Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Давыдов, Н. Б. Мельников, Бифуркация
Андропова–Хопфа в простых моделях двойной диффу-
зии, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 2, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm5905>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 18:28:38

Бифуркация Андронова–Хопфа в простых моделях двойной диффузии

А. А. Давыдов, Н. Б. Мельников

Качественный анализ моделей шторммелевского типа термохалинной циркуляции проводился в ряде работ (см. [1]), однако до сих пор лишь бифуркация типа седло-узел в этих моделях была полностью аналитически изучена (см., например, [2], [3]). В [4] численно показано, что двойная диффузия в таких моделях может приводить к неустойчивому положению равновесия с предельным циклом вокруг него. В безразмерных координатах соответствующая система дифференциальных уравнений на плоскости может быть записана в виде

$$\dot{x} = 1 - x - q(z)x, \quad \dot{y} = \delta(1 - y) - q(z)y, \quad (1)$$

где $z = -x + ry$, $0 < \delta < 1$ и $1 < r < 1/\delta$, а q – липшицева неубывающая неотрицательная функция, положительная при неотрицательных значениях своего аргумента (см. также [5]). Систему (1) мы рассматриваем в единичном квадрате $\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Этот квадрат – положительно инвариантная область данной системы. Более того, любая траектория, начинающаяся на границе квадрата Π , входит внутрь его за конечное время. Прежде всего исследуем, когда система (1) имеет предельный цикл.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(\delta r - \delta)/(1 - r\delta) < q(0)$ и любое непустое множество уровня $\{w \in \mathbb{R} : q(w) = p\}$ функции $q(w)$ при $p > p_{\min}$ принадлежит интервалу $(z(p), +\infty)$, где $z(p) = r\delta/(\delta + p) - 1/(1 + p)$ и $p_{\min}$ – точка минимума $z_{\min} (=z(p_{\min}))$ этой функции на положительной полуоси. Тогда в квадрате Π существует положение равновесия $(\hat{x}, \hat{y})$ системы (1), и оно единственно.

СЛЕДСТВИЕ 1. В предположениях теоремы 1 положение равновесия $(\hat{x}, \hat{y})$ имеет вид $((1 + p(\hat{z}))^{-1}, \delta(\delta + p(\hat{z}))^{-1})$, где p – обратная функция к функции z , $z(p) = r\delta/(\delta + p) - 1/(1 + p)$, такая, что $p(0) = (\delta r - \delta)/(1 - r\delta)$, а $\hat{z}$ – точка равенства функций q и p .

Предположения теоремы 1 могут быть заменены более сильным: $p(0) < q(0) < p_{\min}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть дополнительно к предположениям теоремы 1 функция q липшицева, дифференцируема в точке $\hat{z} \in (z_{\min}, 0)$ и производная $q'(\hat{z})$ удовлетворяет следующему неравенству: $q'(\hat{z})\hat{z} < -1 - \delta - 2q(\hat{z})$. Тогда положение равновесия $(\hat{x}, \hat{y})$ неустойчиво.

Существует много функций (даже гладких), удовлетворяющих условиям теоремы 2. Например, $q(z) = (1/\pi) \arctg((z + \lambda)/\lambda^2) + 1/2$ подойдет, если $\lambda > 0$ достаточно мало.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнены предположения теорем 1 и 2. Тогда внутри квадрата Π система (1) имеет предельный цикл, охватывающий положение равновесия $(\hat{x}, \hat{y})$.

Действительно, фазовая кривая, выходящая из начала координат, принадлежит внутренности квадрата при всех последующих временах. По теореме Пуанкаре–Бендиксона ее ω -предельное множество является либо положением равновесия, либо предельным циклом, либо объединением фазовых кривых, соединяющих некоторые положения равновесия. Но в силу теоремы 1 положение равновесия единственно, а в силу теоремы 2 оно неустойчиво. Следовательно, это множество может быть лишь предельным циклом, охватывающим эту особую точку.

Далее мы покажем, что есть предельный цикл, который стягивается в точку, когда функция q стремится к ступенчатой функции: $q(z) = 0$, $z < 0$, и $q(z) = \sigma$, $z \geq 0$.

Первый автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 06-01-00661а), второй автор поддержан “Фондом содействия отечественной науке” (грант “Кандидаты наук РАН, 2006”).

Решение предельной разрывной системы понимаются в смысле Филиппова [6], как пара абсолютно непрерывных функций $(x = x(t), y = y(t))$, удовлетворяющих дифференциальному включению $(\dot{x}, \dot{y}) \in F(x, y)$ п.в., где $F(x, y)$ – минимальное замкнутое выпуклое множество, содержащее все пределы правой части f системы при $(\tilde{x}, \tilde{y}) \rightarrow (x, y)$ и $\tilde{x} \neq r\tilde{y}$. Вне линии разрыва системы правая часть включения односточна, а на самой этой линии выпуклая оболочка пределов f при подходах из полуплоскостей $z = -x + ry < 0$ и $z = -x + ry > 0$ не содержит касательных к линии разрыва скоростей за исключением самой точки покоя. Следовательно, нет траекторий, движущихся вдоль линии разрыва, за исключением самой точки покоя.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $(\delta r - \delta)/(1 - r\delta) < \sigma$. Тогда система (1) со скачком в правой части имеет единственное положение равновесия $(\bar{x}, \bar{y}) = ((1 - \delta r)/(1 - \delta), (1 - \delta r)/(r(1 - \delta)))$ и это положение равновесия топологически эквивалентно устойчивому фокусу.

Для доказательства теоремы в координатах (x, z) вычислим вблизи особой точки $(\bar{x}, \bar{z})$ отображение последования Φ на луче $\{z = 0, x < \bar{x}\}$. Вычисляя поток системы (1) отдельно в верхней и нижней полуплоскостях и склеивая его, при малых $\varepsilon > 0$ получаем

$$\Phi: (\bar{x} - \varepsilon) \mapsto \bar{x} - \varepsilon + \frac{2}{3} \frac{\sigma(1 + r\delta)(1 - \delta)^2}{\delta(r - 1)(\delta + \sigma - r\delta - r\delta\sigma)} \varepsilon^2 + \bar{o}(\varepsilon^2). \quad (2)$$

Это отображение – сжатие, ибо при ε^2 стоит положительный коэффициент. Следовательно, изучаемое положение равновесия топологически эквивалентно устойчивому фокусу.

Топологически фазовый портрет в теореме 3 сохранится, если допустить ненулевые правую и левую производные функции q в нуле. Более того, эти производные не меняют 2-струю отображения Φ в изучаемой точке, т.е. она та же, что и в (2).

Наконец, пусть $q_\mu(\cdot)$ – однопараметрическое семейство функций, которые удовлетворяют предположениям теорем 1 и 2 и сходятся поточечно при $\mu \rightarrow 0+$ к функции $q(\cdot)$, разрывной в нуле. Если менять μ в обратном направлении, начиная с разрывной системы при $\mu = 0$, бифуркация будет сходна с мягкой потерей устойчивости положения равновесия для плоских систем (см. [7]), частный случай которой описывается теоремой Андронова–Хопфа. Отметим, что в нашем случае механизм бифуркации отличается: предельный цикл сглаженной системы здесь возникает благодаря “мнимым” аттракторам системы со скачком в правой части (более подробно см. [4]).

Работа выполнена в Международном институте прикладного системного анализа (Лаксенбург, Австрия). Мы благодарны Б.К. О’Ниллу, который привлек наше внимание к данной теме и предоставил полезные ссылки.

Список литературы

- [1] S. Titz, T. Kuhlbrodt, U. Feudel, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **12**:4 (2002), 869–875. [2] H. Stommel, *Tellus*, **13** (1961), 224–230. [3] J. Marotzke, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **97**:4 (2000), 1347–1350. [4] P. A. Welandar, *Dynamics of Atmosphere and Oceans*, **6**:4 (1982), 233–242. [5] A. A. Davydov, N. B. Melnikov, *Existence of self-sustained oscillations in an ocean circulation box model with turbulent fluxes*, Interim report IR-06-049, IIASA, Laxenburg, 2006. [6] А. Ф. Филиппов, *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*, Наука, М., 1985. [7] В. И. Арнольд, *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, РХД, Ижевск, 2000.

А. А. Давыдов (A. A. Davydov)
Владимирский государственный университет
E-mail: davydov@vpti.vladimir.ru

Представлено Д. В. Аносовым
Принято редколлегией
04.01.2007

Н. Б. Мельников (N. B. Melnikov)
Центральный экономико-математический институт РАН,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: melnikov@cs.msu.ru