Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Чанга, Суммирование мультипликативных функций, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 6, 197–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm590>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 14:43:16

СУММИРОВАНИЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

М. Е. ЧАНГА

Напомним вначале некоторые определения теории мультипликативных функций [1; с. 316].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мультипликативная функция $f(n)$ называется вполне мультипликативной, если соотношение $f(ab) = f(a)f(b)$ верно для любых натуральных a и b .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мультипликативная функция $f(n)$ называется сильно мультипликативной, если для любого простого p и для любого натурального α верно соотношение $f(p^\alpha) = f(p)$.

Основным результатом данной работы является следующая

ТЕОРЕМА. Пусть $f(n) = f_1(n)f_2(n)$, где $f_1(n)$ вполне мультипликативна, а $f_2(n)$ сильно мультипликативна. Пусть $F(x)$ обозначает сумматорную функцию $f(n)$. Пусть задано целое число k , большее единицы, с каноническим разложением $p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$. Тогда имеет место равенство

$$\sum_{n \leq x} f(kn) = f(k) \sum_{l_1, \dots, l_r \geq 0} \omega_1^{l_1} \cdots \omega_r^{l_r} F\left(\frac{x}{p_1^{l_1} \cdots p_r^{l_r}}\right),$$

где $\omega_i = f_1(p_i) - f(p_i)$ с $i = 1, \dots, r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из вышеприведенных определений следует, что равенство

$$f(ab) = \frac{f(a)f(b)}{f_2((a, b))} \quad (1)$$

имеет место для любых натуральных a и b . Пусть p – простое число, $\omega = f_1(p) - f(p)$ и m – натуральное число, не делящееся на p . Тогда справедливо соотношение

$$\sum_{n \leq x} f(pmn) = f(p) \sum_{l \geq 0} \omega^l \sum_{n \leq x/p^l} f(mn). \quad (2)$$

Действительно, пользуясь формулой (1) и тем, что $(p, n) = 1$ при $p \nmid n$ и $(p, n) = p$ при $p \mid n$, имеем

$$\sum_{n \leq x} f(pmn) = f(p) \sum_{\substack{n \leq x \\ p \nmid n}} f(mn) + f_1(p) \sum_{\substack{n \leq x \\ p \mid n}} f(mn) = f(p) \sum_{n \leq x} f(mn) + \omega \sum_{n \leq x/p} f(pmn).$$

Повторяя ту же процедуру с последней суммой в правой части, за конечное число шагов приходим к соотношению (2). Пусть α – натуральное число. Тогда имеет место равенство

$$\sum_{n \leq x} f(p^\alpha mn) = f(p^\alpha) \sum_{l \geq 0} \omega^l \sum_{n \leq x/p^l} f(mn). \quad (3)$$

Действуя аналогично предыдущему, находим при $\alpha \geq 2$

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} f(p^\alpha mn) &= f(p^\alpha) \sum_{\substack{n \leq x \\ p \nmid n}} f(mn) + f_1(p^\alpha) \sum_{\substack{\beta=1 \\ p^\beta \parallel n}}^{\alpha-1} \sum_{\substack{n \leq x \\ p^\alpha \mid n}} f(mn) + f_1(p^\alpha) \sum_{\substack{n \leq x \\ p^\alpha \mid n}} f(mn) \\ &= f(p^\alpha) \sum_{\substack{n \leq x \\ p \nmid n}} f(mn) + f_1(p^\alpha) \sum_{\substack{n \leq x \\ p \mid n}} f(mn) \\ &= f(p^\alpha) \sum_{n \leq x} f(mn) + (f_1(p^\alpha) - f(p^\alpha)) \sum_{n \leq x/p} f(pmn). \end{aligned}$$

Применение формулы (2) к последней сумме в правой части приводит нас к соотношению (3). Положим $m_1 = p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ и воспользуемся формулой (3):

$$\sum_{n \leq x} f(kn) = \sum_{n \leq x} f(p_1^{\alpha_1} m_1 n) = f(p_1^{\alpha_1}) \sum_{l_1 \geq 0} \omega_1^{l_1} \sum_{n \leq x/p_1^{l_1}} f(m_1 n).$$

Далее, положим $m_2 = p_3^{\alpha_3} \cdots p_r^{\alpha_r}$ и применим соотношение (3) к внутренней сумме в правой части. Повторяя эту процедуру r раз и пользуясь мультипликативностью функции $f(n)$, получим утверждение теоремы. Этим доказательство завершается.

Приведем некоторые примеры использования этой теоремы, связанные с мультипликативной функцией Эйлера $\varphi(n)$. Первое следствие представляет собой частный случай утверждения, приведенного в [1; с. 262].

СЛЕДСТВИЕ 1. При $x \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$\sum_{n \leq x} \varphi(kn) = \frac{3k}{\pi^2} \prod_{p|k} \frac{p}{p+1} x^2 + O(x \ln x),$$

где постоянная в знаке O зависит только от k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см., например, [2; с. 30]), что

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right). \quad (4)$$

Таким образом, функция Эйлера удовлетворяет условию теоремы с $f_1(n) = n$ и $\omega_i = 1$. Согласно [1; с. 259] имеет место асимптотическая формула

$$F(x) = \sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \ln(1+x)),$$

причем оценка остаточного члена равномерна при $0 \leq x < \infty$. Отсюда получаем требуемое.

СЛЕДСТВИЕ 2. При $x \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{\varphi(kn)} = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{k\zeta(6)} \prod_{p|k} \frac{p^2}{p(p-1)+1} \ln x + O(1),$$

где постоянная в знаке O зависит только от k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно соотношению (4) функция $1/\varphi(n)$ удовлетворяет условию теоремы с $f_1(n) = 1/n$ и $\omega_i = 1/(p_i(1-p_i))$. Согласно [3; с. 83] имеем

$$F(x) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{\varphi(n)} = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \ln x + O(1),$$

причем оценка остаточного члена равномерна при $1 \leq x < \infty$. Если же $x < 1$, то $F(x) = 0$. Отсюда получаем требуемое.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Г. Постников. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука, 1971. [2] И. М. Виноградов. Основы теории чисел. М.: Наука, 1981. [3] А. А. Карацуба. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.