Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Шапкин, Квазиассоциированность гауссовской системы случайных векторов, *УМН*, 2002, том 57, выпуск 6, 199–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm591>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 17:42:25

КВАЗИАССОЦИИРОВАННОСТЬ ГАУССОВСКОЙ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

А. П. ШАШКИН

Целью данной заметки является доказательство свойства квазиассоциированности гауссовских систем случайных векторов со значениями в $\mathbb{R}^s$. Напомним ряд определений. Функция $f: \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{N}$, называется липшицевой, если $\text{Lip}(f) = \sup_{x \neq y} |f(x) - f(y)| / \|x - y\| < \infty$. Здесь и всюду далее $\|x\| = \sum_{i=1}^P |x_i|$ для $x \in \mathbb{R}^P$. Класс ограниченных липшицевых функций $f: \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}$ обозначим $BL(\mathbb{R}^P)$.

Пусть для некоторого множества T задано семейство $\Xi = \{\xi_t, t \in T\}$, $\xi_t = (\xi_{t1}, \dots, \xi_{ts})$, случайных векторов, принимающих значения в $\mathbb{R}^s$. Для множества $I \subset T$ с числом элементов $|I| < \infty$ введем набор $\xi_I = (\xi_t, t \in I)$. Семейство Ξ называется квазиассоциированным (см. [1]), если

$$|\text{cov}(f(\xi_I), g(\xi_J))| \leq \text{Lip}(f) \text{Lip}(g) \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{r,l=1}^s |\text{cov}(\xi_{ir}, \xi_{jl})| \quad (1)$$

для любых конечных наборов ξ_I, ξ_J , отвечающих непересекающимся множествам $I, J \subset T$, и всех липшицевых функций $f: \mathbb{R}^{s|I|} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: \mathbb{R}^{s|J|} \rightarrow \mathbb{R}$ (при условии, что данная ковариация определена). Заметим, что свойство (1) достаточно проверять для $f \in BL(\mathbb{R}^{s|I|})$ и $g \in BL(\mathbb{R}^{s|J|})$.

Для семейства случайных величин (при $s = 1$) свойство ассоциированности означает, что $\text{cov}(f(\xi_I), g(\xi_J)) \geq 0$ для любых конечных множеств $I, J \subset T$ (возможно, пересекающихся) и всех покоординатно неубывающих функций f и g , а свойство отрицательной ассоциированности означает неположительность указанной ковариации для непересекающихся I, J . Имеется обширный класс систем случайных величин с указанными свойствами. В работе [2] (см. также [3]) доказано, что ассоциированность гауссовской системы действительных случайных величин $\{\xi_t, t \in T\}$ эквивалентна неотрицательности ковариаций $\text{cov}(\xi_s, \xi_t)$ при всех $s, t \in T$. Согласно [4] отрицательная ассоциированность гауссовской системы равносильна тому, что $\text{cov}(\xi_s, \xi_t) \leq 0$ при $s \neq t$.

ТЕОРЕМА. *Любая гауссовская система случайных векторов $\{\xi_t, t \in T\}$, принимающих значения в $\mathbb{R}^s$, обладает свойством квазиассоциированности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, не ограничивая общности, что $E\xi_t = 0$ для всех $t \in T$. Возьмем конечные непересекающиеся $I, J \subset T$. Для упрощения записи занумеруем подряд все компоненты векторов, входящих в наборы ξ_I и ξ_J , полагая

$$\{\xi_{ir}, i \in I, r = 1, \dots, s\} = \{X_k\}_{k=1}^m \quad \text{и} \quad \{\xi_{jl}, j \in J, l = 1, \dots, s\} = \{X_k\}_{k=m+1}^n,$$

где $m = s|I|$, $n = s(|I| + |J|)$. Необходимо убедиться, что

$$|\text{cov}(f(X_1, \dots, X_m), g(X_{m+1}, \dots, X_n))| \leq \text{Lip}(f) \text{Lip}(g) \sum_{k=1}^m \sum_{v=m+1}^n |\sigma_{kv}| \quad (2)$$

для всех $f \in BL(\mathbb{R}^m)$ и $g \in BL(\mathbb{R}^{n-m})$; здесь $\sigma_{kv} = \text{cov}(X_k, X_v)$. Рассмотрим вначале случай, когда матрица ковариаций $\Sigma = (\sigma_{ij})$ вектора $X = (X_1, \dots, X_n)$ невырождена, а функции f, g имеют непрерывные ограниченные частные производные $\partial f / \partial x_k, \partial g / \partial x_v$, $k = 1, \dots, m$, $v = m+1, \dots, n$. Пусть Z – вектор, имеющий нормальное распределение с параметрами $(0, \Sigma)$ и не зависящий от X . Для $\lambda \in [0, 1]$ введем вектор $Y(\lambda) = \lambda X + (1 - \lambda^2)^{1/2} Z$ и функцию $H(\lambda) = EF(X)G(Y(\lambda))$, где считается, что $F(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_m)$, $G(x_1, \dots, x_n) = g(x_{m+1}, \dots, x_n)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Очевидно,

$$|\text{cov}(f(X_1, \dots, X_m), g(X_{m+1}, \dots, X_n))| = |H(1) - H(0)|.$$

В работе [2] доказано, что функция $H(\lambda)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и дифференцируема при $\lambda \in (0, 1)$, причем

$$H'(\lambda) = \lambda^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \sum_{1 \leq k, v \leq n} \sigma_{kv} \frac{\partial F(x)}{\partial x_k} \frac{\partial G(\lambda, x)}{\partial x_v} dx, \quad (3)$$

где $\phi(x)$ – плотность стандартного нормального распределения в $\mathbb{R}^n$, а

$$G(\lambda, x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(\lambda x - y) \phi_\lambda(y) dy, \quad \phi_\lambda(y) = (1 - \lambda^2)^{-n/2} \phi((1 - \lambda^2)^{-1/2} x).$$

Легко видеть, что $\partial F(x)/\partial x_k = \partial G(\lambda, x)/\partial x_v = 0$ при $k > m, v \leq m$, поэтому сумма в (3) берется лишь по $k \leq m, v > m$. Вычисляя производные $\partial G(\lambda, x)/\partial x_v$ ($v > m$) и учитывая, что $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\lambda(y) dy = 1$, из (3) получаем, что

$$|H(1) - H(0)| \leq \sup_{\lambda \in (0, 1)} |H'(\lambda)| \leq \sum_{k=1}^m \sum_{v=m+1}^n |\sigma_{kv}| \sup_{\lambda \in (0, 1)} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial F(x)}{\partial x_k} \frac{\partial G(\lambda, x)}{\partial x_v} \right|,$$

откуда следует (2).

Далее потребуются следующее простое утверждение.

ЛЕММА. Для функции $h \in BL(\mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon \in (0, 1)$ пусть $h_\varepsilon = h * \psi_\varepsilon$, где ψ_ε – неотрицательная функция такая, что $\psi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(y) dy = 1$, $\psi_\varepsilon(y) = 0$ при $\|y\| > \varepsilon$. Тогда h_ε ограничена, $h_\varepsilon(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $h_\varepsilon(x) \rightarrow h(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, а также $\text{Lip}(h_\varepsilon) \leq \text{Lip}(h)$ (тем самым $h_\varepsilon \in C_b^1(\mathbb{R}^n)$).

Продолжим доказательство теоремы. Рассмотрим произвольные функции $f \in BL(\mathbb{R}^m)$, $g \in BL(\mathbb{R}^{n-m})$. По уже доказанной части теоремы

$$|\text{cov}(f_\varepsilon(X_1, \dots, X_m), g_\varepsilon(X_{m+1}, \dots, X_n))| \leq \text{Lip}(f_\varepsilon) \text{Lip}(g_\varepsilon) \sum_{k=1}^m \sum_{v=m+1}^n |\sigma_{kv}|. \quad (4)$$

Из леммы следует, что левая часть (4) при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к левой части (2), а правая часть (4) не превосходит $\text{Lip}(f) \text{Lip}(g) \sum_{k=1}^m \sum_{v=m+1}^n |\sigma_{kv}|$ при всех $\varepsilon \in (0, 1)$. Таким образом, в случае $\det \Sigma > 0$ неравенство (2) выполнено для всех $f \in BL(\mathbb{R}^m)$ и $g \in BL(\mathbb{R}^{n-m})$.

Случай, когда $\det \Sigma = 0$, разбирается с помощью введения вспомогательного гауссовского вектора с матрицей ковариаций $\Sigma + \delta I$, I – единичная матрица порядка n , $\delta > 0$, и предельного перехода при $\delta \rightarrow 0$. Теорема доказана.

Автор признателен профессору А. В. Булинскому за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. V. Bulinski, C. Suquet // Statist. Probab. Lett. 2001. V. 54. №2. P. 215–226.
 [2] L. Pitt // Ann. Probab. 1982. V. 10. №2. P. 496–499. [3] K. Joag-Dev, M. Perlman, L. Pitt // Ann. Probab. 1983. V. 11. №2. P. 451–455. [4] K. Joag-Dev, F. Proschan // Ann. Statist. 1983. V. 11. №1. P. 286–295.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
23.09.2002