , роста не выше экспоненциального, P — полином четной степени, удовлетворяющий ограничениям, аналогичным тем, которые приведены в [2]. Описанный класс интегралов позволяет представить в виде интеграла Фейнмана по пространству непрерывных траекторий со значениями в конечномерном суперпространстве $R^{n,m}$ фундаментальное решение задачи Коши для супераналога уравнения Шрёдингера $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{i}{2}\Delta u(t,x) + iv(x)u(t,x)$, где v — полином четной степени на $\mathbb{R}^{n,m}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

- [1] Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309. № 5. С. 545–550.
- [2] Шавгулидзе Е. Т. // Докл. АН. 1996. Т. 348. № 6. С. 743–745.

8. Шафаревич А. И. “Уравнения на графиках и асимптотические решения типа “узких струй” системы Навье–Стокса”

Вытянутые вихри в несжимаемой жидкости описываются асимптотическими при $\varepsilon \rightarrow 0$ решениями трехмерных уравнений Навье–Стокса $(v, \nabla)v + \nabla p = \varepsilon^2 \nu \Delta v$, $(\nabla, v) = 0$ вида $v = V(x) + U(y/\varepsilon, s) + \dots$. Здесь $V(x)$ — гладкое решение трехмерных стационарных уравнений Эйлера, y — двумерный вектор координат в нормальной плоскости к гладкой замкнутой траектории $\gamma \subset R^3$ векторного поля V , s — натуральный параметр на γ .

ТЕОРЕМА. Пусть существует асимптотическое решение $\text{mod } o(1)$ указанного вида системы Навье–Стокса. Тогда

1. Вектор $u(\tau, s)$ нормальных к γ компонент вектора $U(\tau, s)$ удовлетворяет по “быстрым” переменным τ двумерным стационарным уравнениям Эйлера, а проекция w вектора $U + V|_\gamma$ на эту кривую постоянна на траекториях поля u .

2. Интеграл Бернулли $B_0(\tau, s)$ двумерного потока $u(\tau, s)$ и функция w удовлетворяют уравнениям, обобщающим уравнения Прандтля теории пограничного слоя:

$$\begin{cases} w \frac{\partial w}{\partial s} + a \frac{\partial w}{\partial I} + \frac{\partial \pi}{\partial s} = \nu \frac{\partial}{\partial I} \mathcal{D}^2 \frac{\partial}{\partial I} w; & \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial a}{\partial I} = 0; \\ w \frac{\partial B}{\partial s} + a \frac{\partial B}{\partial I} = \nu \left(\frac{\partial}{\partial I} \mathcal{D}^2 \frac{\partial}{\partial I} B - \Lambda^2 \right), \end{cases}$$

где $B = B_0 + (w^2 - W^2)/2$, $\Lambda^2 = (\text{rot}_\tau u)^2 + \mathcal{D}^2(\partial w / \partial I)^2$, W — проекция поля V на γ , функции $\mathcal{D}$, π выражаются через u . Параметр I — переменная действия двумерного бездивергентного поля u ; он меняется на графе Γ — факторе плоскости по траекториям этого поля. Функции w и B непрерывны на Γ , а функции a , $\mathcal{D}^2 \partial B / \partial I$, $\mathcal{D}^2 \partial w / \partial I$ в его вершинах удовлетворяют условиям Кирхгофа теории электрических цепей.

Утреннее заседание 23 января 1998 г., секция 3.

1. Азизов Т. Я. (Воронеж) “О замкнутости линейного операторного пучка”

Пусть $L(\lambda) = A + \lambda B$ – линейный пучок с равномерно положительно самосопряженными операторами (р.п.с.о.) A и B , действующими в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Следовательно, $\lambda = 0$ – общая регулярная точка операторов A и B ($0 \in \varrho(A) \cap \varrho(B)$) или, что эквивалентно, $\{0, \infty\} \subset \varrho(L)$. Изучается вопрос о включении $\mathbb{R}^+ \subset \varrho(L)$. Построен пример, показывающий, что не для всякой пары $\{A, B\}$ р.п.с.о. справедливо это включение. Доказаны следующие общие утверждения.

1°. Пусть A и B – произвольные замкнутые операторы с $\text{dom } A \subset \text{dom } B$, $0 \in \varrho(A)$ и $\alpha := \inf\{\text{Re}(Ax, Bx)/(\|Ax\| \|Bx\|) \mid 0 \neq x \in \mathcal{H}\} > -1$. Тогда $A + B$ – замкнутый оператор.

2°. Пусть A и B – произвольные замкнутые операторы с $\text{dom } A = \text{dom } B$, $\mathbb{R}^+ \subset \varrho(L)$. Тогда $\alpha > -1$.

Из этих утверждений немедленно получаем основной результат.

ТЕОРЕМА. Пусть A, B – максимальные равномерно аккретивные операторы (в частности, р.п.с.о.) с $\text{dom } A = \text{dom } B$. Тогда следующие требования эквивалентны: (а) $\mathbb{R}^+ \subset \varrho(L)$; (б) $\mathbb{R}^+$ – подмножество точек регулярного типа для L ; (в) $L(\lambda)$ – замкнутый оператор $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$; (г) $\alpha > -1$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-15-96091).

2. Барсуков А. И. (Воронеж) “О подобии полугруппы J -бисжатий полугруппе сжатий”

Известна теорема В. Sz.-Nagy о подобии ограниченной группы операторов, действующих в гильбертовом пространстве, группе унитарных операторов. Е. W. Packel [1] построил пример полугруппы класса (C_0) , не подобной никакой полугруппе сжатий. Предметом нашего доклада являются полугруппы класса (C_0) , состоящие из J -бисжатий [2]. Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА. Пусть $V(t)$ – полугруппа класса (C_0) , состоящая из J -бисжатий, действующая в пространстве Крейна. Если она содержит оператор класса (H) [2], то она подобна полугруппе сжатий в гильбертовом пространстве.

[1] Packel E. W. // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. V. 21. P. 240–244.

[2] Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986.

3. Бланк М. Л. “Теорема Мозера об инвариантной кривой и ошибки округления”

Классический результат Мозера о существовании инвариантной кривой при достаточно гладких малых возмущениях закручивающих (twist) отображений не работает в случае ошибок округления, неизбежно возникающих при моделировании на ЭВМ. Однако численные результаты демонстрируют картину, полностью аналогичную результатам теории КАМ: инвариантное множество пространственно дискретизированной двумерной системы состоит из кластеров точек, заполняющих квазиокружности, между которыми имеются значительные промежутки. Поскольку в рассматриваемом дискретном случае эти квазиокружности не разделяют фазовое пространство, то основной задачей здесь является вопрос о возможности или невозможности ухода траектории дискретизированной системы на бесконечность.

Напомним, что отображение F кольца $\mathcal{A} := \{(\varphi, r) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r_- \leq r \leq r_+ < \infty\}$ в $\mathbb{R}^2$ называется *закручивающим*, если в полярных координатах оно может быть записано в виде $(\varphi, r) \rightarrow (\varphi + \Phi(r) \pmod{1}, r)$, где $\Phi(r) \in C^\infty$ и $|d\Phi(r)/dr| > 0$. Через ε будем обозначать величину ошибки округления (диаметр дискретизации), а через F_ε – дискретизированное отображение.

ТЕОРЕМА. Для любых двух концентрических колец $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для каждого $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ при любом $(\varphi, r) \in \mathcal{A}_1$ выполнено $F_\varepsilon^n(\varphi, r) \in \mathcal{A}_2$ для всех $n \in \mathbb{Z}^+$. Если же $|d\Phi(r)/dr| > c > 0$ равномерно по r , то для каждого $\varepsilon > 0$ все траектории F_ε являются асимптотически периодическими.

4. Кожанов А. И. (Новосибирск) “Уравнения составного типа и обратные задачи”

Доклад посвящен одному из приложений теории уравнений составного типа – именно, к теории обратных задач для уравнений с частными производными.

Пусть D есть ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей Γ , и пусть l есть оператор

$$l = \alpha^k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} + \alpha(x).$$

Выделим множества $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_0$ на Γ :

$$\sigma_1 = \{x \in \Gamma : \alpha^k(x) \nu_k(x) > 0\}, \quad \sigma_2 = \{x \in \Gamma : \alpha^k(x) \nu_k(x) < 0\},$$

$$\sigma_0 = \{x \in \Gamma : \alpha^k(x) \nu_k(x) = 0\}$$

($\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$) – вектор внутренней нормали к Γ в точке x).

Обратная задача I: найти функции $u(x)$ и $q(x)$ из условий

$$(1) \quad \Delta u + b(x)u = a(x)q(x) + f(x),$$

$$(2) \quad q(x) \text{ принадлежит ядру оператора } l,$$

$$lu|_{\sigma_1 \cup \sigma_2} = f_1(x), \quad u|_{\sigma_1 \cup \sigma_0} = f_2(x).$$

Обратная задача II: найти функции $u(x)$ и $q(x)$, удовлетворяющие (1), (2) и условиям

$$u|_\Gamma = f_1(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\sigma_1} = f_2(x).$$

Сформулированные задачи сводятся к краевым задачам для уравнений составного типа. Используя результаты об их разрешимости, получаем теоремы существования для обратных задач I и II.

С помощью перехода к уравнениям составного типа можно исследовать обратные задачи и для других классов уравнений, а также некоторые нелинейные задачи.

5. Прилепко А. И. “Обратные задачи теории излучения и теории рассеяния”

Пусть $u(x; \Omega, \rho)$ – акустический потенциал ограниченной области Ω в $\mathbb{R}^3$ с заданной плотностью ρ . Предполагается, что $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ лежит в шаре $|x| < R$, $R > 0$, а $\rho(x) \neq 0$ почти всюду в этом шаре и $\rho \in C^1$. Функция $u(x) := u(x; \Omega, \rho)$ удовлетворяет условиям излучения Зоммерфельда и имеет асимптотическое представление

$$u(x) = r^{-1} \exp(ikr) F_0^\Omega(k; \omega) + O(r^{-2}) \quad \text{при } r \rightarrow \infty,$$

где $x = (r, \omega)$, $r = |x|$, $|\omega| = 1$, $k > 0$.

Обратная задача (О.З.): найти область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ по заданной амплитуде рассеяния $F_0^\Omega(k; \omega)$ при фиксированном $k > 0$.

Пусть $\lambda_0 > 0$ – первое собственное значение оператора $-\Delta$ в шаре $|x| < R$ с данными Дирихле, S_σ – произвольное открытое подмножество единичной сферы. Рассмотрим класс внешне-контактных областей Ω (см. [1]).

ТЕОРЕМА. Пусть заданы число $k \in (0, \lambda_0^{1/2})$ и функция $\rho(x) > 0$. Если для двух внешне-контактных областей Ω_1 и Ω_2 выполняется равенство $F_0^{\Omega_1}(k; \omega) = F_0^{\Omega_2}(k; \omega) \forall \omega \in S_\sigma$, то $\Omega_1 = \Omega_2$.

Рассматриваются также вопросы единственности и существования решения О.З. при $k \geq 0$ для произвольной односвязной области и решения обратной задачи рассеяния.

[1] Прилепко А. И. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1986. № 6. С. 78–81.

6. Данилов В. Г., Шелкович В. М. (Санкт-Петербург) “Взаимодействие бесконечно узких солитонов в системах гиперболических уравнений первого порядка”

Известно, что уравнение Хопфа $u_t + uu_x = 0$ имеет решение в виде бесконечно узкого солитона, которое можно получить как слабый предел солитонного решения уравнения КдФ при стремлении к нулю дисперсии. Доказана

ТЕОРЕМА. Уравнение Хопфа имеет обобщенное решение, содержащее два бесконечно узких солитона и представимое асимптотической формулой

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{k=1}^2 [g_k(t) y \delta(x - \varphi_k(t, y)) + e_k(x, t) y \theta(x - \varphi_k(t, y))], \quad y \rightarrow +0.$$

Здесь $u_0(x, t)$ – гладкое решение уравнения Хопфа; $\varphi_k = \varphi_{k0}(t) + y\varphi_{k1}(\tau)$, $\tau = (t - t^*)/y$, t^* – момент “слияния” солитонов; $(\varphi_{11}(\tau), \varphi_{21}(\tau))$ – решение системы

$$\partial_\tau \varphi_{k1} - g_{3-k}(t^*) \int \omega(\eta) \omega(\eta v_{3-k}^\alpha / v_k^\alpha + (M\tau + \varphi_{11} - \varphi_{21}) v_{3-k}^\alpha) d\eta = 0$$

с условиями $\varphi_{k1}(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow -\infty$ ($k = 1, 2$), где $\alpha > 0$, $M = [g_1(t^*) - g_2(t^*)]/(2\pi)$, $\omega(\eta) = 1/(\pi(\eta^2 + 1))$, $v_k = (\partial_t \varphi_{k0})(t^*)$. Функции g_k удовлетворяют уравнениям $\partial_t g_k = g_k e_k(\varphi_{k0}(t), t)/(2\pi)$, где $(\varphi_{k0}(t), e_k(x, t))$ – решение системы

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi_{k0}(t) - 2u_0(\varphi_{k0}(t), t) - g_k(t)/(2\pi) &= 0, \\ \partial_t e_k(x, t) + 2\partial_x [u_0(x, t) e_k(x, t)] &= 0 \quad \text{при } x > \varphi_{k0}(t). \end{aligned}$$

Предел решения при $\tau \rightarrow +\infty$ дает сдвиг фаз, отражающий эффект нелинейного взаимодействия солитонов. Результаты переносятся на случай одномерных строго гиперболических систем.

7. Омельянов Г. А. “Обрывание цепочки Гюгонио на примере задачи о движении ударной волны”

Динамика сингулярности в нелинейных средах описывается системой условий типа Гюгонио. В общем случае эта система является незамкнутой, т.е. любые N уравнений содержат $N + l$, $l \geq 1$, неизвестных функций. Поэтому возникает задача об обрывании цепочки условий Гюгонио. В докладе рассматривается динамика ударной волны для уравнения Хопфа $u_t + (u^2)_x/2 = 0$, $x \in \mathbb{R}^1$, $t > 0$, с начальным условием $u|_{t=0} = H^0(x) + A^0(x)\theta(x - \varphi(0))$.

Пусть траектория ударной волны задается равенством $x = \varphi(t)$. Тогда должны выполняться условия типа Гюгонио

$$\begin{aligned} (1) \quad \varphi_t &= \frac{1}{2}(H_0 + g_0), \quad H_{kt} + \frac{k+1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^k H_j H_{k+1-j} - H_{k+1} A_0 \right\} = 0, \\ g_{kt} + \frac{k+1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^k g_j g_{k+1-j} + g_{k+1} A_0 \right\} &= 0, \quad A_0 = H_0 - g_0, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

для φ и вспомогательных функций $H_k(t)$, $g_k(t)$. Пусть равенство $x = \psi(t)$ задает траекторию, вычисляемую из оборванной на N -м члене цепочки, т.е. (1) при $H_{N+l} = g_{N+l} = 0$, $l \geq 1$. Обозначим $\sigma(t) = \varphi(t) - \psi(t)$.

ТЕОРЕМА. Пусть $N \geq 1$, $A^0(\varphi(0)) < 0$, $H_x^0 > 0$, $A_x^0 > 0$. Тогда

$$|\sigma(t)| \leq \frac{c}{N} \left(\frac{a_0}{2} t \right)^{N+2} \quad \text{при } t < t^*, \quad |\sigma(t)| \leq \frac{c}{N} \left(\frac{a_0}{2} t e^{a_0 t/2} \right)^N \quad \text{при } t > t^*,$$

где $a_0 = \max_{0 \leq t' \leq t} |A_0(t')|$ – максимум амплитуды разрыва, $t^* = 2\kappa/a_0$, $\kappa \exp(\kappa) = 1$.

8. Тешуков В. М. (Новосибирск) “Задача о распаде произвольного разрыва для уравнений вихревой мелкой воды”

Рассматривается система интегродифференциальных уравнений,

$$(1) \quad \begin{cases} u_t(x, \lambda, t) + u(x, \lambda, t)u_x(x, \lambda, t) + g \int_0^1 H_x(x, \lambda', t) d\lambda' = 0, \\ H_t(x, \lambda, t) + (u(x, \lambda, t)H(x, \lambda, t))_x = 0, \end{cases}$$

описывающая в длинноволновом приближении распространение волн на поверхности завихренного потока идеальной несжимаемой жидкости. При определенных предположениях (1) является гиперболической системой, имеющей дискретный $\{k^i\} = \{k^i(x, t)\}$ ($i = 1, 2$) и непрерывный $\{k^\lambda\} = \{u(x, \lambda, t)\}$, $\lambda \in [0, 1]$, спектры характеристических скоростей $dx/dt = k[1], [2]$. Задача о распаде произвольного разрыва для (1) с начальными условиями

$$(2) \quad (u, H)|_{t=0} = \begin{cases} (u_0^+(\lambda), H_0^+(\lambda)), & x > 0, \\ (u_0^-(\lambda), H_0^-(\lambda)), & x < 0, \end{cases}$$

для этой системы описывает взаимодействие двух сдвиговых потоков с заданными параметрами на бесконечности.

ТЕОРЕМА. Пусть $(du_0^\pm/d\lambda)(H_0^\pm)^{-1} = \omega^\pm = \text{const}$, $\|u_0^\pm\|_{C^1} < \infty$, $\|H_0^\pm\|_C < \infty$, $1/2 < \omega^+/\omega^- < 2$. Тогда существует такая постоянная $a > 0$, что при $\|u_0^+ - u_0^-\|_{C^1} < a$, $\|H_0^+ - H_0^-\|_C < a$ задача (1), (2) имеет автомодельное решение.

[1] Тешуков В. М. // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284. № 4. С. 555–559.

[2] Тешуков В. М. // ПМТФ. 1994. Т. 35. № 6. С. 73–81.

Вечернее заседание 23 января 1998 г., секция 1.

1. Гушин А. К. “Об одном функциональном пространстве, связанном с задачей Дирихле для эллиптического уравнения”

Вводится шкала функциональных пространств $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ ($\alpha \geq 0$, Q – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей), в терминах принадлежности которым дается описание поведения вблизи границы решения задачи Дирихле с граничной функцией из L_2 для эллиптического уравнения второго порядка. Для малых значений показателя гладкости α этот результат опубликован в [1].

Пусть $C^\alpha(Q)$ – пополнение множества C_0^∞ сужений на $\overline{Q}$ функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме

$$\|v\|_{C^\alpha(Q)} = \sum_{0 \leq |l| \leq \alpha} \sup_{x \in Q} r^{|l|} |D^l v(x)| + \sum_{|l| = [\alpha]} \sup_{(x, y) \in Q \times Q} r^\alpha(x, y) \frac{|D^l v(x) - D^l v(y)|}{|x - y|^{\alpha - [\alpha]}},$$

$r(x) = \text{dist}(x, \partial Q)$, $r(x, y) = \min\{r(x), r(y)\}$. Для $\xi \in [C^\alpha(Q)]^*$, $K = \overline{K} \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $\xi|_K$ сужение ξ на подпространство $\{v : \text{supp } v \subset \overline{Q} \cap K\}$. Будем говорить, что $\xi \in \mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q}) \subset [C^\alpha(Q)]^*$, если с некоторой постоянной $C = C(\xi)$ справедлива оценка

$$(1) \quad \|\xi|_{S_{x^0}(r)}\| \leq Cr^{n-1} \quad \text{для всех } r > 0 \text{ и } x^0 \in \partial Q;$$

здесь $S_{x^0}(r) = \{x : |x - x^0| \leq r\}$; $\|\xi\|_{-\alpha} = \min\{C : \text{выполнено (1)}\}$. Пространством $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ назовем пополнение C_0^∞ по норме $\|v\|_\alpha = \sup\{|\langle v, \xi \rangle| / \|\xi\|_{-\alpha} : \xi \in \mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q})\}$, $\langle \xi, v \rangle = \langle v, \xi \rangle$ – значение ξ на v . При выполнении условий работы [1] и естественных требованиях на внутреннюю гладкость коэффициентов равномерно эллиптического уравнения в самосопряженном виде без младших членов доказана следующая

ТЕОРЕМА. Пусть u и v – решения задачи Дирихле с граничными функциями u_0 и v_0 из $L_2(\partial Q)$. Тогда $uv \in \mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ и справедлива оценка $\|uv\|_\alpha \leq C\|u_0\|_{L_2(\partial Q)}\|v_0\|_{L_2(\partial Q)}$.

[1] Гушин А. К. // Докл. АН. 1998. Т. 358. № 6. С. 1–3.

2. Назаров С. А. (Санкт-Петербург) “Весовые пространства с отделенной асимптотикой и задача Навье–Стокса в неограниченных областях”

Во внешности области $G \subset \mathbb{R}^3$, лежащей в шаре B_R и ограниченной гладкой поверхностью, рассматривается задача Навье–Стокса

$$\begin{aligned} (1) \quad & -\nu \nabla \cdot \nabla u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{в } \Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}, \\ (2) \quad & u = g \quad \text{на } \partial\Omega = \partial G. \end{aligned}$$

Вывод асимптотического разложения решения (u, p) , исчезающего на бесконечности, осложнен тем обстоятельством, что главный асимптотический член решения задачи Стокса имеет вид

$$(3) \quad u^0(x) = r^{-1}U(\theta), \quad p^0(x) = r^{-2}P(\theta),$$

т.е. нелинейная часть в (1) той же силы, что и линейная. В (3) $r = |x|$ и $\theta = |x|^{-1}x$ – сферические координаты с центром $\theta \in G$.

ТЕОРЕМА. Пусть норма правой части g мала (например, в подходящем гёльдеровском классе). Существуют функции (3), удовлетворяющие нелинейным уравнениям (1) в $\mathbb{R}^3 \setminus \theta$ и такие, что для (единственного) решения задачи (1), (2) в Ω справедливы неравенства

$$|\nabla^k(u(x) - u^0(x))| + r|\nabla^k(p(x) - p^0(x))| \leq c_{k,\delta} r^{\delta-2-k},$$

где $|x| < R$; $k = 0, 1, \dots$ и $\delta > 0$ любые; $\nabla^k v$ – совокупность производных порядка k функции v .

Этот результат получен совместно с К.И. Пилецкасом при помощи техники весовых пространств с отделенной асимптотикой, разработанной в [1].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-15-96077).

[1] Nazarov S. A. // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. 1996. V. 323. P. 699–703.

3. Дубинский Ю. А. “О некоторых нелинейных аналитических и коаналитических задачах”

Основные результаты доклада опубликованы в [1]–[3].

[1] Дубинский Ю. А. // УМН. 1997. Т. 52. № 3. С. 52–104.

[2] Дубинский Ю. А., Осипенко А. С. // Вестник МЭИ. 1997. № 6. С. 18–31.

[3] Дубинский Ю. А. // Дифференц. уравнения 1997. Т. 33. № 10. С. 1–12.

4. Зубков П. В. “Об одной аналитической задаче в круге в весовых пространствах”

Пусть $K_1 = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^1 : x^2 + y^2 < 1\}$. В качестве весовой функции на K_1 рассматривается степенная функция вида $\mu(\varrho) = \varrho^L$, где $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$, L – вещественное число.

Пусть

$$\begin{aligned} W_{2,\theta}^m(K_1, \varrho^L) = \left\{ f(z) : K_1 \rightarrow \mathbb{C}^1; f, \partial_\theta^k f \in L_2(K_1, \varrho^L), k = 1, \dots, m; \right. \\ \left. \|f\|_{W_{2,\theta}^m(K_1, \varrho^L)}^2 = \sum_{k=0}^m \|\partial_\theta^k f\|_{L_2(K_1, \varrho^L)}^2 \right\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{O}_2^m(K_1, \varrho^L)$ – подпространство аналитических в $K_1 \setminus \{0\}$ функций, а $W_{2,\theta}^{-m}(K_1, \varrho^L)$ – сопряженное к $W_{2,\theta}^m(K_1, \varrho^L)$ пространство.

В области K_1 рассмотрим нелинейную задачу порядка $2m$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m (\partial_\theta^*)^k A_k(z, f, f', \dots, f^{(m)}) + \frac{1}{\mu} \partial_z(\mu p(z)) = h(z), \quad m \geq 1, \\ p|_{\partial K_1} = 0. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА. Пусть $L \neq 2k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, и функции $A_k(z, \xi_0, \dots, \xi_m)$ удовлетворяют условию Каратеодори, условию “сублинейного” роста и условию коэрцитивности. Тогда для любой $h(z) \in W_{2,\theta}^{-m}(K_1, \varrho^L)$ существует по крайней мере одна пара функций $f(z) \in \mathcal{O}_2^m(K_1, \varrho^L)$ и $p(z) \in D_\mu^{-1}W_{2,\theta}^{-m}(K_1, \varrho^L)$, являющаяся решением задачи в смысле обобщенных функций над пространством $W_{2,\theta}^m(K_1, \varrho^L)$ ($m \geq 1$).

[1] Зубков П. В. // Вестник МЭИ. 1996. № 6. С. 57–70.

[2] Дубинский Ю. А. // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 2. С. 262–275.

5. Осипенко А. С. “Нелинейная аналитическая задача вариационного типа в полосе. L_p -теория”

Пусть $G = \{z = (x + iy) \in \mathbb{C}^1 : x \in \mathbb{R}^1, y \in (-1, 1)\}$. Рассмотрим анизотропное пространство Соболева $W_{x,p}^m(G)$ ($m \geq 0$, $1 < p < \infty$) комплекснозначных функций, имеющих производные по переменной x до порядка m и суммируемых в G со степенью p . Через $\mathcal{O}_p^m(G)$ обозначим подпространство аналитических функций из $W_{x,p}^m(G)$.

Построение модели вариационной аналитической задачи основано на теореме, описывающей структуру аннулятора пространства $\mathcal{O}_p^m(G)$.

ТЕОРЕМА 1. Справедлива формула $(\mathcal{O}_p^m(G))^\perp = \partial_z(\nabla_0^{-1}W_{x,p'}^{-m}(G))$.

Через $\nabla_0^{-1}W_{x,p'}^{-m}(G)$ обозначено пространство функций, которые вместе со своими обобщенными производными по x и по y принадлежат пространству $W_{x,p'}^{-m}(G) = (W_{x,p}^m(G))^*$ и обращаются в нуль на границе области G .

Ключевую роль в доказательстве теоремы играет коаналитический проектор $P = 4\partial_z\Delta_0^{-1}\partial_{\bar{z}}$, действующий из $W_{x,p'}^{-m}(G)$ на $(\mathcal{O}_p^m(G))^\perp$ (здесь $\partial_{\bar{z}}$ – оператор Коши–Римана, Δ_0^{-1} – разрешающий оператор однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона, $\partial_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$).

В области G рассмотрим нелинейную задачу порядка $2m$

$$(1) \quad \sum_{k=0}^m (-1)^k D_x^k A_k(z, f, f', \dots, f^{(m)}) + \partial_z r(z) = h(z).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть функции $A_k(z, \xi_0, \dots, \xi_m)$ удовлетворяют условию Каратеодори, условию коэрцитивности и условию степенного роста:

$$|A_k(z, \xi_0, \dots, \xi_m)| \leq C \sum_{j=0}^m |\xi_j|^{p-1} + g_k(z), \quad g_k(z) \in L_{p'}(G).$$

Тогда для любой $h(z) \in W_{x,p'}^{-m}(G)$ существует по крайней мере одна пара функций $f(z) \in \mathcal{O}_p^m(G)$ и $r(z) \in \nabla_0^{-1}W_{x,p'}^{-m}(G)$, являющаяся решением задачи (1).

[1] Осипенко А. С. // Вестник МЭИ. 1997. № 6. С. 78–88.

6. Седлецкий А. М. “Бликие системы экспонент в L^p ”

Значительное число работ посвящено исследованию устойчивости полноты (минимальности) систем экспонент в $L^p = L^p(-a, a)$, $a > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $L^\infty(-a, a) := C[-a, a]$. В них речь идет об условиях близости комплексных последовательностей $\Lambda = (\lambda_n)$ и $M = (\mu_n)$, при которых системы

$$(1) \quad (\exp(i\lambda_n t)), \quad (\exp(i\mu_n t))$$

одновременно полны (минимальны) в L^p . Отметим два условия [1]:

$$(2) \quad \sum |\lambda_n - \mu_n| (1 + |\operatorname{Im} \lambda_n| + |\operatorname{Im} \mu_n|)^{-1} < \infty, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

$$(3) \quad |\operatorname{Im} \lambda_n|, |\operatorname{Im} \mu_n| \leq H < \infty, \quad \operatorname{Re} \lambda_n = \operatorname{Re} \mu_n, \quad p = 2.$$

Устойчивость равномерной минимальности систем экспонент изучена гораздо меньше. Этому вопросу и посвящено данное сообщение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть одна из систем (1) полна и равномерно минимальна в L^p , $1 \leq p \leq \infty$, и пусть

$$(4) \quad \sum |\lambda_n - \mu_n| < \infty.$$

Тогда системы (1) эквивалентны в L^p . В частности, другая система (1) также равномерно минимальна в L^p .

ЗАМЕЧАНИЕ. Если точки λ_n и μ_n лежат в горизонтальной полосе, то условие (2) переходит в условие (4).

ТЕОРЕМА 2. Если выполнено условие (3) и последовательности Λ и M отделены, то системы (1) одновременно равномерно минимальны в L^2 .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-15-96049).

[1] Redheffer R. // *Advanc. in Math.* 1977. V. 24. № 1. P. 1–62.

7. Пятков С. Г. (Новосибирск) “Незнакоопределенные эллиптические спектральные задачи”

8. Горин Е. А. “Распределения с исчезающими на бесконечности преобразованиями Фурье”

Пусть $C_0(\mathbb{R}^n)$ – пространство непрерывных на $\mathbb{R}^n$ комплекснозначных функций u , для которых $u(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Обозначим через Σ_0 класс замкнутых подмножеств $F \subseteq \mathbb{R}^n$, способных нести преобразование Фурье $\hat{u}$ нетривиальной функции $u \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Принадлежность к классу Σ_0 – локальное свойство. Все множества этого класса несчетны. В топологических терминах описать этот класс нельзя: множество, гомеоморфное канторову, может как принадлежать, так и не принадлежать к Σ_0 .

Будем писать $E \in \operatorname{AC}(r)$, если для любых точек $a_1, a_2, \dots, a_r \in E$ существует такое вещественно-аналитическое отображение $\omega: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, что $\omega(t) \in E$ при всех t и $a_k \in \omega([0, 1])$ при всех k .

Пусть теперь F – замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и E – относительно открытое подмножество в F . Предположим, что $E \in \operatorname{AC}(n+1)$ (при $n = 2$ достаточно предположить, что $E \in \operatorname{AC}(2)$). Тогда имеет место следующая альтернатива: либо множество E содержится в собственном аффинном подпространстве, и в этом случае если $u \in C_0(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp}(\hat{u}) \subseteq F$, то $E \cap \operatorname{supp}(\hat{u}) = \emptyset$; либо существует такая вероятностная мера μ с компактным носителем $\operatorname{supp}(\mu) \subset E$, что $|\hat{\mu}(x)| = O(|x|^{-1/n})$.

В частности, локально-аналитическое подмножество F тогда и только тогда не принадлежит к Σ_0 , когда для каждой точки $a \in F$ существует такая окрестность V , что $V \cap F$ содержится в конечном объединении собственных аффинных подпространств. Это позволяет в геометрических терминах охарактеризовать широкий класс систем уравнений в свертках $f * u = 0$ с аналитическими символами $\hat{f}$, обладающих нетривиальными решениями $u \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

ПРИМЕР. При $n \geq 2$ (но не при $n = 1$) существуют нетривиальные функции $u \in C_0(\mathbb{R}^n)$ с линейно зависимыми сдвигами. Вопрос о существовании таких функций был поставлен автору Б. М. Гуревичем и послужил исходным импульсом для данной работы.

Вечернее заседание 23 января 1998 г., секция 2.

1. Боговский М. Е. “Новый подход к решению в целом нелинейных эволюционных задач”

Предлагается новый метод решения в целом нелинейных начально-краевых задач для уравнений в частных производных в классах с гладкостью решений, достаточной для единственности. От задачи требуется, чтобы в нужном классе она была разрешима в малом и чтобы была разрешима в целом соответствующая ей некоторая вспомогательная задача.

Эффективность метода иллюстрируется на примере задачи

$$(1) \quad \begin{cases} v_t + (v, \nabla)v - \nu \Delta v + \nabla q = f(x, t) = (f_1, \dots, f_n), \\ \operatorname{div} v = 0, \quad (x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T), \quad v = (v_1, \dots, v_n), \\ v|_{\partial\Omega} = 0, \quad v|_{t=0} = v^0(x), \quad \operatorname{div} v^0 = 0, \quad v^0|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная или неограниченная область с $\partial\Omega \in C^2$. Если $\partial\Omega$ некомпактна, то предполагается, что Ω удовлетворяет условию $L_p(\Omega; \mathbb{R}^n) = J_p(\Omega) \oplus G_p(\Omega)$, где $J_p(\Omega)$ – замыкание в $L_p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ подпространства бесконечно дифференцируемых и финитных в Ω соленоидальных векторных полей, $G_p(\Omega)$ – подпространство потенциальных векторных полей в $L_p(\Omega; \mathbb{R}^n)$, а символ $\oplus$ означает прямую сумму. Обозначим $V_p(Q_T) = \{v(x, t) \in W_{p,x,t}^{2,1}(Q_T; \mathbb{R}^n) : \operatorname{div} v = 0, v|_{\partial\Omega} = 0, v(x, t) \in J_p(\Omega) \text{ п.в. на } (0, T)\}$. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА. Пусть $(n+2)/3 \leq p < \infty$, $n \geq 3$, $T > 0$, $\nu > 0$. Тогда для любых $f(x, t) \in L_p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ и $v^0(x) \in W_p^{2-2/p}(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap J_p(\Omega)$ существует единственное решение $\{v(x, t), \nabla q(x, t)\}$ задачи (1) в классе $V_p(Q_T) \times L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$.

Как известно, разложение $L_p(\Omega; \mathbb{R}^n) = J_p(\Omega) \oplus G_p(\Omega)$ имеет место при $1 < p < \infty$, если $\partial\Omega \in C^1$ компактна. При $p = 2$ такое разложение справедливо без каких-либо предположений относительно области Ω .

2. Демидов А. С. “Полигональная модель для течения Хил–Шоу”

Пусть $\Omega_t \in \mathbb{R}^2$ – многоугольник с заданной при $t = 0$ и искомой при $t > 0$ границей Γ_t ; $u_x x + u_y y = 2\delta(x, y)$ в Ω_t ($\delta(x, y)$ – дельта-функция), $u = 0$ на Γ_t . Скорости движения вершин Γ_t вдоль биссектрис внешних углов равны интегралам от $\partial u / \partial \nu$ (где ν – внешняя нормаль к Γ_t) по некоторым отрезкам сторон Γ_t , прилегающих к вершинам.

Рассмотрим простейший случай, когда Ω_t – равнобедренный треугольник с осью симметрии, проходящей через $(0, 0)$, причем $(0, 0) \in \Omega_t$. Пусть $N(t)$ – угол при основании Ω_t ; $\rho(t)$ – расстояние от $(0, 0)$ до вершины, лежащей на оси симметрии; σ – величина интеграла от $\partial u / \partial \nu$ по боковой стороне Ω_0 .

ЛЕММА. $0 < \sigma_-(N) < \sigma < \sigma_+(N) < 1$; $\sigma_{\pm} \approx (1 \pm 2N/\pi)/2$ при $N \rightarrow 0$ и $N \rightarrow \pi/2$ соответственно.

ТЕОРЕМА. 1) Функция $N(t)$ удовлетворяет уравнению $(t+t_0)\dot{N}(t) = P(N, \sigma)/Q(N, \sigma)$. Здесь $t_0 = t_0(\Gamma_0) > 0$, $P(N, \sigma) > 0$ при $(N, \sigma) \neq (\pi/3, 2/3)$, $P/Q \rightarrow 0$ при $(N, \sigma) \rightarrow (\pi/3, 2/3)$, $\operatorname{sign} Q(N, \sigma) = \operatorname{sign}(D(\sigma) - N)$, $Q(D(\sigma), \sigma) = 0$, $D(2/3) = \pi/3$.

2) Существует такая (конструктивно определяемая) аналитическая функция $R(\cdot, \cdot)$, что $\rho(t) = R(N(t), \sigma)$.

Будем считать, что длина Γ_t равна 2. Тогда множество

$$\{(N, \rho) : 0 < N < \pi/2, 0 < \rho < \sin N/(1 + \cos N)\}$$

отождествляется с множеством всех рассматриваемых треугольников. Пусть $s^{\pm} = \sigma_{\pm}(D(s^{\pm}))$.

Следствие. Множество $A = \{(N, \rho) : N = R(D(\sigma), \sigma), s^- < \sigma < s^+\}$ есть “аттрактор-препятствие”: треугольники Γ_t (соответствующие параметру $\sigma \in (s^-, s^+)$) стягиваются (с ростом t) к A , но старт с множества $A \setminus (\pi/3, 2/3)$ невозможен.

3. Дроздова Ю. А. “Гравитационные волны в канале со ступенчатым дном”

В приближении теории мелкой воды рассматриваются волны в канале со ступенчатым поперечным сечением. Выводятся и исследуются дисперсионные соотношения для линейных волн. Показано, что за счет существования прибрежного мелководья на глубокой части канала (с глубиной h_0) могут распространяться волны с фазовой скоростью, меньшей чем $\sqrt{gh_0}$; их амплитуда быстро убывает при удалении от границ с мелкой частью. Для волн с фазовой скоростью $\sqrt{gh_0}$ групповая скорость меньше фазовой. Изучено асимптотическое поведение групп линейных волн при больших временах. Показано, что кроме групп волн, амплитуда которых убывает как $1/\sqrt{t}$, существуют также группы волн, амплитуда которых убывает как $1/t^{1/3}$.

Для рассматриваемых каналов существуют пары волн, для которых суммы волновых чисел и суммы частот удовлетворяют дисперсионному соотношению. Это означает возможность нелинейного трехволнового взаимодействия, когда амплитуда одной из трех волн меняется под действием двух других. В работе получены и исследованы уравнения для амплитуд взаимодействующих волн. Приведены результаты численного исследования трехволнового взаимодействия. Взрывная неустойчивость отсутствует, амплитуды всех волн меняются периодически. Одна из трех волн является выделенной: малые начальные амплитуды двух других волн со временем существенно растут, если начальная амплитуда этой первой волны относительно велика. Для существенного роста первоначально малой амплитуды этой волны необходимо, чтобы начальные амплитуды обеих других волн были относительно велики.

4. Злотник А. А. “Стабилизация решений трех задач одномерного движения вязкого баротропного газа”

Доказывается глобальная (с любого начального состояния) стабилизация при $t \rightarrow +\infty$ решений трех начально-краевых задач для системы квазилинейных уравнений одномерного движения вязкого баротропного газа (сжимаемой жидкости). Во-первых, рассматривается задача о симметрическом (с плоской, цилиндрической или сферической симметрией) движении газа в замкнутом объеме. Изучен случай произвольно большой массовой силы (удовлетворяющей некоторому условию монотонности) для широкого класса возрастающих функций состояния $p = p(\rho)$. Эта задача ставилась Х. Бейрао да Вейга и А. В. Кажиховым в 1987–1988 г. Во-вторых, та же задача о симметрическом движении рассматривается при произвольной неубывающей локально липшицевой функции $p(\rho)$, но для исчезающей при $t \rightarrow +\infty$ массовой силы. График $p(\rho)$ может иметь участки постоянства и изломы, что представляет интерес при анализе фазовых переходов газ/жидкость. В-третьих, изучается задача об адиабатическом истечении вязкого газа в вакуум в случае, когда на свободной границе плотность вырождается, а истечению противодействует массовая сила. Предполагается, что степень вырождения начальной плотности согласована с показателем адиабаты. Эта задача ставилась Т. Нишида в 1986 г. Исследование всех трех задач опирается на технику из [1]. Подробности по поводу первой из задач см. в [2].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 97-01-00214).

[1] Злотник А. А. // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33. № 5. С. 62–79.

[2] Злотник А. А. // Вестник МЭИ. 1997. № 6. С. 57–69.

5. Кажихов А. В., Мамонтов А. Е. (оба – Новосибирск) “Уравнения переноса и пространства Орлича”

Рассматривается задача Коши для линейного уравнения первого порядка

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = f, \quad \rho|_{t=0} = \rho_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, T),$$

и соответствующая сопряженная задача

$$(2) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \zeta = g, \quad \zeta|_{t=T} = \zeta_T(x).$$

Проблема состоит в отыскании минимальных условий на гладкость вектор-функции $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ и, в частности, на $\operatorname{div} \mathbf{u}$, гарантирующих существование и единственность обобщенных решений задач (1) и (2). Основным результатом работы заключается в том, что выделен класс $\mathcal{K}$ выпуклых функций $M(r)$, порождающих пространства Орлича, которым принадлежит $\operatorname{div} \mathbf{u}$, и найдены точные классы корректности задачи (1) и (2) в соответствующих функциональных пространствах. Указанный класс $\mathcal{K}$ характеризуется достаточно быстрым ростом функций $M(r)$ на бесконечности:

$$\mathcal{K} = \left\{ M(r) : \int^{+\infty} \frac{\ln M(r)}{r^2} dr = \infty \right\}.$$

Подробно результаты будут опубликованы в "Сибирском математическом журнале".

6. Масленникова В. Н. "Задача обтекания в постановке Стокса в пространствах L_p "

Задача обтекания нескольких тел в постановке Стокса

$$(1) \quad -\nu \Delta v + \nabla q = f(x), \quad \operatorname{div} v = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2, \quad v|_{\partial\Omega} = 0$$

изучается в классе: $v(x) \in J_p^2 = \{v : v \in L_p^2, \operatorname{div} v = 0, v|_{\partial\Omega} = 0\}$, $\nabla q \in L_p(\Omega)$, где L_p^2 – пространство Соболева с полунормой $\sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha v\|_{L_p(\Omega)}$, $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus (\bigcup_{m=1}^M \bar{\omega}_m)$, ω_m – ограниченные области в $\mathbb{R}^n$ с компактными границами, $1 < p < \infty$, т.е. изучаются решения, не только выходящие на бесконечности на константу, но и неограниченные.

ТЕОРЕМА 1. *Найдутся шар $B \supset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ и постоянная $c(p, n, \Omega) > 0$ такие, что для всякого решения (1) в указанном классе*

$$(2) \quad \nu \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha v\|_{L_p(\Omega)} + \|\nabla q\|_{L_p(\Omega)} \leq c(\|f\|_{L_p(\Omega)} + \nu \|v\|_{L_p(\mathcal{B})}), \quad \mathcal{B} \equiv B \cap \Omega.$$

Из оценки (2) следуют конечномерность ядра и замкнутость в $L_p(\Omega)$ области значений оператора, соответствующего (1).

ТЕОРЕМА 2. *При $n = 3$ размерность ядра оператора (1) равна одиннадцати (см. [1]), а при $n = 2$ равна пяти.*

С использованием явных решений задачи (1) с неоднородными граничными условиями на сфере и на окружности доказана

ТЕОРЕМА 3. *При $n = 2, 3$ область значений оператора (1) совпадает с $L_p(\Omega)$, т.е. задача (1) разрешима $\forall f \in L_p(\Omega)$.*

Таким образом, задача (1) имеет ненулевой индекс.

Результаты частично получены совместно с Кузнецовым М. В.

[1] Масленникова В. Н., Тимошин М. А. // Докл. АН СССР. 1990. Т. 313. № 6. С. 1341–1345.

7. Плотников П. И. (Новосибирск) “Ультрапараболические уравнения фильтрации”

Рассматривается задача Коши для системы уравнений, описывающей движение двухфазной жидкости в пористой среде, которая состоит из волокон, ориентированных в направлении гладкого периодического поля $\mathbf{n}(x)$ с периодом, равным единице:

$$(1) \quad u_t + \mathbf{v} \nabla a(u) + \partial_n^* \partial_n u = 0, \quad \mathbf{v} = -\nabla p + u \mathbf{e}_1, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, T].$$

Здесь $u(x, t)$ – функция насыщенности, $p(x, t)$ – давление, $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $a(u)$ – заданная гладкая функция, $\mathbf{n}(x) = (n_1(x), n_2(x))$, $\partial_n = n_1(x) \partial_{x_1} + n_2(x) \partial_{x_2}$. Ставится начальное условие

$$(2) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

где $u_0 \in L_\infty(\mathbb{R}^2)$, $u_0(x + \mathbf{e}_i) = u_0(x)$, $i = 1, 2$, $\mathbf{e} = (0, 1)$.

Обозначим $Q = [0, 1]^2 \times [0, T]$. Энтропийным решением задачи (1), (2) назовем вектор-функцию $(u, \nabla p)$ со следующими свойствами: $u \in L_\infty(Q)$; $|\nabla p| \in L_2(Q)$; $u(x, t)$ является 1-периодической по x ; $\Delta p = u_{x_1}$ в $\mathcal{D}'(Q)$; выполняется интегральное неравенство

$$\int_Q (\eta_t \varphi(u) + (\mathbf{v} \nabla \eta) \psi(u) + \varphi(u) \partial_n^* \partial_n \eta - \varphi''(u) |\partial_n u|^2 \eta) dx dt + \int_{[0, 1]^2} \eta \varphi(u_0) dx \geq 0$$

для произвольной выпуклой энтропийной пары φ, ψ и любой неотрицательной гладкой функции $\eta(x, t)$, равной нулю при $t = T$ и 1-периодической по x .

ТЕОРЕМА. Пусть динамическая система $x' = \mathbf{n}(x)$ на торе $\mathbb{T}^2$ имеет инвариантное множество D полной меры такое, что все траектории этой системы, лежащие в D , являются замкнутыми и $\mathbf{n}(x) \neq 0$ на D . Тогда существует единственное энтропийное решение задачи (1), (2).

8. Рылов А. И. (Новосибирск) “Асимптотики и структура линий уровня в дозвуковых плоских потенциальных течениях”

9. Аксенов А. В. “Периодические по пространственной переменной точные решения системы уравнений одномерной газовой динамики”

Рассмотрена системы уравнений, описывающая изэнтропическое одномерное движение политропного газа. Преобразованием спидографа рассматриваемая система сводится к системе двух линейных уравнений, условием совместности которой является уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу

$$(1) \quad \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2\nu}{r} \frac{\partial t}{\partial r} - \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0.$$

Обозначим через (1') соответствующее неоднородное уравнение с правой частью, равной $\delta(r-1)\delta(z)$. Показано, что решения исходной системы уравнений, периодические по пространственной переменной с периодом, равным 1, удовлетворяют неоднородному уравнению (1'). Найдены симметрии уравнения (1) и показано, что неоднородное уравнение (1') допускает только один оператор симметрии

$$(2) \quad X = 2rz \frac{\partial}{\partial r} + (r^2 + z^2 - 1) \frac{\partial}{\partial z} - 2\nu zt \frac{\partial}{\partial t}.$$

С помощью канонических координат, соответствующих оператору симметрии (2), получен следующий основной результат.

ТЕОРЕМА. Уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу (1) имеет решения вида

$$t = r^{-\nu} [A_1 P_{-\nu}^\mu(\zeta) + A_2 Q_{-\nu}^\mu(\zeta)] [B_1 \operatorname{ch}(\mu\theta) + B_2 \operatorname{sh}(\mu\theta)],$$

$$\zeta = \operatorname{cth} \xi = \frac{r^2 - z^2 + 1}{2r}, \quad \theta = \frac{1}{2} \ln \frac{r^2 - (z+1)^2}{r^2 - (z-1)^2};$$

здесь $P_{-\nu}^\mu(\zeta)$, $Q_{-\nu}^\mu(\zeta)$ – функции Лежандра первого и второго родов; μ , A_1 , A_2 , B_1 , B_2 – произвольные постоянные.

Вечернее заседание 23 января 1998 г., секция 3.

1. Дмитриев В. И., Салтыков Е. Г. “О равносходимости с интегралом Фурье спектрального разложения, определяемого несамосопряженным оператором Штурма–Лиувилля”

Пусть $l\varphi = -d^2\varphi/dz^2 - k^2(z)\varphi$ – оператор Штурма–Лиувилля с таким потенциалом $k(z)$, что $k(z) = k_0 = \text{const}$ при $z \leq 0$, $k(z) = k_1 = \text{const}$ при $z > H > 0$, $\text{Im } k^2(z) \geq 0$. Доказано, что если $f(x)$ – произвольная функция из класса $L_1(\mathbb{R})$, $\sigma_\Lambda(z, f)$ – спектральное разложение функции $f(x)$, соответствующее оператору l , а $S_\Lambda(z, f)$ – разложение той же функции в интеграл Фурье, то равномерно относительно z на всей прямой $\mathbb{R}$

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} |\sigma_\Lambda(z, f) - S_\Lambda(z, f)| = 0, \quad \Lambda = \sqrt{\lambda}.$$

Функция $\sigma_\Lambda(z, f)$ представима формулой

$$\sigma_\Lambda(z, f) = \int_{\mathbb{R}} \theta(\Lambda, z, z') f(z') dz',$$

где

$$\theta(\Lambda, z, z') = \sum_{j=1}^2 \int_0^{M_j(\Lambda)} u_j(z, \mu) u_j(z', \mu) dp_j(\mu),$$

а u_j – собственные функции, удовлетворяющие уравнениям

$$lu_j = (\mu^2 - k_j^2)u_j, \quad j = 1, 2; \quad \mu \in \mathbb{R}; \quad M_j(\Lambda) \sim \Lambda, \quad \Lambda \rightarrow \infty.$$

2. Мотовилов А. К. (Дубна) “Операторная интерпретация резонансов, порождаемых (2×2) операторными матрицами, и базисные свойства резонансных векторов”

В спектральной теории (2×2) -матричных операторов важная роль принадлежит трансфер-функциям $M_i(z) = A_i - z + V_i(z)$, где $z \in \mathbb{C}$, $V_i(z) = -B_{ij}(A_j - z)^{-1}B_{ji}$, $i = 0, 1$, $j \neq i$. Мы предполагаем, что A_0 и A_1 – самосопряженные операторы, действующие в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$, соответственно, а операторы $B_{ij}: \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$, $i, j = 0, 1$, $i \neq j$, ограниченные, причем $B_{01} = B_{10}^*$. Мы исследуем операторное уравнение

$$(1) \quad H_i = A_i + V_i(H_i), \quad i = 0, 1,$$

где $V_i(X_i)$ – операторнозначная функция на пространстве линейных операторов в $\mathcal{H}_i$ такая, что $V_i(X_i)f^{(i)} = V_i(z)f^{(i)}$ для любого собственного вектора $f^{(i)}$, отвечающего собственному числу z оператора X_i (см. [1]).

Основные результаты работы связаны с изучением разрешимости уравнения (1) при $i = 1$ в случае, когда спектр A_1 частично или полностью вложен в непрерывный спектр A_0 , а операторы B_{ij} таковы, что $M_1(z)$ допускает аналитическое продолжение под разрезом вдоль m ($1 \leq m < \infty$) отделенных друг от друга ветвей абсолютно непрерывного спектра оператора A_0 на ближайшие нефизические листы параметра z . В результате продолжения возникает 2^m вариантов уравнения (1). Его решения H_1 оказываются несамосопряженными операторами, спектр которых включает в себя резонансы. Корневые векторы H_1 являются одновременно таковыми и для M_1 , что позволяет доказать полноту и базисность Рисса для систем корневых векторов, отвечающих спектру M_1 , включая резонансы.

Изложенные в докладе результаты получены совместно с Р. Менникеном [1].

[1] Mennicken R., Motovilov A. K. // LANL E-print funct-an/9708001.

3. Печенцов А. С. “Регуляризованные следы обыкновенных дифференциальных операторов”

4. Попов А. Ю. “Концентрация спектра одного семейства возмущений”

5. Стёпин С. А. “О кратности собственных значений операторов Штурма–Лиувилля, образующих голоморфное семейство”

Рассматривается задача Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned} (1) \quad & y'' + q(x, \alpha)y = \lambda y, \\ (2) \quad & y(-1) = y(1) = 0, \end{aligned}$$

где λ – спектральный параметр, α – параметр задачи, $q(\cdot, \alpha) \in C([-1, 1])$ – комплекснозначный потенциал, аналитически зависящий от α в области $\Omega \subset \mathbb{C}$. Соответствующие дифференциальные операторы $T(\alpha) = \frac{d^2}{dx^2} + q(x, \alpha)$, $\alpha \in \Omega$, действующие в $L_2((-1, 1))$, образуют голоморфное семейство.

Все собственные значения задачи (1)–(2), начиная с некоторого, однократные и остаются однократными при малом изменении параметра α . Конечная система собственных значений оператора $T(\alpha)$ представляется ветвями одной или нескольких аналитических функций, имеющих лишь алгебраические особенности в исключительных точках, где происходят столкновение и расщепление собственных значений.

ТЕОРЕМА. *Максимальная кратность собственных значений задачи (1)–(2) постоянна при почти всех $\alpha \in \Omega$.*

СЛЕДСТВИЕ. *Для почти всех $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ спектр оператора $\varepsilon \frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ в $L_2((-1, 1))$, отвечающего краевым условиям (2), где $q \in C([-1, 1])$, состоит из однократных собственных значений.*

Информация о кратности собственных значений сингулярно возмущенных операторов играет существенную роль при оценке степени неортогональности систем их корневых векторов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00333).

6. Валеев Н. Ф., Султанаев Я. Т. (оба – Уфа) “Спектральные свойства оператора Штурма–Лиувилля в пространстве вектор-функций”

Пусть L_0 – минимальный дифференциальный оператор Штурма–Лиувилля, порожденный в пространстве $L_n^2([0, \infty))$ n -мерных вектор-функций дифференциальным выражением $ly = -y'' + A(x)y$, $0 < x < \infty$, где $A(x)$ – эрмитова матрица порядка n с элементами $a_{ij}(x) \in C^2([0, \infty))$. Мы изучаем асимптотическое поведение при $x \rightarrow \infty$ фундаментальной системы решений для системы $ly = \lambda y$ и на основании полученных асимптотических формул исследуем индексы дефекта оператора L_0 и характер спектра его самосопряженных расширений. При этом в асимптотических формулах учитывается вклад и собственных значений матрицы $A(x)$, и элементов матрицы скоростей вращения, ее собственных векторов.

ПРИМЕР. Пусть $n = 2$,

$$A(x) = \begin{pmatrix} ax^\alpha \cos^2 x^\gamma + bx^\beta \sin^2 x^\gamma & \frac{1}{2}(ax^\alpha - bx^\beta) \sin 2x^\gamma \\ \frac{1}{2}(ax^\alpha - bx^\beta) \sin 2x^\gamma & ax^\alpha \sin^2 x^\gamma + bx^\beta \cos^2 x^\gamma \end{pmatrix},$$

где $a < 0$, $b < 0$, $\alpha \leq 0$, $\beta > 2$. Собственными значениями матрицы $A(x)$ являются функции $\lambda_1(x) = ax^\alpha$, $\lambda_2(x) = bx^\beta$. Если $\gamma < \frac{\alpha}{2} + 1$, то асимптотики решений системы $ly = \lambda y$ выписываются в терминах функций $p_{1,2}(x, \lambda) = \pm \sqrt{ax^\alpha - \lambda}$, $p_{3,4}(x, \lambda) = \pm \sqrt{bx^\beta - \lambda}$. Индексы дефекта оператора L_0 в этом случае равны $(3, 3)$. Если же $\gamma > \frac{\beta}{2} + 1$, то асимптотики решений выписываются в терминах функций $\pm \sqrt{ax^\alpha + bx^\beta - \lambda}$. Индексы дефекта оператора L_0 в этом случае равны $(4, 4)$. При этом во втором случае спектр любого самосопряженного расширения оператора L_0 дискретен, а в первом случае он имеет и непрерывную часть.

7. Шейпак И. А. “Фрактальные инвариантные множества линейных операторов с совместным спектральным радиусом, равным единице”

Совместным спектральным радиусом ограниченного подмножества B нормированной алгебры A с единицей называется число $r(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{T \in P_n} \|T\|^{1/n}$, где P_n — множество тех элементов из A , которые являются произведением n элементов из B .

Целью настоящей работы является построение класса операторов, инвариантные множества которых имеют дробную хаусдорфову размерность, а операторы имеют единичный совместный спектральный радиус.

Пусть дан набор линейных операторов $A_1, \dots, A_k \in L(\mathbb{R}^n)$. Пусть $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Через $\mu(x)$ обозначим орбиту точки x под действием всевозможных композиций операторов $A_1, \dots, A_k$. Т.е.

$$\mu(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists m \in \mathbb{N} : y = A_{\alpha_1} \cdots A_{\alpha_m}(x), \alpha_i \in \{1, \dots, k\}, i = 1, \dots, m\}.$$

Обозначим через $\mu'(x)$ множество предельных точек $\mu(x)$:

$$\mu'(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists m_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \dots : \|A_{\alpha_{m_1}} \cdots A_{\alpha_{m_i}}(x) - y\| \rightarrow 0, i \rightarrow \infty, \\ \alpha_{m_j} \in \{1, \dots, k\}, j = 1, \dots, i\}.$$

ТЕОРЕМА. Если линейные операторы A_i распадаются на прямую сумму двух операторов, один из которых является сжимающим в $\mathbb{R}^2$, а другой действует тождественным образом, то они имеют совместный спектральный радиус, равный единице, и существует единственное множество μ' , являющееся инвариантным множеством семейства операторов A_i , $i = 1, \dots, n$: $\mu' = \bigcup_{i=1}^n A_i(\mu')$. Множество μ' не зависит от начальной точки x и может иметь любую хаусдорфову размерность.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 96-01-01000, № 96-15-96091).

8. Якубов В. Я. “Оценки по спектральному параметру для фундаментальной системы решений уравнений Штурма–Лиувилля”

Для уравнения $\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda r(x)y = 0$ рассмотрены две задачи Коши:

$$\begin{aligned} (1) \quad & y(0) = 0, \quad y'(0) = 1; \\ (2) \quad & y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \end{aligned}$$

где коэффициент $r(x)$ — суммируемая на отрезке $[0, l]$ функция, удовлетворяющая условиям $0 < r_0 \leq r(x) \leq r_1$, а спектральный параметр $\lambda > 0$. Имеют место следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $r(x)$ — функция ограниченной вариации. Тогда справедливы равномерные по x оценки $|s(x, r, \lambda)| \leq C_1(r)\lambda^{-\frac{1}{2}}$, $|c(x, r, \lambda)| \leq C_2(r)$, где $s(x, r, \lambda)$, $c(x, r, \lambda)$ — решения задач (1) и (2) соответственно.

Однако, если коэффициент $r(x)$ не является функцией ограниченной вариации, то имеет место качественно иной результат.

ТЕОРЕМА 2. Для любого числа m существуют непрерывные на полуинтервале $[0, l]$ функции $r_1(x)$ и $r_2(x)$ и последовательность чисел $\lambda_n \rightarrow +\infty$ такие, что имеют место оценки: $\sup_{x \in [0, l]} |s(x, r_1, \lambda_n)| > C(r_1)\lambda_n^m$, $\sup_{x \in [0, l]} |c(x, r_2, \lambda_n)| > C(r_2)\lambda_n^m$.

9. Брусенцев А. Г. (Белгород) “Приграничное поведение потенциала и самосопряженность в существенном сингулярного эллиптического оператора второго порядка”

В пространстве $L_2(G)$, где G – произвольное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, рассматривается оператор $\mathcal{L}u = (\nabla - i\mathbf{b}(x))^* (A(x)(\nabla - i\mathbf{b}(x))u) + q(x)u$, $D_{\mathcal{L}} = C_0^\infty(G)$. Здесь $x \in G$; $A(x) = A^*(x) > 0$ – функциональная матрица с элементами $a_{ij} \in C^1(G)$; $\mathbf{b}(x)$ – вектор-функция с вещественными компонентами $b_j \in C^1(G)$; $q(x)$ – вещественная функция, $q \in L_{2,\text{loc}}(G)$; при этом локальные свойства коэффициентов оператора $\mathcal{L}$ таковы, что $D_{\mathcal{L}}^* = \{u : u \in L_2(G) \cap W_{2,\text{loc}}^2(G), \mathcal{L}u \in L_2(G)\}$.

Пусть функции $\eta(x) > 0$, $\nu(x) \geq 0$ и векторное поле $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ подчинены следующим требованиям:

- 1) $\eta \in C^2(G)$; $\eta(x) \rightarrow \infty$ при $\text{dist}(x, \partial G) \rightarrow 0$;
- 2) функция $\nu(x)$ и компоненты $\mathbf{f}(x)$ удовлетворяют условию Липшица на каждом компактном подмножестве G ;
- 3) почти всюду в G справедливы неравенства $(A\nabla\eta, \nabla\eta) \leq C \exp(2\eta)$, $(A\nabla\nu, \nabla\nu) \leq C$ при некотором $C > 0$.

ТЕОРЕМА. Если при некотором $M \geq 0$ почти всюду в G имеет место неравенство $q \geq (A\nabla\eta, \nabla\eta) + (A^{-1}\mathbf{f}, \mathbf{f}) - \nabla\mathbf{f} - M\nu^2$ и выполнены условия 1)–3), то оператор $\mathcal{L}$ самосопряжен в существенном.

Эта теорема обобщает теорему Кальфа–Вальтера–Шминке–Саймона и ряд других известных результатов.

Заседание 24 января 1998 г., секция 1.

Заседание было посвящено памяти С. Н. Кружкова.

1. Барсов О. Н. (Новгород) “О достаточных условиях существования периодических по t решений параболических уравнений общего вида на плоскости”

В полосе $\Pi = \mathbb{R}^1 \times [-l, l]$ рассматриваются первая и вторая краевые задачи для уравнения

$$(1) \quad u_t = a(t, x, u, u_x, u_{xx}), \quad u = u(t, x),$$

с граничными условиями $u(t, -l) = \mu_1(t)$, $u(t, l) = \mu_2(t)$ или $u_x(t, \pm l) = 0$. Предполагается, что на множествах $\Omega_{\Pi, M} = \{(t, x, u, p, r) : (t, x) \in \Pi, |u| \leq M, p \in \mathbb{R}^1, r \in \mathbb{R}^1\}$ выполнены условия $a_r(t, x, u, p, r) \geq a_0 > 0$, $\pm a(t, x, u, p, \pm\psi_1(|p|)) \geq 0$, а на множествах $\Omega_{\Pi, M, N} = \{(t, x, u, p, r) : (t, x) \in \Pi, |u| \leq M, |p| \leq N, r \in \mathbb{R}^1\}$ выполнено условие $|ra_p(t, x, u, p, r)| + |pa_u(t, x, u, p, r)| + |a_x(t, x, u, p, r)| \leq \psi_2(|r|)a_r(t, x, u, p, r)$, где $\psi_1(\rho)$, $\psi_2(\rho)$ – гладкие неубывающие и положительные при $\rho \geq 0$ функции. Доказывается существование классических периодических по t решений рассматриваемых краевых задач с периодическими по t функциями $a(t, x, u, p, r)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ периода $T > 0$ в случае, когда функции $\psi_1(\rho)$, $\psi_2(\rho)$ удовлетворяют условию типа Бернштейна $\int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{\psi_i(\rho)} = +\infty$ ($i = 1, 2$). В случае, когда $\psi_1(\rho)$ не удовлетворяет условию типа Бернштейна, требуется выполнение дополнительного условия, которое для второй краевой задачи имеет вид $K < \int_0^{+\infty} \frac{\rho d\rho}{\psi_1(\rho) + H}$, где $K > 0$ такое, что $ua(t, x, u, 0, 0) < 0$ при $(t, x) \in \Pi$, $|u| > K$, а $H = \frac{2K}{a_0 T}$.

2. Камынин В. Л., Саролди М. (Италия, Флоренция), Франчини Э. (Италия, Флоренция) “Обратные задачи для параболических уравнений высокого порядка”

Исследуются обратные задачи определения пары функций $\{u(t, x), \gamma(t)\}$, удовлетворяющих в прямоугольнике $Q_T \equiv [0, T] \times [0, l]$ уравнению

$$(-1)^m D_t u + a(t, x) D_x^{2m} u + \sum_{j=0}^{2m-1} b_j(t, x) D_x^j u = F(t, x, \gamma, u),$$

а также условиям

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in [0, l]; \quad D_x^i u|_{x=0, l} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1, \quad t \in [0, T];$$

$$\int_0^l u(t, x)w(x) dx = \varphi(t), \quad t \in [0, T].$$

Здесь $m \geq 1$ – натуральное число, $F(t, x, \gamma, u) = \gamma(t)g(t, x)$ (обратная задача I) либо $F(t, x, \gamma, u) = \gamma(t)u + g(t, x)$ (обратная задача II). Коэффициенты уравнения предполагаются измеримыми и ограниченными, $a(t, x) \geq a_0 > 0$, $u_0(x) \in \mathring{W}_2^m([0, l])$, $\varphi(t) \in W_2^1([0, T])$, $w(x) \in L_2([0, l])$, $\varphi(0) = \int_0^l u_0(x)w(x) dx$. Для нелинейной обратной задачи II доказаны глобальная единственность решения, а также локальная теорема существования решения в прямоугольнике Q_{T_0} при малом T_0 , величина которого оценивается явно через исходные данные задачи. Для линейной обратной задачи I доказана следующая глобальная теорема об однозначной разрешимости.

ТЕОРЕМА. Пусть выполняются сделанные выше предположения, а также дополнительные требования

$$w(x) \in \mathring{W}_2^1([0, l]), \quad \left| \int_0^l g(t, x)w(x) dx \right| \geq g_0 > 0, \quad g(t, x) \in L_\infty(0, T; \mathring{W}_2^m([0, l])).$$

Тогда существует единственное обобщенное решение $u(t, x)$ обратной задачи I, и для него справедливы оценки

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|D_x^m u(t, \cdot)\|_{L_2([0, l])} + \|u\|_{W_2^{1, 2m}(Q_T)} \leq c_1, \quad \|\gamma\|_{L_2([0, T])} \leq c_2.$$

Эта теорема используется для исследования асимптотического (при $t \rightarrow \infty$) поведения решения обратной задачи I.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00732).

З. Панов Е. Ю. (Новгород) “О задаче Коши для транспортного уравнения с разрывными коэффициентами”

Рассматривается задача Коши

$$(1) \quad (Au)_t + (Bu)_x = 0, \quad (Au)(0, x) = A(0, x)u_0(x), \quad u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R});$$

здесь неизвестная функция $u = u(t, x)$ и коэффициенты $A = A(t, x)$, $B = B(t, x)$ определены в полуплоскости $\Pi = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$. Предполагается, что $A, B \in L^\infty(\Pi)$, $A \geq 0$; $\text{ess lim}_{t \rightarrow 0+} A(t, x) = A(0, x)$ в $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$, $A(0, x) \in L^\infty(\mathbb{R})$, $|B| \leq \Phi(A)$ п.в. на Π , где Φ – некоторая неотрицательная выпуклая вверх функция на $[0, +\infty)$, $\Phi(0+) = \Phi(0) = 0$; $A_t + B_x = 0$ в смысле распределений на Π . Обобщенные решения (о.р.) задачи (1) понимаются в смысле интегрального тождества $\int_\Pi [Auh_t + Buh_x] dt dx + \int_\mathbb{R} A(0, x)u_0(x)h(0, x) dx = 0 \quad \forall h = h(t, x) \in C_0^\infty([0, +\infty) \times \mathbb{R})$. Установлено, что задача (1) однозначно разрешима (точнее, единственность имеет место для величины Au) и ее о.р. обладает следующими свойствами: 1) $\text{ess lim}_{t \rightarrow 0+} A(t, x)u(t, x) = A(0, x)u_0(x)$ в $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$; 2) $\forall p(u) \in C^1(\mathbb{R})$ функция $p(u(t, x))$ является о.р. задачи (1) с начальными данными $p(u_0(x))$. Из свойства 2) следует, что отображение $u_0 \mapsto u$ является гомоморфизмом алгебры $L^\infty(\mathbb{R}, A(0, x) dx)$ в алгебру $L^\infty(\Pi, A(t, x) dt dx)$; это позволяет определить с помощью сопряженного отображения соответствующих пространств максимальных идеалов обобщенные характеристики рассматриваемого уравнения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00671).

4. Фаминский А. В. “Смешанные задачи для уравнения Кортевега-де Фриза при нерегулярных граничных данных”

Рассматриваются смешанные задачи для уравнения Кортевега-де Фриза

$$(1) \quad u_t + u_{xxx} + au_x + uu_x = 0$$

в трех различных областях: правой и левой полуполосах и ограниченном прямоугольнике. Устанавливаются результаты о нелокальной разрешимости при нерегулярных данных. Например, в случае прямоугольника $Q_T = (0, T) \times (0, 1)$ задаются краевые условия

$$(2) \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u|_{x=0} = u_1(t), \quad u|_{x=1} = u_2(t), \quad u_x|_{x=1} = u_3(t).$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$u_0 \in L_2(0, 1), \quad u_1 \in (L_{6+\varepsilon} \cap W_1^{1/3} \cap W_2^{1/6})(0, T), \quad u_2 \in (W_1^{5/6+\varepsilon} \cap W_2^{1/3})(0, T), \quad u_3 \in L_2(0, T)$$

для некоторых $T > 0$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует единственное решение $u(t, x)$ задачи (1), (2) такое, что $u \in C([0, T]; L_2(0, 1))$, $u_x \in L_2(Q_T)$.

Основной идеей, позволившей ослабить условия гладкости граничных данных, является использование при получении соответствующих априорных оценок некоторых частных решений линеаризованного уравнения Кортевега-де Фриза.

5. Галкин В. А. (Обнинск) “Классы глобальной однозначной разрешимости задачи Коши для квазилинейных систем во множестве функциональных решений”

Рассматривается задача Коши для квазилинейной системы

$$(1) \quad \frac{\partial f_0^{(\omega)}(u, x, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j^{(\omega)}(u, x, t)}{\partial x_j} + f_{n+1}^{(\omega)}(u, x, t) = 0,$$

$$\omega \in \Omega, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

$$(2) \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Назовем классом однозначной разрешимости задачи (1), (2) такое множество $\mathcal{US}$ в пространстве функциональных решений этой задачи [1], что каждой начальной функции $u_0(x)$ из некоторого множества M_0 соответствует в точности одно функциональное решение, принадлежащее $\mathcal{US}$.

Пусть задан метод $\mathcal{M}$ для приближенного решения задачи Коши (1), (2), приводящий к построению семейства аппроксимаций u_α , $\alpha \in A$, где A – направленное множество параметров метода.

ТЕОРЕМА. Пусть приближенный метод $\mathcal{M}$ слабо аппроксимирует задачу (1), (2) и является слабо устойчивым. Тогда можно указать направленность параметров метода, для которой аппроксимации сходятся к функциональному решению этой задачи. Если метод является равномерно слабо аппроксимирующим и равномерно слабо устойчивым, то можно указать такой класс однозначной разрешимости задачи (1), (2) $\mathcal{US}$, что на некоторой направленности параметров аппроксимации сходятся к элементам $\mathcal{US}$ сразу при всех начальных данных из M_0 .

В случае системы газодинамики в эйлеровых координатах (совершенный одномерный газ с естественной вязкостью) для неизвестных величин $u = (\rho, v, T)$ (плотность, скорость, температура) построен пример функционального решения:

$$\rho(x, t) = 1 + 2t\delta_0, \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0), \quad v(x, t) = -\operatorname{sgn} x, \quad T(x, t) = \begin{cases} \mu/Rt, & x = 0, \\ T_0, & x \neq 0. \end{cases}$$

[1] Галкин В. А. // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1997. № 20. С. 81–120.

6. Сушко В. Г. “Асимптотическое поведение некоторых решений сингулярно возмущенного параболического уравнения”

В полосе $\Pi_T = \{(t, x) \mid 0 < t \leq T, -\infty < x < \infty\}$ для решения задачи

$$(1) \quad L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varphi'(u) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad u|_{t=0} = f(x)$$

строится асимптотическое разложение по малому параметру ε . Предполагается, что $0 < \varepsilon \ll 1$, $\varphi(u) \in C^\infty$, $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, $f(x)$ непрерывна и ограничена при $x \in (-\infty, \infty)$ и обладает при $x \neq 0$ ограниченными непрерывными производными любого порядка, имеющими конечные предельные значения при $x \rightarrow \pm 0$, а решение соответствующей вырожденной задачи является бесконечно дифференцируемым всюду в Π_T , кроме точек угловой характеристики $x = \varphi'(f(0))t$, на которой это решение имеет скачок производных.

Асимптотическое представление для любого $N > 0$ имеет вид

$$\tilde{u}_N(t, x, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^N \varepsilon^{2k} u_{2k}(t, x) + \sum_{k=1}^{2N+1} \varepsilon^k v_k(t, (x - \varphi'(f(0))t)/\varepsilon),$$

где функции $u_{2k}(t, x)$ бесконечно дифференцируемы при $x \neq \varphi'(f(0))t$, имеют при $k \geq 1$ разрыв первого рода в точках угловой характеристики, а функции $v_k(t, \xi)$ непрерывны и бесконечно дифференцируемы при $\xi \neq 0$, экспоненциально убывают при $|\xi| \rightarrow \infty$ и обеспечивают непрерывность функции $\tilde{u}_N(t, x, \varepsilon)$ вместе с производными первого порядка всюду в полосе Π_T с точностью до порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^{2N+1})$.

ТЕОРЕМА. Для решения задачи (1) имеет место оценка

$$\|u(t, x, \varepsilon) - \tilde{u}_N(t, x, \varepsilon)\|_{C^1} \leq M \varepsilon^{2N}.$$

7. Тупчиев В. А. (Обнинск) “Глобальная разрешимость задачи Коши и приближенные методы для квазилинейных систем законов сохранения”

Рассмотрим в слое $\Pi^T = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq T, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$ задачу Коши

$$(1) \quad u_t + \sum_{k=1}^n (f_k(u))_{x_k} = 0, \quad u = (u^1, \dots, u^N),$$

$$(2) \quad u|_{t=0} = u_0(x).$$

Решение в среднем задачи (1), (2) понимается как мера из пространства M^+ регулярных и конечных на компактах в $\mathbb{R}^{N+n+1}$ борелевских мер с топологией слабой сходимости на компактах [1]. Рассмотрим также систему с “искусственной вязкостью”

$$(3) \quad u_t + \sum_{k=1}^n (f_k(u))_{x_k} = \varepsilon \Delta u, \quad \varepsilon > 0.$$

ТЕОРЕМА. Пусть система (1) допускает энтропию $\Phi(u)$ и выполнены следующие условия: а) $0 \leq \sum_{i,j=1}^n \Phi_{u^i u^j}(u) \xi_i \xi_j \leq B|\xi|^2 \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \Phi(u) \geq B_m$ при $|u| \geq r_m$, где $r_m \rightarrow \infty$ и $B_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$; б) $\sum_{k=1}^n |f_k(u)| \leq A[\Phi(u)]^\gamma$ при $|u| \geq r_0 > 0$, где $1/2 < \gamma < (2+n)/(2n)$; в) $[|u| + \sum_{k=1}^n |f_k(u)|]/\Phi(u) \rightarrow 0$ при $|u| \rightarrow \infty$; г) $u_0 \in L_\infty(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$. (Здесь $|\cdot|$ – норма вектора, A, B и r_0 – постоянные.) Тогда при любых $T > 0$ и $\varepsilon > 0$ в Π^T существует решение задачи (3), (2), и найдется такая последовательность $\{\varepsilon_p\}$ ($p = 1, 2, \dots; \varepsilon_p \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$), что $u(x, t, \varepsilon_p)$ сходятся в топологии M^+ к решению в среднем задачи (1), (2).

Аналогичное утверждение справедливо для приближенных решений задачи (1), (2), построенных методом Лакса, при дополнительном предположении $|\partial f_k(u)/\partial u^j| \leq B \quad \forall u \in \mathbb{R}^N$ ($k = 1, \dots, n; j = 1, \dots, N$).

[1] Галкин В. А., Тупчиев В. А. // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 6. С. 1300–1304.

Заседание 24 января 1998 г., секция 2.

1. Брюно А. Д. “Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях”

Основные результаты доклада опубликованы в [1].

[1] Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит., 1998.

2. Балтаг В. А., Вулпе Н. И., Георгиу Л. Е. (все — Молдавия, Кишинев) “Дифференциальные операторы и особые точки полиномиальных систем”

Основные результаты доклада опубликованы в [1]–[3].

[1] Балтаг В. А., Вулпе Н. И. // Изв. АН Республики Молдова. Матем. 1998. № 1(26). С. 21–34.

[2] Балтаг В. А., Георгиу Л. Е., Вулпе Н. И. // Изв. АН Республики Молдова. Матем. 1995. № 2(18)–3(19). С. 76–88.

[3] Георгиу Л. Е. // Изв. АН Республики Молдова. Матем. 1998. № 1(26). С. 51–61.

3. Гонченко С. В., Шильников Л. П. (оба — Нижний Новгород) “Об интервалах Ньюхауса семейств двумерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с негрубым гетероклиническим контуром”

Пусть $f_0 - C^r$ -гладкий ($r \geq 3$) двумерный диффеоморфизм с негрубым гетероклиническим контуром, т.е. f_0 имеет две седловые неподвижные точки O_1 и O_2 и две гетероклинические траектории Γ_{12} и Γ_{21} такие, что $W^u(O_1)$ и $W^s(O_2)$ пересекаются трансверсально по Γ_{12} , а $W^u(O_2)$ и $W^s(O_1)$ имеют квадратичное касание в точках траектории Γ_{21} . Пусть λ_i, γ_i — собственные значения для точки O_i , где $|\lambda_i| < 1, |\gamma_i| > 1, i = 1, 2$, и $\sigma_i = |\lambda_i \gamma_i|$. Пусть U — достаточно малая окрестность контура $C = O_1 \cup O_2 \cup \Gamma_{12} \cup \Gamma_{21}$.

ТЕОРЕМА. Пусть f_μ — общее однопараметрическое семейство C^r -диффеоморфизмов, включающее при $\mu = 0$ диффеоморфизма f_0 , у которого $(\sigma_1 - 1)(\sigma_2 - 1) < 0$. Тогда на любом отрезке $[-\mu_0, \mu_0]$ значений параметра μ существует счетное множество интервалов Δ_i^1 , накапливающихся к $\mu = 0$ при $i \rightarrow \infty$, таких, что на Δ_i^1 плотны множества $B_i^j, j = 1, \dots, 4$, и f_μ имеет в U

- 1) при $\mu \in B_i^1$ — негрубую гомоклиническую к O_1 траекторию;
- 2) при $\mu \in B_i^2$ — негрубую гомоклиническую к O_2 траекторию;
- 3) при $\mu \in B_i^3$ — негрубый гетероклинический контур, содержащий точки O_1 и O_2 ;
- 4) при $\mu \in B_i^4$ — одновременно счетные множества седловых, устойчивых и вполне неустойчивых периодических траекторий.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01135).

4. Кудрявцева Е. А., Нехорошев Н. Н. “Оценка числа выживающих при возмущении замкнутых траекторий гамильтоновых систем”

Рассмотрим гамильтонову систему с гамильтонианом H на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω^2) . Пусть на неособой изоэнергетической поверхности $M_h = H^{-1}(h) \subset M^{2n}$ имеется связное замкнутое подмногообразие Λ , сплошь заполненное периодическими траекториями этой системы. Причем эти траектории определяют на Λ структуру прямого произведения окружности на некоторое многообразие $\bar{\Lambda}$. Рассмотрим в окрестности Λ в M_h сечение Пуанкаре σ , трансверсально пересекающее траектории системы, и отображение Пуанкаре $A: \sigma \rightarrow \sigma$. Потребуем, чтобы Λ было невырожденным, т.е. для каждой точки $m \in \Lambda \cap \sigma = \bar{\Lambda}$ выполнялось равенство $\ker(dA|_m - I_m) = T_m \bar{\Lambda}$, где I_m — тождественный оператор в $T_m \sigma$. Рассмотрим возмущенную систему с гамильтонианом $\tilde{H}$, близким к H по норме C^2 .

ТЕОРЕМА. Число лежащих на $\tilde{H}^{-1}(h)$ геометрически различных замкнутых траекторий возмущенной системы, близких к замкнутым траекториям на Λ и с близкими периодами, не меньше чем минимальное число критических точек гладкой функции на многообразии $\bar{\Lambda}$, в частности, не меньше категории Люстерника–Шнирельмана множества $\bar{\Lambda}$. Кроме того, число с учетом кратностей выживающих при возмущении замкнутых траекторий не меньше минимального числа критических точек морсовской функции на $\bar{\Lambda}$. В частности, это число не меньше суммы чисел Бетти многообразия $\bar{\Lambda}$.

В действительности, число замкнутых траекторий возмущенной системы можно оценить более точно с помощью усредненного возмущения.

5. Раутиан Н. А. “Полиномиальные нормальные формы q -эквивариантных векторных полей на плоскости при $q = 3$ ”

Нормальные формы (см. п. а), б)), указанные ниже в формулировке теоремы, построены относительно C^∞ -орбитальной эквивалентности. Понятие орбитальной эквивалентности и получение полиномиальных нормальных форм векторных полей на плоскости см. в [2], [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Векторное поле на плоскости, инвариантное относительно поворота плоскости на угол $2\pi/3$, называется q -эквивариантным при $q = 3$.

Будем называть векторное поле особым, если линейная часть поля в нуле равна нулю. Обозначим через $S_{k,m}$ q -эквивариантное (при $q = 3$) векторное поле вида

$$\begin{aligned} \dot{z} &= B\bar{z}^2 + H^m \varphi(H) z^2 \bar{z} + H^k \psi(H) z, \quad z \in \mathbb{C}, \quad B \in \mathbb{C}, \\ k &> 0, \quad m \geq 0, \quad k, m \in \mathbb{Z}, \quad \varphi, \psi \in C^\infty, \\ \varphi(0) &\neq 0, \quad \psi(0) \neq 0, \quad H = i(B\bar{z}^3 - \bar{B}z^3)/6. \end{aligned}$$

ЛЕММА. Особое q -эквивариантное векторное поле на плоскости при $q = 3$ C^∞ -орбитально эквивалентно одному из векторных полей вида $S_{k,m}$.

ТЕОРЕМА. Предварительная нормальная форма $S_{k,m}$ C^∞ -орбитально эквивалентна векторному полю

$$\dot{z} = B\bar{z}^2 + Q_{m+1}(H)H^k z + P_{k+1}(H)H^m z^2 \bar{z}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad B \in \mathbb{C},$$

где $Q_{m+1}(H)$, $P_{k+1}(H)$ — соответственно полиномы по H степени не выше $(m+1)$ и $(k+1)$ с вещественными коэффициентами, $k \geq 0$, $m > 0$, $k, m \in \mathbb{Z}$, $H = i(B\bar{z}^3 - \bar{B}z^3)/6$, при следующих предположениях:

- а) если $m \geq k$, $Q_{m+1}(H) \equiv A$, $A \in \mathbb{R}$, $P_{k+1}(0) \neq 0$;
- б) если $m < k$, $P_{k+1}(H) \equiv C$, $C \in \mathbb{R}$, $Q_{m+1}(0) \neq 0$.

[1] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[2] Богданов Р. И. // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1979. №5. С. 51–84.

[3] Богданов Р. И. // Функциональный анализ и его приложения. (в печати).

Заседание 24 января 1998 г., секция 3.

1. Беркович Л. М. (Самара) “Нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения и инвариантные решения уравнений математической физики”

Рассмотрение инвариантных (относительно действия некоторой группы преобразований) решений нелинейных уравнений математической физики приводит к нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям (НОДУ). Это случается, например, при нахождении решений типа солитонов, бегущих волн, автомодельных решений и др.

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы уравнение

$$(1) \quad F \equiv y^{(n)} - f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0$$

интегрировалось в терминах НОДУ 1-го порядка, достаточно, чтобы (1) допускало факторизацию вида $F \sim \prod_{k=1}^n [D - \beta_k(x, y)y' - \alpha_k(x, y)]y = 0$, $D = d/dx$ (α_k, β_k суть комплекснозначные функции).

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы уравнение (1) обратимым преобразованием вида $y = v(x, y)z$, $dt = u_1(x, y)dx + u_2(x, y)dy$, где v, u_1 и u_2 — достаточно гладкие функции от двух переменных x, y в области $\Gamma(x, y)$, не аннулирующиеся в ней, приводилось к линейному автономному виду $z^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^n b_k z^{(n-k)}(t) = 0$, $b_k = \text{const}$, необходимо и достаточно, чтобы (1) допускало следующую факторизацию через нелинейные дифференциальные операторы 1-го порядка:

$$F \sim \prod_{k=1}^n \left[D - \frac{v_x + v_y y'}{v} - (k-1) \frac{D(u_1 + u_2 y')}{u_1 + u_2 y'} - r_k(u_1 + u_2 y') \right] y = 0,$$

где r_k суть корни характеристического уравнения $r^n + \sum_{k=1}^n b_k r^{n-k} = 0$.

ПРИМЕР. Уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера $u_t = ux + u(1-u)$ имеет элементарное решение типа бегущей волны $u(x-bt)$, когда соответствующее ОДУ $y'' + by' + y - y^2 = 0$ допускает факторизацию $(D - r_2 \mp r_2 \sqrt{y})(D - r_1 \pm r_1 \sqrt{y})y = 0$, $r_{1,2}$ суть корни уравнения $r^2 + br + 1 = 0$, $b = \pm 5/\sqrt{6}$.

2. Повзнер А. Я., Кухаренко Ю. А. “Преобразование оператора квантовой системы с вырожденным спектром к квазидиагональному виду”

3. Тарасов В. Ф. (Брянск) “Один класс асимметричных уединенных волн”

Как известно, основные модельные уравнения теории солитонов (sine-Gordon, φ^4 , KdV, RLW, NLS, Brg, Bsqr, HxI и другие) имеют решения в виде симметричных уединенных волн (SSW-тип). Отличительной особенностью всех этих уравнений является то, что они описывают физические процессы со слабым нелинейным взаимодействием.

Есть, однако, экспериментальные факты, где проявляются нелинейные взаимодействия более высокого порядка. Профили соответствующих уединенных волн имеют явную асимметрию. В докладе рассматривается один класс асимметричных уединенных волн (ASW-тип), профили которых связаны с производящими функциями $\exp[x(1+t-e^t)]$ и $\exp[\alpha t + x(1-e^t)]$. Этот класс ASW(m, α) определяет следующая

ТЕОРЕМА. Функция $y_m(x, t) = \exp(1 + mz - e^z)$, где $m \geq 0$, удовлетворяет уравнению

$$(1) \quad y_m(D_t + D_x)^2 y_m - (D_t y_m + D_x y_m)^2 + \alpha y_m(D_t y_m + D_x y_m + \alpha t y_m) = 0$$

с условиями $y_m(x, 0) = \exp(1 + mkx - e^{kx})$, $y_0(-\infty, t) = e$, $y_0(+\infty, t) = 0$, $y_m(\pm\infty, t) = 0$ для $m > 0$. Здесь $z = k(x - vt)$, $-\infty < x < +\infty$, $t \geq 0$, $v = 1 + \alpha/k > 0$, α — (физический) параметр.

Первый член в (1) содержит дифференциальный оператор, который входит в уравнения “холодной магнитной гидродинамики”. Этот член характеризует сильное нелинейное взаимодействие плазменных (релятивистских) волн.

4. Виктор Д. В., Чеботарев А. М. “Квантовые стохастические процессы, возникающие как резольвентные пределы шрёдингеровской эволюции в фокковском пространстве”

Для самосопряженного гамильтониана

$$\mathbf{H}^\alpha = H_0 \otimes I + I \otimes E + H_{int}^\alpha, \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} dx x a^*(x) a(x),$$

$$H_{int}^\alpha = \frac{\bar{Q}}{2} a \bar{A}^\alpha a + \frac{Q}{2} a^* A^\alpha a^* + K a^* C^\alpha a + \bar{R} f^\alpha a + R a^* f^\alpha,$$

где $A^\alpha(x, y) \rightarrow \frac{1}{2\pi}(h(x) + h(y))$, $C^\alpha(x, y) \rightarrow (2\pi)^{-1}$, $f^\alpha(x) \rightarrow (2\pi)^{-1/2}$ при $\alpha \rightarrow +0$, вычисляются коэффициенты соответствующего неупреждающего квантового стохастического дифференциального уравнения (КСДУ)

$$(1) \quad du(t) = u(t)M(dt_+), \quad u(0) = I, \quad M(T) = \int_T dt \sum_{m,n=0}^1 L_m^n(\tau) A_m^n(d\tau_+),$$

получающегося в результате предельного перехода $\alpha \rightarrow 0$ из уравнения Шрёдингера в смысле сильной резольвентной сходимости. Здесь $A_m^n([0, t])$ – фундаментальные процессы [1].

ТЕОРЕМА. Коэффициенты $L_m^n(t)$ стохастического дифференциала (1) имеют вид: $L_0^0(t) = iH_1 - (L_0^1(t))^* L_0^1(t)/2$, где $h_t(\omega) = e^{i\omega t} h(\omega)$,

$$L_0^1(t) = L + NA^+(h_t), \quad L_1^0(t) = -(L_0^1(t))^* W, \quad L_1^1 = W - I,$$

$$L = i(I - iK/2)^{-1} R, \quad N = i(I - iK/2)^{-1} Q, \quad W = (K + 2i)/(K - 2i),$$

$$H_1 = H_0 - (R + QA^\dagger(h_t))^* \frac{2K}{4 + K^2} (R + QA^\dagger(h_t)).$$

Коэффициенты $L_m^n(t)$ удовлетворяют необходимым условиям унитарности [1]: $\text{Re } L_0^0(t) = L_0^1(t)^* L_0^1(t)/2$, $L_1^1(t) = W - I$, $L_1^0 = -L_0^1(t)^* W$.

[1] Hudson R. L., Parthasarathy K. R. // Comm. Math. Phys. 1984. V. 93. №3. P. 301–323.

5. Шустиков С. Ю. “Условие регулярности для класса генераторов марковской эволюции фермионных систем”

Изучаются свойства трансляционно инвариантной модели фермионной решетки, рассмотренной Т. Matsui. Устанавливается условие регулярности для генератора соответствующей квантовой динамической полугруппы. Свойство регулярности означает сохранение единичного оператора в гейзенберговском представлении. Это свойство позволяет однозначно описать физическую систему с помощью формального генератора линдбладовского типа с неограниченными операторными коэффициентами:

$$L(Q) = \sum L_k(Q), \quad L_k(Q) = \tau_k(L_0(\tau_{-k}(Q))), \quad L_0(Q) = E_0(Q) - E_0(I) \circ Q,$$

где Z^d – целочисленная решетка в R^d , $k \in Z^d$, τ_k – оператор сдвига на Z^d .

ТЕОРЕМА. Если коэффициент $E_0(\cdot)$ генератора $L(\cdot)$ является унитарным (т.е. $E_0(I) = I$) вполне положительным отображением, то соответствующая квантовая динамическая полугруппа консервативна.

Для рассматриваемой модели теорема применима в случае строго локальных операторных коэффициентов в отображении $E_0(\cdot)$. С физической точки зрения данная модель соответствует модели Изинга без гейзенберговского члена в инфинитезимальном операторе. Показано, что условия теоремы выполняются в случае потенциала парного взаимодействия $V(k)$, допускающего оценку $V(k) = O(|k|^\alpha)$, $\alpha > 1$, при $|k| \rightarrow \infty$.

[1] Matsui T. // On Three Levels / ed. Fannes M. New York: Plenum Press, 1994. P. 115–123.

6. Амосов Г. Г., Булинский А. В. “Об индексе Пауэрса–Арвесона для динамических полугрупп на факторах фон Неймана”

При относительно малых возмущениях марковского управляющего уравнения соответствующая динамическая полугруппа устойчива с точностью до коциклической сопряженности. Индекс E_0 -полугруппы на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ характеризует класс коциклической сопряженности полупотока квазисвободных сдвигов в фоковом представлении C^* -алгебры CAR. В [1] введен индекс для динамических полугрупп на гиперконечных факторах, связанных с нефоковскими представлениями CAR-алгебры и полугруппами ее обобщенных преобразований Боголюбова. Дальнейшие результаты содержат следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Для E_0 -полугрупп τ на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, порождаемых квазисвободным подъемом на CAR-алгебру C_0 -полугрупп изометрий $T = (T_t)_{t \geq 0}$, полугруппам T с одинаковым индексом отвечают коциклически сопряженные полугруппы τ .*

ТЕОРЕМА 2. *Для всякой E_0 -полугруппы τ , вполне совместимой с точным состоянием $\omega \in \mathcal{M}_*$ на W^* -факторе $\mathcal{M}$ (см. [2]) можно ввести регулярное расширение, определяющее делимую систему – произведение гильбертовых пространств $\mathcal{P}$. При этом индекс τ равен $\dim \mathcal{P}$.*

Работа частично поддержана грантом 96-1.7-100 Госком. РФ по высш. образованию.

[1] Амосов Г. Г., Булинский А. В. // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 6. С. 933–936.

[2] Булинский А. В. // УМН. 1996. Т. 51. № 6. С. 145–146.