Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Зудилин, Алгебраические соотношения для кратных дзета-значений,
УМН, 2003, том 58, выпуск 1, 3–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm592>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 16:21:08

УДК 511.3+512.573

**АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ
ДЛЯ КРАТНЫХ ДЗЕТА-ЗНАЧЕНИЙ**

В. В. Зудилин

Обзор посвящен многомерному обобщению дзета-функции Римана как функции натурального аргумента.

Библиография: 34 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	3
2. Кратные дзета-значения	4
3. Тожества: метод простейших дробей	5
4. Алгебра кратных дзета-значений	9
5. Шаффл-алгебра обобщенных полилогарифмов	11
6. Теорема о двойственности	13
7. Тожества: метод производящей функции	14
8. Квази-шаффл-произведения	16
9. Функциональная модель стаффл-алгебры	19
10. Гомоморфизм Хоффмана для стаффл-алгебры	21
11. Дифференцирования	22
12. Дифференцирования Ихары–Канеко и соотношения Оно	24
13. Открытые вопросы	27
14. q -аналоги кратных дзета-значений	28
Список литературы	31

1. ВведениеВ области $\operatorname{Re} s > 1$ дзета-функция Римана может быть задана сходящимся рядом

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \quad (1)$$

Одной из интересных и все еще нерешенных задач остается вопрос о полиномиальных соотношениях над $\mathbb{Q}$ для чисел $\zeta(s)$, $s = 2, 3, 4, \dots$. Благодаря Эйлеру известна формула

$$\zeta(s) = -\frac{(2\pi i)^s B_s}{2s!} \quad \text{для } s = 2, 4, 6, \dots, \quad (2)$$

выражающая значения дзета-функции в четных точках в терминах числа

$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 3.14159265358979323846 \dots$$

и чисел Бернулли $B_s \in \mathbb{Q}$, которые задаются производящей функцией

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{s=2}^{\infty} B_s \frac{t^s}{s!}, \quad B_s = 0 \text{ для нечетных } s \geq 3. \quad (3)$$

Соотношение (2) влечет совпадение колец $\mathbb{Q}[\zeta(2), \zeta(4), \zeta(6), \zeta(8), \dots]$ и $\mathbb{Q}[\pi^2]$, так что с учетом теоремы Линдемманна [17] о трансцендентности π можно заключить, что каждое из этих колец имеет степень трансцендентности 1 над полем рациональных чисел. Об арифметической природе значений дзета-функции в нечетных точках $s = 3, 5, 7, \dots$ известно совсем немного: Апери доказал [1] иррациональность числа $\zeta(3)$ и недавно Ривоаль установил [22] бесконечность множества иррациональных чисел среди $\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \dots$. Предположительно, каждое из этих чисел является трансцендентным и общий ответ на поставленный выше вопрос о полиномиальных соотношениях над $\mathbb{Q}$ для значений ряда (1) при целых $s \geq 2$ выглядит очень просто.

ГИПОТЕЗА 1. *Числа*

$$\pi, \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \dots$$

алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$.

Эту гипотезу можно отнести к математическому фольклору (см., например, [7], [28]). В настоящем обзоре мы обсуждаем некоторое обобщение проблемы алгебраической независимости значений дзета-функции Римана в положительных целых точках (*дзета-значений*). Речь пойдет об объекте, который глубоко изучается в течение последнего десятилетия в связи с проблемами не только теории чисел, но и комбинаторики, алгебры, анализа, алгебраической геометрии, квантовой физики и многих других разделов математики. В то же время, работ в этом направлении на русском языке до сих пор не существует (отметим только готовящуюся к печати статью [25]). Этой публикацией мы надеемся привлечь внимание российских математиков к задачам, связанным с *кратными дзета-значениями*.

Автор искренне признателен рецензенту за ряд ценных замечаний, которые существенно улучшили изложение.

2. Кратные дзета-значения

Ряд (1) допускает следующее многомерное обобщение. При целых положительных $s_1, s_2, \dots, s_l$ с $s_1 > 1$ рассмотрим значения l -кратной дзета-функции

$$\zeta(s) = \zeta(s_1, s_2, \dots, s_l) := \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_l \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_l^{s_l}}; \quad (4)$$

соответствующий мультииндекс $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_l)$ будем в дальнейшем называть *допустимым*. Величины (4) называются *кратными дзета-значениями* [30] (отсюда аббревиатура MZV – *multiple zeta value*), или *кратными гармоническими рядами* [10], или *эйлеровыми суммами*. Суммы (4) при $l = 2$ восходят к Эйлеру [5], установившему семейство тождеств, связывающих двукратные дзета-значения с обычными (см. далее следствие из теоремы 1); в частности, Эйлер доказал тождество

$$\zeta(2, 1) = \zeta(3), \quad (5)$$

которое постигла участь неоднократно переоткрытия. Числа (4) были введены Хоффманом в [10] и независимо Загиром в [30] (с другим порядком суммирования в правой части (4)); кроме того, в [10] и [30] были установлены некоторые $\mathbb{Q}$ -линейные и $\mathbb{Q}$ -полиномиальные тождества для кратных дзета-значений, а также сформулирован ряд гипотез (часть из которых была в дальнейшем доказана) о структуре алгебраических соотношений для семейства величин (4). Хоффман предложил [10] также альтернативное определение эйлеровых сумм

$$\tilde{\zeta}(\mathbf{s}) = \tilde{\zeta}(s_1, s_2, \dots, s_l) := \sum_{n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_l \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_l^{s_l}} \quad (6)$$

с нестрогими неравенствами при суммировании. Разумеется, все соотношения для рядов (6) могут быть без труда переписаны и для рядов (4) (см., например, [10], [25]), хотя некоторые тождества имеют компактную форму именно в терминах кратных дзета-значений (6) (см. соотношения (38) в разделе 7 далее).

Для каждого числа (4) определим две характеристики: *вес* (или *степень*) $|\mathbf{s}| := s_1 + s_2 + \dots + s_l$ и *длину* (или *глубину*) $\ell(\mathbf{s}) := l$.

Отметим [31], что ряд в правой части (4) сходится абсолютно в области $\operatorname{Re} s_1 > 1$, $\sum_{k=1}^l \operatorname{Re} s_k > l$; более того, кратная дзета-функция $\zeta(\mathbf{s})$, задаваемая в этой области рядом (4), может быть аналитически продолжена до мероморфной функции на всем пространстве $\mathbb{C}^l$ с возможными простыми полюсами на гиперплоскостях $s_1 = 1$ и $\sum_{k=1}^j s_k = j + 1 - m$, где j , $1 < j \leq l$, и $m \geq 1$ – целые числа. Вопросы о существовании функционального уравнения при $l > 1$ и локализации нетривиальных нулей (аналог гипотезы Римана) для функции $\zeta(\mathbf{s})$ остаются открытыми.

3. Тождества: метод простейших дробей

В этом разделе мы приведем примеры тождеств для кратных дзета-значений, которые доказываются элементарным аналитическим методом – *методом простейших дробей*.

ТЕОРЕМА 1 (соотношения Хоффмана [10; теорема 5.1]). *Для любого допустимого мультииндекса $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_l)$ справедливо тождество*

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^l \zeta(s_1, \dots, s_{k-1}, s_k + 1, s_{k+1}, \dots, s_l) \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ s_k \geq 2}}^l \sum_{j=0}^{s_k-2} \zeta(s_1, \dots, s_{k-1}, s_k - j, j + 1, s_{k+1}, \dots, s_l). \end{aligned} \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $k = 1, 2, \dots, l$ имеем

$$\begin{aligned}
& \sum_{n_k > n_{k+1} > \dots > n_l \geq 1} \frac{1}{n_k^{s_k+1} n_{k+1}^{s_{k+1}} \dots n_l^{s_l}} + \sum_{n_k > m > n_{k+1} > \dots > n_l \geq 1} \frac{1}{n_k^{s_k} m n_{k+1}^{s_{k+1}} \dots n_l^{s_l}} \\
&= \sum_{n_k \geq m > n_{k+1} > \dots > n_l \geq 1} \frac{1}{n_k^{s_k} m n_{k+1}^{s_{k+1}} \dots n_l^{s_l}} \\
&= \sum_{n_k > n_{k+1} > \dots > n_l \geq 1} \sum_{m=n_{k+1}+1}^{n_k} \frac{1}{m n_k^{s_k} n_{k+1}^{s_{k+1}} \dots n_l^{s_l}},
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
& \zeta(s_1, \dots, s_{k-1}, s_k + 1, s_{k+1}, \dots, s_l) + \zeta(s_1, \dots, s_{k-1}, s_k, 1, s_{k+1}, \dots, s_l) \\
&= \sum_{n_1 > \dots > n_k > n_{k+1} > \dots > n_l \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_k^{s_k+1} n_{k+1}^{s_{k+1}} \dots n_l^{s_l}} \\
&\quad + \sum_{n_1 > \dots > n_k > m > n_{k+1} > \dots > n_l \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_k^{s_k} m n_{k+1}^{s_{k+1}} \dots n_l^{s_l}} \\
&= \sum_{n_1 > \dots > n_k > n_{k+1} > \dots > n_l \geq 1} \sum_{m=n_{k+1}+1}^{n_k} \frac{1}{m n_1^{s_1} \dots n_k^{s_k} n_{k+1}^{s_{k+1}} \dots n_l^{s_l}} \\
&= \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_l \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_l^{s_l}} \sum_{m=n_{k+1}+1}^{n_k} \frac{1}{m}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^l (\zeta(s_1, \dots, s_{k-1}, s_k + 1, s_{k+1}, \dots, s_l) + \zeta(s_1, \dots, s_{k-1}, s_k, 1, s_{k+1}, \dots, s_l)) \\
&= \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_l \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_l^{s_l}} \sum_{m=1}^{n_1} \frac{1}{m} \\
&= \sum_{m_1, m_2, \dots, m_l \geq 1} \frac{1}{m_1^{s_1} (m_1 + m_2)^{s_2-1} \dots (m_1 + \dots + m_l)^{s_l}} \sum_{m=1}^{m_1+\dots+m_l} \frac{1}{m} \\
&= \sum_{m_1, m_2, \dots, m_l \geq 1} \frac{1}{M_1^{s_1} M_2^{s_2-1} \dots M_l^{s_l}} \sum_{m_{l+1} \geq 1} \left(\frac{1}{m_{l+1}} - \frac{1}{M_{l+1}} \right), \tag{8}
\end{aligned}$$

где мы ввели обозначение $M_k = m_1 + m_2 + \dots + m_k$ для $k = 1, \dots, l+1$ (при этом, как несложно заметить, $M_k = n_{l+1-k}$ для $k = 1, \dots, l$). Отметим теперь следующее разложение в сумму простейших дробей (относительно параметра u):

$$\frac{1}{u(u+v)^s} = \frac{1}{v^s u} - \sum_{j=0}^{s-1} \frac{1}{v^{j+1} (u+v)^{s-j}}, \quad u, v \in \mathbb{R}; \tag{9}$$

для доказательства достаточно воспользоваться тем, что в правой части суммируется геометрическая прогрессия. Полагая $u = m_{l+1}$, $v = M_l$ и $s = s_1$ в (9), получаем

$$\frac{1}{m_{l+1}M_{l+1}^{s_1}} = \frac{1}{m_{l+1}(m_{l+1} + M_l)^{s_1}} = \frac{1}{M_l^{s_1}m_{l+1}} - \sum_{j=0}^{s_1-1} \frac{1}{M_l^{j+1}M_{l+1}^{s_1-j}},$$

откуда

$$\frac{1}{M_l^{s_1}} \left(\frac{1}{m_{l+1}} - \frac{1}{M_{l+1}} \right) = \sum_{j=0}^{s_1-2} \frac{1}{M_l^{j+1}M_{l+1}^{s_1-j}} + \frac{1}{m_{l+1}M_{l+1}^{s_1}}.$$

Продолжая равенство (8), находим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^l (\zeta(s_1, \dots, s_{k-1}, s_k + 1, s_{k+1}, \dots, s_l) + \zeta(s_1, \dots, s_{k-1}, s_k, 1, s_{k+1}, \dots, s_l)) \\ &= \sum_{j=0}^{s_1-2} \sum_{m_1, m_2, \dots, m_{l+1} \geq 1} \frac{1}{M_1^{s_l} M_2^{s_{l-1}} \dots M_{l-1}^{s_2} M_l^{j+1} M_{l+1}^{s_1-j}} \\ &+ \sum_{m_1, m_2, \dots, m_{l+1} \geq 1} \frac{1}{M_1^{s_l} M_2^{s_{l-1}} \dots M_{l-1}^{s_2} m_{l+1} M_{l+1}^{s_1}} \\ &= \sum_{j=0}^{s_1-2} \zeta(s_1 - j, j + 1, s_2, \dots, s_l) + \sum_{m_1, m_2, \dots, m_{l+1} \geq 1} \frac{1}{M_1^{s_l} M_2^{s_{l-1}} \dots M_{l-1}^{s_2} m_l M_{l+1}^{s_1}} \end{aligned} \quad (10)$$

(в последней кратной сумме мы поменяли местами индексы m_l и m_{l+1}). Используя теперь тождество (9) для $u = m_{k+1}$, $v = M_k = M_{k+1} - m_{k+1}$ и $s = s_{l+1-k}$, заключаем, что

$$\frac{1}{M_k^{s_{l+1-k}} m_{k+1}} = \sum_{j=0}^{s_{l+1-k}-1} \frac{1}{M_k^{j+1} M_{k+1}^{s_{l+1-k}-j}} + \frac{1}{m_{k+1} M_{k+1}^{s_{l+1-k}}}, \quad k = 1, 2, \dots, l-1,$$

откуда

$$\begin{aligned} & \sum_{m_1, m_2, \dots, m_{l+1} \geq 1} \frac{1}{M_1^{s_l} \dots M_k^{s_{l+1-k}} m_{k+1} M_{k+2}^{s_{l-k}} \dots M_{l+1}^{s_1}} \\ &= \sum_{j=0}^{s_{l+1-k}-1} \sum_{m_1, m_2, \dots, m_{l+1} \geq 1} \frac{1}{M_1^{s_l} \dots M_{k-1}^{s_{l+2-k}} M_k^{j+1} M_{k+1}^{s_{l+1-k}-j} M_{k+2}^{s_{l-k}} \dots M_{l+1}^{s_1}} \\ &+ \sum_{m_1, m_2, \dots, m_{l+1} \geq 1} \frac{1}{M_1^{s_l} \dots M_{k-1}^{s_{l+2-k}} m_{k+1} M_{k+1}^{s_{l+1-k}} \dots M_{l+1}^{s_1}} \\ &= \sum_{j=0}^{s_{l+1-k}-1} \zeta(s_1, \dots, s_{l-k}, s_{l+1-k} - j, j + 1, s_{l+2-k}, \dots, s_l) \\ &+ \sum_{m_1, m_2, \dots, m_{l+1} \geq 1} \frac{1}{M_1^{s_l} \dots M_{k-1}^{s_{l+2-k}} m_k M_{k+1}^{s_{l+1-k}} \dots M_{l+1}^{s_1}}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$k = 1, 2, \dots, l-1.$$

Последовательно применяя тождества (11) для кратной суммы в правой части равенства (10) в обратном порядке (т.е. начиная с $k = l - 1$ и заканчивая $k = 1$), получаем

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^l (\zeta(s_1, \dots, s_{k-1}, s_k + 1, s_{k+1}, \dots, s_l) + \zeta(s_1, \dots, s_{k-1}, s_k, 1, s_{k+1}, \dots, s_l)) \\
&= \sum_{j=0}^{s_1-2} \zeta(s_1 - j, j + 1, s_2, \dots, s_l) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{l-1} \sum_{j=0}^{s_{l+1-k}-1} \zeta(s_1, \dots, s_{l-k}, s_{l+1-k} - j, j + 1, s_{l+2-k}, \dots, s_l) \\
&\quad + \sum_{m_1, m_2, \dots, m_{l+1} \geq 1} \frac{1}{m_1 M_2^{s_l} M_3^{s_{l-1}} \dots M_{l+1}^{s_1}} \\
&= \sum_{k=1}^l \sum_{j=0}^{s_k-2} \zeta(s_1, \dots, s_{k-1}, s_k - j, j + 1, s_{k+1}, \dots, s_l) \\
&\quad + \sum_{k=1}^l \zeta(s_1, \dots, s_{k-1}, s_k, 1, s_{k+1}, \dots, s_l). \tag{12}
\end{aligned}$$

Произведя необходимые сокращения в левой и правой частях равенства (12), приходим в результате к требуемому тождеству (7).

При $l = 1$ утверждение теоремы 1 может быть записано в следующем виде.

СЛЕДСТВИЕ (теорема Эйлера). *Для любого целого $s \geq 3$ справедливо тождество*

$$\zeta(s) = \sum_{j=1}^{s-2} \zeta(s - j, j). \tag{13}$$

Отметим также, что в случае $s = 3$ тождество (13) есть не что иное, как соотношение (5).

С помощью метода простейших дробей в работе [13] доказано также следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2 (теорема о циклической сумме). *Для любого допустимого мультииндекса $s = (s_1, s_2, \dots, s_l)$ справедливо тождество*

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^l \zeta(s_k + 1, s_{k+1}, \dots, s_l, s_1, \dots, s_{k-1}) \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ s_k \geq 2}}^l \sum_{j=0}^{s_k-2} \zeta(s_k - j, s_{k+1}, \dots, s_l, s_1, \dots, s_{k-1}, j + 1).
\end{aligned}$$

Из теоремы 2 непосредственно вытекает результат о том, что сумма всех кратных дзета-значений фиксированной длины и фиксированного веса не зависит от длины; это утверждение так же, как и теорема 1, обобщает приведенную выше теорему Эйлера.

ТЕОРЕМА 3 (теорема о полной сумме). *Для любых целых $s > 1$ и $l \geq 1$ справедливо тождество*

$$\sum_{\substack{s_1 > 1, s_2 \geq 1, \dots, s_l \geq 1 \\ s_1 + s_2 + \dots + s_l = s}} \zeta(s_1, s_2, \dots, s_l) = \zeta(s).$$

Теоремы 1 и 3 являются частным случаем соотношений Оно [21], о которых мы говорим далее в разделе 12.

4. Алгебра кратных дзета-значений

Этот раздел основан на работах [11] и [30]. Для описания известных алгебраических соотношений (т.е. числовых тождеств) над $\mathbb{Q}$ для чисел (4) оказывается удобным представлять ζ как линейное отображение некоторой полиномиальной алгебры на поле действительных чисел. Рассмотрим кодирование мультииндексов $\mathbf{s}$ словами (монами от некоммутативных переменных) над алфавитом $X = \{x_0, x_1\}$ по правилу

$$\mathbf{s} \mapsto x_{\mathbf{s}} = x_0^{s_1-1} x_1 x_0^{s_2-1} x_1 \cdots x_0^{s_l-1} x_1.$$

Положим

$$\zeta(x_{\mathbf{s}}) := \zeta(\mathbf{s}) \tag{14}$$

для всех допустимых (начинающихся с x_0 и кончающихся на x_1) слов; тогда вес (или степень) $|x_{\mathbf{s}}| := |\mathbf{s}|$ совпадают со степенью монома $x_{\mathbf{s}}$ по совокупности переменных, а длина $\ell(x_{\mathbf{s}}) := \ell(\mathbf{s})$ является степенью по переменной x_1 .

Пусть $\mathbb{Q}\langle X \rangle = \mathbb{Q}\langle x_0, x_1 \rangle$ – градуированная по степени $\mathbb{Q}$ -алгебра (где мы считаем степень каждой переменной x_0 и x_1 равной 1) многочленов от двух некоммутирующих переменных; мы отождествляем алгебру $\mathbb{Q}\langle X \rangle$ с градуированным $\mathbb{Q}$ -векторным пространством $\mathfrak{H}$, натянутым на мономы от переменных x_0, x_1 . Определим также градуированные $\mathbb{Q}$ -векторные пространства $\mathfrak{H}^1 = \mathbb{Q}\mathbf{1} \oplus \mathfrak{H}x_1$ и $\mathfrak{H}^0 = \mathbb{Q}\mathbf{1} \oplus x_0\mathfrak{H}x_1$, где $\mathbf{1}$ – единица (пустое слово веса 0 и длины 0) алгебры $\mathbb{Q}\langle X \rangle$. Тогда $\mathfrak{H}^1$ можно отождествлять с подалгеброй алгебры $\mathbb{Q}\langle X \rangle$, порожденной образующими $y_s = x_0^{s-1}x_1$, в то время как $\mathfrak{H}^0$ является $\mathbb{Q}$ -векторным пространством, натянутым на допустимые слова. Теперь мы можем представлять функцию ζ как $\mathbb{Q}$ -линейное отображение $\zeta: \mathfrak{H}^0 \rightarrow \mathbb{R}$, определенное соотношениями $\zeta(\mathbf{1}) = 1$ и (14).

Определим умножения $\sqcup$ (*тасование* или *шаффтл-произведение*) на $\mathfrak{H}$ и $*$ (*гармоническое* или *стаффтл-произведение*) на $\mathfrak{H}^1$ правилами

$$\mathbf{1} \sqcup w = w \sqcup \mathbf{1} = w, \quad \mathbf{1} * w = w * \mathbf{1} = w \tag{15}$$

для всякого слова w и

$$x_j u \sqcup x_k v = x_j (u \sqcup x_k v) + x_k (x_j u \sqcup v), \tag{16}$$

$$y_j u * y_k v = y_j (u * y_k v) + y_k (y_j u * v) + y_{j+k} (u * v) \tag{17}$$

для любых слов u, v , любых букв x_j, x_k и любых образующих y_j, y_k подалгебры $\mathfrak{H}^1$ соответственно, распространяя правила (15)–(17) на всю алгебру $\mathfrak{H}$ и всю подалгебру $\mathfrak{H}^1$ по линейности. Иногда оказывается полезным рассматривать стаффл-произведение на всей алгебре $\mathfrak{H}$, формально добавляя к (17) правило

$$x_0^j * w = w * x_0^j = wx_0^j \quad (18)$$

для всякого слова w и целого $j \geq 1$. Отметим, что индуктивные аргументы позволяют доказать коммутативность и ассоциативность каждого из умножений (см. по этому поводу раздел 8 далее); получающиеся алгебры $\mathfrak{H}_{\sqcup} := (\mathfrak{H}, \sqcup)$, $\mathfrak{H}_*^1 := (\mathfrak{H}^1, *)$ (а также $\mathfrak{H}_* := (\mathfrak{H}, *)$) являются примерами так называемых *алгебр Хопфа*.

Следующие два утверждения мотивируют рассмотрение введенных умножений $\sqcup$ и $*$; их доказательства можно найти в [11], [13], [28].

ТЕОРЕМА 4. *Отображение ζ является гомоморфизмом шаффл-алгебры $\mathfrak{H}_{\sqcup}^0 := (\mathfrak{H}^0, \sqcup)$ на $\mathbb{R}$, т. е.*

$$\zeta(w_1 \sqcup w_2) = \zeta(w_1)\zeta(w_2) \quad \text{для всех } w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^0. \quad (19)$$

ТЕОРЕМА 5. *Отображение ζ является гомоморфизмом стаффл-алгебры $\mathfrak{H}_*^0 := (\mathfrak{H}^0, *)$ на $\mathbb{R}$, т. е.*

$$\zeta(w_1 * w_2) = \zeta(w_1)\zeta(w_2) \quad \text{для всех } w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^0. \quad (20)$$

В дальнейшем мы приводим подробные доказательства этих двух теорем, использующие дифференциально-разностное происхождение умножений $\sqcup$ и $*$ в подходящих функциональных моделях алгебр $\mathfrak{H}_{\sqcup}$ и $\mathfrak{H}_*^0$. Доказывая теорему 4 (см. раздел 5), мы следуем схеме работы [27], в то время как наше доказательство теоремы 5 (см. раздел 9) является новым.

Еще один тип тождеств дается следующим утверждением, вывод которого из теоремы 1 приводится в разделе 11.

ТЕОРЕМА 6. *Отображение ζ удовлетворяет соотношениям*

$$\zeta(x_1 \sqcup w - x_1 * w) = 0 \quad \text{для всех } w \in \mathfrak{H}^0 \quad (21)$$

(в частности, многочлены $x_1 \sqcup w - x_1 * w$ лежат в $\mathfrak{H}^0$).

Все известные (доказанные и экспериментально полученные) к настоящему моменту тождества для кратных дзета-значений следуют из тождеств (19)–(21). Поэтому следующая гипотеза выглядит вполне правдоподобно.

ГИПОТЕЗА 2 [11], [18], [27]. *Все алгебраические соотношения над $\mathbb{Q}$ между кратными дзета-значениями порождаются тождествами (19)–(21); иными словами,*

$$\ker \zeta = \{u \sqcup v - u * v : u \in \mathfrak{H}^1, v \in \mathfrak{H}^0\}.$$

5. Шаффл-алгебра обобщенных полилогарифмов

Чтобы доказать шаффл-соотношения (19) для кратных дзета-значений, определим обобщенные полилогарифмы

$$\text{Li}_{\mathbf{s}}(z) := \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_l \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_l^{s_l}}, \quad |z| < 1, \quad (22)$$

для любого набора целых положительных $s_1, s_2, \dots, s_l$. Из определения получаем

$$\text{Li}_{\mathbf{s}}(1) = \zeta(s), \quad \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^l, \quad s_1 \geq 2, s_2 \geq 1, \dots, s_l \geq 1. \quad (23)$$

Полагая, как и в случае кратных дзета-значений,

$$\text{Li}_{x_{\mathbf{s}}}(z) := \text{Li}_{\mathbf{s}}(z), \quad \text{Li}_1(z) := 1, \quad (24)$$

расширим действие отображения $\text{Li}: w \mapsto \text{Li}_w(z)$ по линейности на градуированную алгебру $\mathfrak{H}^1$ (не $\mathfrak{H}$, поскольку мультииндексы кодируются словами из $\mathfrak{H}^1$).

ЛЕММА 1. Пусть $w \in \mathfrak{H}^1$ – произвольное непустое слово и x_j – первая буква в его записи (иными словами, $w = x_j u$ для некоторого слова $u \in \mathfrak{H}^1$). Тогда

$$\frac{d}{dz} \text{Li}_w(z) = \frac{d}{dz} \text{Li}_{x_j u}(z) = \omega_j(z) \text{Li}_u(z), \quad (25)$$

где

$$\omega_j(z) = \omega_{x_j}(z) := \begin{cases} \frac{1}{z}, & \text{если } x_j = x_0, \\ \frac{1}{1-z}, & \text{если } x_j = x_1. \end{cases} \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w = x_j u = x_{\mathbf{s}}$ для некоторого мультииндекса $\mathbf{s}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \text{Li}_w(z) &= \frac{d}{dz} \text{Li}_{\mathbf{s}}(z) = \frac{d}{dz} \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_l \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_l^{s_l}}, \\ &= \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_l \geq 1} \frac{z^{n_1-1}}{n_1^{s_1-1} n_2^{s_2} \dots n_l^{s_l}}. \end{aligned}$$

Поэтому в случае $s_1 > 1$ (отвечающем букве $x_j = x_0$) мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \text{Li}_{x_0 u}(z) &= \frac{1}{z} \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_l \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1-1} n_2^{s_2} \dots n_l^{s_l}} \\ &= \frac{1}{z} \text{Li}_{s_1-1, s_2, \dots, s_l}(z) = \frac{1}{z} \text{Li}_u(z), \end{aligned}$$

а в случае $s_1 = 1$ (отвечающем букве $x_j = x_1$) –

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \text{Li}_{x_1 u}(z) &= \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_l \geq 1} \frac{z^{n_1-1}}{n_2^{s_2} \dots n_l^{s_l}} = \sum_{n_2 > \dots > n_l \geq 1} \frac{1}{n_2^{s_2} \dots n_l^{s_l}} \sum_{n_1=n_2+1}^{\infty} z^{n_1-1} \\ &= \frac{1}{1-z} \sum_{n_2 > \dots > n_l \geq 1} \frac{z^{n_2}}{n_2^{s_2} \dots n_l^{s_l}} = \frac{1}{1-z} \text{Li}_{s_2, \dots, s_l}(z) = \frac{1}{1-z} \text{Li}_u(z), \end{aligned}$$

что завершает доказательство.

Лемма 1 мотивирует иное определение обобщенных полилогарифмов, теперь уже для всех элементов алгебры $\mathfrak{H}$. Как и раньше, его достаточно предъявить только для слов $w \in \mathfrak{H}$, распространяя затем по линейности на всю алгебру; положим $\text{Li}_1(z) = 1$ и

$$\text{Li}_w(z) = \begin{cases} \frac{\log^s z}{s!}, & \text{если } w = x_0^s \text{ для некоторого } s \geq 1, \\ \int_0^z \omega_j(z) \text{Li}_u(z) dz, & \text{если } w = x_j u \text{ содержит букву } x_1. \end{cases} \quad (27)$$

Тогда лемма 1 остается справедливой и для расширенной версии (27) полилогарифмов (откуда следует совпадение вновь определенных полилогарифмов со “старыми” (24) для слов $w \in \mathfrak{H}^1$); более того,

$$\lim_{z \rightarrow 0+0} \text{Li}_w(z) = 0, \quad \text{если слово } w \text{ содержит букву } x_1.$$

Несложная проверка показывает, что обобщенные полилогарифмы являются непрерывными вещественнозначными функциями на интервале $(0, 1)$.

ЛЕММА 2. *Отображение $w \mapsto \text{Li}_w(z)$ является гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{H}_{\sqcup}$ на $C((0, 1); \mathbb{R})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы должны проверить равенства

$$\text{Li}_{w_1 \sqcup w_2}(z) = \text{Li}_{w_1}(z) \text{Li}_{w_2}(z) \quad \text{для всех } w_1, w_2 \in \mathfrak{H}. \quad (28)$$

Достаточно проделать эту работу для слов $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}$. Будем доказывать равенство (28) индукцией по величине $|w_1| + |w_2|$. Если $w_1 = \mathbf{1}$ или $w_2 = \mathbf{1}$, соотношение (28) превращается в тавтологию согласно (15). В противном случае $w_1 = x_j u$ и $w_2 = x_k v$, так что согласно лемме 1 и индукционному предположению имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(\text{Li}_{w_1}(z) \text{Li}_{w_2}(z)) &= \frac{d}{dz}(\text{Li}_{x_j u}(z) \text{Li}_{x_k v}(z)) \\ &= \frac{d}{dz} \text{Li}_{x_j u}(z) \cdot \text{Li}_{x_k v}(z) + \text{Li}_{x_j u}(z) \cdot \frac{d}{dz} \text{Li}_{x_k v}(z) \\ &= \omega_j(z) \text{Li}_u(z) \text{Li}_{x_k v}(z) + \omega_k(z) \text{Li}_{x_j u}(z) \text{Li}_v(z) \\ &= \omega_j(z) \text{Li}_{u \sqcup x_k v}(z) + \omega_k(z) \text{Li}_{x_j u \sqcup v}(z) \\ &= \frac{d}{dz}(\text{Li}_{x_j(u \sqcup x_k v)}(z) + \text{Li}_{x_k(x_j u \sqcup v)}(z)) \\ &= \frac{d}{dz} \text{Li}_{x_j u \sqcup x_k v}(z) \\ &= \frac{d}{dz} \text{Li}_{w_1 \sqcup w_2}(z). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\text{Li}_{w_1}(z) \text{Li}_{w_2}(z) = \text{Li}_{w_1 \sqcup w_2}(z) + C, \quad (29)$$

и предельный переход $z \rightarrow 0 + 0$, если хотя бы одно из слов w_1, w_2 содержит букву x_1 , или подстановка $z = 1$, если в записи слов w_1, w_2 участвует только буква x_0 , приводит к соотношению $C = 0$. Таким образом, равенство (29) превращается в требуемое (28). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Теорема 4 следует из леммы 2 и соотношений (23).

Явное вычисление группы монодромии для системы дифференциальных уравнений (25) позволило Мину, Петито и ван дер Ховену [19], [20] доказать, что гомоморфизм $w \mapsto \text{Li}_w(z)$ шафл-алгебры $\mathfrak{H}_{\sqcup}$ над $\mathbb{C}$ является биективным, т.е. все $\mathbb{C}$ -алгебраические соотношения для обобщенных полилогарифмов индуцируются только шафл-соотношениями (28) и, в частности, обобщенные полилогарифмы линейно независимы над $\mathbb{C}$. Наиболее простое доказательство линейной независимости функций (22), как следствие элегантных тождеств для этих функций, принадлежит Уланскому [25]; это же утверждение следует из результата Сорокина [24].

6. Теорема о двойственности

Согласно лемме 1 для слова $w = x_{\varepsilon_1} x_{\varepsilon_2} \cdots x_{\varepsilon_k} \in \mathfrak{H}^1$ справедливо интегральное представление

$$\begin{aligned} \text{Li}_w(z) &= \int_0^z \omega_{\varepsilon_1}(z_1) dz_1 \int_0^{z_1} \omega_{\varepsilon_2}(z_2) dz_2 \cdots \int_0^{z_{k-1}} \omega_{\varepsilon_k}(z_k) dz_k \\ &= \int_{z > z_1 > z_2 > \cdots > z_{k-1} > z_k > 0} \omega_{\varepsilon_1}(z_1) \omega_{\varepsilon_2}(z_2) \cdots \omega_{\varepsilon_k}(z_k) dz_1 dz_2 \cdots dz_k \end{aligned} \quad (30)$$

в области $0 < z < 1$. В случае $x_{\varepsilon_1} \neq x_1$, т.е. $w \in \mathfrak{H}^0$, интеграл в (30) сходится в области $0 < z \leq 1$, так что в соответствии с (23) мы получаем представление [30] кратных дзета-значений

$$\zeta(w) = \int_{1 > z_1 > \cdots > z_k > 0} \omega_{\varepsilon_1}(z_1) \cdots \omega_{\varepsilon_k}(z_k) dz_1 \cdots dz_k \quad (31)$$

в виде *итерированных интегралов Чена*. Следующий результат является простым приложением интегрального представления (31).

Обозначим через τ анти-автоморфизм алгебры $\mathfrak{H} = \mathbb{Q}\langle x_0, x_1 \rangle$, меняющий местами x_0 и x_1 ; например, $\tau(x_0^2 x_1 x_0 x_1) = x_0 x_1 x_0 x_1^2$. Очевидно, τ является инволюцией, сохраняющей вес. Как несложно заметить, τ также является автоморфизмом подалгебры $\mathfrak{H}^0$.

ТЕОРЕМА 7 (теорема о двойственности [30]). *Для любого слова $w \in \mathfrak{H}^0$ выполняется*

$$\zeta(w) = \zeta(\tau w).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы достаточно сделать замену переменных $z'_1 = 1 - z_k, z'_2 = 1 - z_{k-1}, \dots, z'_k = 1 - z_1$ и воспользоваться соотношениями $\omega_0(z) = \omega_1(1 - z)$, вытекающими из (26).

В качестве самого простого следствия из теоремы 7 отметим (опять) тождество (5), получающееся для слова $w = x_0^2 x_1$, а также более общее тождество

$$\zeta(n+2) = \zeta(2, \underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ раз}}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (32)$$

для слов $w = x_0^{n+1} x_1$.

7. Тождества: метод производящей функции

Другим приложением доказанных в лемме 1 дифференциальных уравнений для обобщенных полилогарифмов является *метод производящей функции*.

Отметим, что для фиксированного допустимого мультииндекса $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_l)$ соответствующее множество *периодических* полилогарифмов

$$\text{Li}_{\{\mathbf{s}\}_n}(z), \quad \text{где } \{\mathbf{s}\}_n = (\underbrace{\mathbf{s}, \mathbf{s}, \dots, \mathbf{s}}_{n \text{ раз}}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(см., например, [4], [28]), обладает производящей функцией

$$L_{\mathbf{s}}(z, t) := \sum_{n=0}^{\infty} \text{Li}_{\{\mathbf{s}\}_n}(z) t^{n|\mathbf{s}|},$$

удовлетворяющей обыкновенному дифференциальному уравнению относительно переменной z . Так, например, в случае $\ell(\mathbf{s}) = 1$, т.е. $\mathbf{s} = (s)$, согласно лемме 1 соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид

$$\left(\left((1-z) \frac{d}{dz} \right) \left(z \frac{d}{dz} \right)^{s-1} - t^s \right) L_{\mathbf{s}}(z, t) = 0,$$

и его решение может быть явно указано в терминах обобщенного гипергеометрического ряда (см. [3], [4], [28]).

ЛЕММА 3 [4; теорема 12]. *Имеет место равенство*

$$L_{(3,1)}(z, t) = F\left(\frac{1}{2}(1+i)t, -\frac{1}{2}(1+i)t; 1; z\right) \cdot F\left(\frac{1}{2}(1-i)t, -\frac{1}{2}(1-i)t; 1; z\right), \quad (33)$$

где $F(a, b; c; z)$ – гауссова гипергеометрическая функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несложная проверка (с помощью леммы 1 для левой части) показывает, что обе части аннигилируют под действием дифференциального оператора

$$\left((1-z) \frac{d}{dz} \right)^2 \left(z \frac{d}{dz} \right)^2 - t^4;$$

кроме того, первые члены в разложении по степеням z обеих частей (33) совпадают:

$$1 + \frac{t^4}{8} z^2 + \frac{t^4}{18} z^3 + \frac{t^8 + 44t^4}{1536} z^4 + \dots$$

Отсюда следует утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 8 [4], [28]. *Для любого целого $n \geq 1$ имеет место тождество*

$$\zeta(\{3, 1\}_n) = \frac{2\pi^{4n}}{(4n+2)!}. \quad (34)$$

Доказательство. Согласно формуле суммирования Гаусса [29; гл. 14]

$$F(a, -a; 1; 1) = \frac{1}{\Gamma(1-a)\Gamma(1+a)} = \frac{\sin \pi a}{\pi a} \quad (35)$$

после подстановки $z = 1$ в равенство (33) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \zeta(\{3, 1\}_n) t^{4n} &= L_{(3,1)}(1, t) = \frac{\sin \frac{1}{2}(1+i)\pi t}{\frac{1}{2}(1+i)\pi t} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(1-i)\pi t}{\frac{1}{2}(1-i)\pi t} \\ &= \frac{1}{2\pi^2 t^2} \cdot (e^{(1+i)\pi t/2} - e^{-(1+i)\pi t/2}) (e^{(1-i)\pi t/2} - e^{-(1-i)\pi t/2}) \\ &= \frac{1}{2\pi^2 t^2} \cdot (e^{\pi t} + e^{-\pi t} - e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}) \\ &= \frac{1}{2\pi^2 t^2} \sum_{m=0}^{\infty} (1 + (-1)^m - i^m - (-i)^m) \frac{(\pi t)^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi^{4n} t^{4n}}{(4n+2)!}. \end{aligned}$$

Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях приводит к требуемому тождеству.

Утверждение теоремы 8 было сформулировано в [30] в качестве гипотезы. Это тождество – не единственный пример приложения метода производящей функции. Приведем еще несколько тождеств из [3], подобных (34), для которых указанный метод также оказывается эффективным:

$$\begin{aligned} \zeta(\{2\}_n) &= \frac{2(2\pi)^{2n}}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}, \quad \zeta(\{4\}_n) = \frac{4(2\pi)^{4n}}{(4n+2)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}, \\ \zeta(\{6\}_n) &= \frac{6(2\pi)^{6n}}{(6n+3)!}, \quad \zeta(\{8\}_n) = \frac{8(2\pi)^{8n}}{(8n+4)!} \left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n+2} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n+2} \right), \\ \zeta(\{10\}_n) &= \frac{10(2\pi)^{10n}}{(10n+5)!} \left(1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10n+5} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10n+5} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

для $n = 1, 2, \dots$. Тождества

$$\zeta(m+2, \{1\}_n) = \zeta(n+2, \{1\}_m), \quad m, n = 0, 1, 2, \dots,$$

могут быть получены как с помощью метода производящей функции [10], так и с помощью доказанной теоремы 7.

Несколько иной пример производящих функций связан с обобщением тождества Апери [1]

$$\zeta(3) = \frac{5}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^3 \binom{2k}{k}};$$

именно, справедливы разложения [16], [2]

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \zeta(2n+3) t^{2n} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3 (1 - t^2/k^2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^3 \binom{2k}{k}} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{1 - t^2/k^2} \right) \prod_{l=1}^{k-1} \left(1 - \frac{t^2}{l^2} \right), \\ \sum_{n=0}^{\infty} \zeta(4n+3) t^{4n} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3 (1 - t^4/k^4)} = \frac{5}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^3 \binom{2k}{k}} \frac{1}{1 - t^4/k^4} \prod_{l=1}^{k-1} \frac{1 + 4t^4/l^4}{1 - t^4/l^4}. \end{aligned} \quad (37)$$

Доказательство этих и некоторых других тождеств основано на применении формул преобразования и суммирования *обобщенных гипергеометрических функций*, подобно применению формулы (35) при доказательстве теоремы 8. Тождества (37) оказываются чрезвычайно полезными для быстрого вычисления значений дзета-функции Римана в нечетных целых точках.

Отметим также соотношения

$$\tilde{\zeta}(\{2\}_n, 1) = 2\zeta(2n + 1), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (38)$$

получающиеся в результате последовательного применения результатов работ [26] (или [33]) и [32]. Равенства (38) также обобщают тождество Эйлера (5) и тесно связаны с одним из способов доказательства теорем Апери [1] и Ривоаля [22], упомянутых в разделе 1. Однако вывод соотношений (38) из теорем 4–6 в случае произвольного n до сих пор неизвестен.

8. Квази-шафкл-произведения

Предложенная Хоффманом [12] конструкция позволяет рассматривать каждую из алгебр $\mathfrak{H}_{\square}$ и $\mathfrak{H}_*^1$ как частный случай некоторой общей алгебраической структуры. Именно этому обобщающему объекту и посвящен настоящий раздел.

Рассмотрим градуированную по степени некоммутативную полиномиальную алгебру $\mathfrak{A} = \mathcal{K}\langle A \rangle$ над полем $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}$; здесь A – локально конечное множество образующих (т.е. множество образующих фиксированной положительной степени конечно). Как обычно, элементы множества A будем называть буквами, а мономы от этих букв – словами. Для любого слова w через $\ell(w)$ обозначим его длину (количество букв, участвующих в его записи), а через $|w|$ – его вес или степень (сумму степеней букв). Единственное слово длины 0 и веса 0 – пустое слово – обозначим через $\mathbf{1}$; оно является единицей алгебры $\mathfrak{A}$. Нейтральный элемент алгебры $\mathfrak{A}$ обозначим через $\mathbf{0}$.

Определим теперь произведение $\circ$, аддитивно распространяя его на всю алгебру $\mathfrak{A}$, с помощью следующих правил:

$$\mathbf{1} \circ w = w \circ \mathbf{1} = w \quad (39)$$

для любого слова w ,

$$a_j u \circ a_k v = a_j (u \circ a_k v) + a_k (a_j u \circ v) + [a_j, a_k] (u \circ v) \quad (40)$$

для любых слов u, v и букв $a_j, a_k \in A$, где функционал

$$[\cdot, \cdot]: \bar{A} \times \bar{A} \rightarrow \bar{A} \quad (41)$$

($\bar{A} := A \cup \{\mathbf{0}\}$) удовлетворяет свойствам

(S0) $[a, \mathbf{0}] = \mathbf{0}$ для любого $a \in \bar{A}$;

(S1) $[[a_j, a_k], a_l] = [a_j, [a_k, a_l]]$ для любых $a_j, a_k, a_l \in \bar{A}$;

(S2) либо $[a_j, a_k] = \mathbf{0}$, либо $[a_k, a_j] = |a_j| + |a_k|$ для любых $a_j, a_k \in A$.

Тогда $\mathfrak{A}_\circ := (\mathfrak{A}, \circ)$ является ассоциативной градуированной $\mathcal{K}$ -алгеброй, а в случае справедливости дополнительного свойства

(S3) $[a_j, a_k] = [a_k, a_j]$ для любых $a_j, a_k \in \bar{A}$

она является коммутативной $\mathcal{K}$ -алгеброй [12; теорема 2.1].

Если $[a_j, a_k] = 0$ для всех букв $a_j, a_k \in A$, то $(\mathfrak{A}, \circ)$ является стандартной шафл-алгеброй; в частном случае $A = \{x_0, x_1\}$ мы получаем шафл-алгебру $\mathfrak{A}_\circ = \mathfrak{H}_{\square\square}$ кратных дзета-значений (или полилогарифмов). Стафл-алгебра $\mathfrak{H}_*^1$ отвечает выбору образующих элементов $A = \{y_j\}_{j=1}^\infty$ и функционала

$$[y_j, y_k] = y_{j+k} \quad \text{для целых } j \geq 1 \text{ и } k \geq 1.$$

Определим на алгебре $\mathfrak{A}$ с заданным функционалом (41) двойственное произведение $\bar{\circ}$ при помощи правил

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \bar{\circ} w &= w \bar{\circ} \mathbf{1} = w, \\ ua_j \bar{\circ} va_k &= (u \bar{\circ} va_k)a_j + (ua_j \bar{\circ} v)a_k + (u \bar{\circ} v)[a_j, a_k] \end{aligned}$$

вместо (39), (40) соответственно. Тогда $\mathfrak{A}_\circ := (\mathfrak{A}, \bar{\circ})$ также является (коммутативной в случае выполнения свойства (S3)) градуированной $\mathcal{K}$ -алгеброй.

ТЕОРЕМА 9. *Алгебры $\mathfrak{A}_\circ$ и $\mathfrak{A}_{\bar{\circ}}$ совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать соотношение

$$w_1 \circ w_2 = w_1 \bar{\circ} w_2 \tag{42}$$

для любых слов $w_1, w_2 \in \mathcal{K}\langle A \rangle$. Будем проводить доказательство индукцией по величине $\ell(w_1) + \ell(w_2)$. Если $\ell(w_1) = 0$ или $\ell(w_2) = 0$, то соотношение (42) превращается в очевидное тождество. Если $\ell(w_1) = \ell(w_2) = 1$, т.е. $w_1 = a_1$ и $w_2 = a_2$ являются буквами, то

$$a_1 \circ a_2 = a_1 a_2 + a_2 a_1 + [a_1, a_2] = a_1 \bar{\circ} a_2.$$

В случае $\ell(w_1) > 1$ и $\ell(w_2) = 1$, записывая $w_1 = a_1 u a_2$ и $w_2 = a_3 \in A$ и используя индукционное предположение, получаем

$$\begin{aligned} a_1 u a_2 \circ a_3 &= a_1(u a_2 \circ a_3) + a_3 a_1 u a_2 + [a_1, a_3] u a_2 \\ &= a_1(u a_2 \bar{\circ} a_3) + a_3 a_1 u a_2 + [a_1, a_3] u a_2 \\ &= a_1((u \bar{\circ} a_3) a_2 + u a_2 a_3 + u[a_2, a_3]) + a_3 a_1 u a_2 + [a_1, a_3] u a_2 \\ &= a_1((u \circ a_3) a_2 + u a_2 a_3 + u[a_2, a_3]) + a_3 a_1 u a_2 + [a_1, a_3] u a_2 \\ &= (a_1(u \circ a_3) + a_3 a_1 u + [a_1, a_3] u) a_2 + a_1 u a_2 a_3 + a_1 u[a_2, a_3] \\ &= (a_1 u \circ a_3) a_2 + a_1 u a_2 a_3 + a_1 u[a_2, a_3] \\ &= (a_1 u \bar{\circ} a_3) a_2 + a_1 u a_2 a_3 + a_1 u[a_2, a_3] \\ &= a_1 u a_2 \bar{\circ} a_3. \end{aligned}$$

Аналогично (но с более громоздкими выкладками) мы действуем в оставшемся случае $\ell(w_1) > 1$ и $\ell(w_2) > 1$. Полагая $w_1 = a_1 u a_2$, $w_2 = a_3 v a_4$ и используя индукционное предположение, находим

$$\begin{aligned} a_1 u a_2 \circ a_3 v a_4 &= a_1(u a_2 \circ a_3 v a_4) + a_3(a_1 u a_2 \circ v a_4) + [a_1, a_3](u a_2 \circ v a_4) \\ &= a_1(u a_2 \bar{\circ} a_3 v a_4) + a_3(a_1 u a_2 \bar{\circ} v a_4) + [a_1, a_3](u a_2 \bar{\circ} v a_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_1((u \bar{\circ} a_3 v a_4) a_2 + (u a_2 \bar{\circ} a_3 v) a_4 + (u \bar{\circ} a_3 v)[a_2, a_4]) \\
&\quad + a_3((a_1 u \bar{\circ} v a_4) a_2 + (a_1 u a_2 \bar{\circ} v) a_4 + (a_1 u \bar{\circ} v)[a_2, a_4]) \\
&\quad + [a_1, a_3]((u \bar{\circ} v a_4) a_2 + (u a_2 \bar{\circ} v) a_4 + (u \bar{\circ} v)[a_2, a_4]) \\
&= a_1((u \circ a_3 v a_4) a_2 + (u a_2 \circ a_3 v) a_4 + (u \circ a_3 v)[a_2, a_4]) \\
&\quad + a_3((a_1 u \circ v a_4) a_2 + (a_1 u a_2 \circ v) a_4 + (a_1 u \circ v)[a_2, a_4]) \\
&\quad + [a_1, a_3]((u \circ v a_4) a_2 + (u a_2 \circ v) a_4 + (u \circ v)[a_2, a_4]) \\
&= (a_1(u \circ a_3 v a_4) + a_3(a_1 u \circ v a_4) + [a_1, a_3](u \circ v a_4)) a_2 \\
&\quad + (a_1(u a_2 \circ a_3 v) + a_3(a_1 u a_2 \circ v) + [a_1, a_3](u a_2 \circ v)) a_4 \\
&\quad + (a_1(u \circ a_3 v) + a_3(a_1 u \circ v) + [a_1, a_3](u \circ v))[a_2, a_4] \\
&= (a_1 u \circ a_3 v a_4) a_2 + (a_1 u a_2 \circ a_3 v) a_4 + (a_1 u \circ a_3 v)[a_2, a_4] \\
&= (a_1 u \bar{\circ} a_3 v a_4) a_2 + (a_1 u a_2 \bar{\circ} a_3 v) a_4 + (a_1 u \bar{\circ} a_3 v)[a_2, a_4] \\
&= a_1 u a_2 \bar{\circ} a_3 v a_4.
\end{aligned}$$

Это завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. При наличии свойства (S3) приведенные рассуждения можно значительно упростить. Однако нам представляется важным совпадение алгебр $\mathfrak{A}_o$ и $\mathfrak{A}_{\bar{o}}$ в самой общей ситуации, когда функционал (41) удовлетворяет условиям (S0)–(S2).

В заключение этого раздела докажем еще одно вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 4. *Для любой буквы $a \in A$ и любых слов $u, v \in \mathfrak{A}$ справедливо тождество*

$$a \circ uv - (a \circ u)v = u(a \circ v - av). \quad (43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение индукцией по количеству букв в слове u . Если слово u пустое, то тождество (43) является тавтологией. В противном случае запишем слово u в виде $u = a_1 u_1$, где $a_1 \in A$ и слово u_1 состоит из меньшего количества букв, т.е. для него тождество

$$a \circ u_1 v - (a \circ u_1)v = u_1(a \circ v - av)$$

выполнено. Тогда

$$\begin{aligned}
a \circ uv - (a \circ u)v &= a \circ a_1 u_1 v - (a \circ a_1 u_1)v \\
&= a a_1 u_1 v + a_1(a \circ u_1 v) + [a, a_1]u_1 v \\
&\quad - (a a_1 u_1 + a_1(a \circ u_1) + [a, a_1]u_1)v \\
&= a_1(a \circ u_1 v - (a \circ u_1)v) = a_1 u_1(a \circ v - av) \\
&= u(a \circ v - av),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

9. Функциональная модель стаффл-алгебры

Функциональная модель стаффл-алгебры $\mathfrak{H}_*$ не может быть описана в полной аналогии с полилогарифмической моделью шаффл-алгебры $\mathfrak{H}_{\square}$, поскольку правило (17) не имеет дифференциальной интерпретации подобно (16). Поэтому мы воспользуемся разностной интерпретацией правила (17), именно (простейшим) разностным оператором

$$Df(t) = f(t-1) - f(t).$$

Как несложно проверить,

$$D(f_1(t)f_2(t)) = Df_1(t) \cdot f_2(t) + f_1(t) \cdot Df_2(t) + Df_1(t) \cdot Df_2(t), \quad (44)$$

а обратное отображение

$$Ig(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g(t+n),$$

т.е. $D(Ig(t)) = g(t)$, определено с точностью до постоянного слагаемого при условии, что на функцию $g(t)$ накладываются некоторые дополнительные ограничения при $t \rightarrow +\infty$, например $g(t) = O(t^{-2})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Согласно [6; § 3, п. 1] оператор D связан с оператором дифференцирования d/dt следующим образом:

$$D = e^{-d/dt} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{dt^n}.$$

Указанное равенство обосновывается формальным применением формулы Тейлора:

$$f(t-1) = f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{dt^n} f(t);$$

на самом деле, последнее равенство верно для любой целой функции. Экспоненцирование дифференцирований (на алгебрах слов) в связи с обобщением теоремы 1 проводится в разделе 12 далее.

Естественная аналогия с леммами 1, 2 согласно (17) и (44) подразумевает наличие функций $\omega_j(t)$, удовлетворяющих условиям

$$\omega_j(t)\omega_k(t) = \omega_{j+k}(t) \quad \text{для целых } j \geq 1 \text{ и } k \geq 1.$$

Самый простой выбор задается формулами

$$\omega_j(t) = \frac{1}{t^j}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

и это приводит нас к функциям

$$\text{Ri}_{\mathbf{s}}(t) = \text{Ri}_{s_1, \dots, s_{l-1}, s_l}(t) := I\left(\frac{1}{t^{s_l}} \text{Ri}_{s_1, \dots, s_{l-1}}(t)\right), \quad \text{Ri}_1(t) := 1,$$

определяемым индукцией по длине мультииндекса. Согласно определению мы получаем

$$D \text{Ri}_{uy_j}(t) = \frac{1}{t^j} \text{Ri}_u(t), \quad (45)$$

что в некотором смысле является дискретным аналогом формулы (25).

ЛЕММА 5. *Справедливо равенство*

$$\text{Ri}_{\mathbf{s}}(t) = \sum_{n_1 > \dots > n_{l-1} > n_l \geq 1} \frac{1}{(t+n_1)^{s_1} \dots (t+n_{l-1})^{s_{l-1}} (t+n_l)^{s_l}}; \quad (46)$$

в частности,

$$\text{Ri}_{\mathbf{s}}(0) = \zeta(\mathbf{s}), \quad \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^l, \quad s_1 \geq 2, s_2 \geq 1, \dots, s_l \geq 1, \quad (47)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Ri}_{\mathbf{s}}(t) = 0, \quad \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^l, \quad s_1 \geq 2, s_2 \geq 1, \dots, s_l \geq 1. \quad (48)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь определением, находим

$$\begin{aligned} \text{Ri}_{\mathbf{s}}(t) &= I\left(\frac{1}{t^{s_l}} \text{Ri}_{s_1, \dots, s_{l-1}}(t)\right) \\ &= I\left(\frac{1}{t^{s_l}} \sum_{n_1 > \dots > n_{l-1} \geq 1} \frac{1}{(t+n_1)^{s_1} \dots (t+n_{l-1})^{s_{l-1}}}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(t+n)^{s_l}} \sum_{n_1 > \dots > n_{l-1} \geq 1} \frac{1}{(t+n_1+n)^{s_1} \dots (t+n_{l-1}+n)^{s_{l-1}}} \\ &= \sum_{n'_1 > \dots > n'_{l-1} > n \geq 1} \frac{1}{(t+n'_1)^{s_1} \dots (t+n'_{l-1})^{s_{l-1}} (t+n)^{s_l}}, \end{aligned}$$

что и приводит нас к требуемой формуле (46).

Определим теперь произведение $\bar{*}$ на $\mathfrak{H}^1$ (и, в частности, на подалгебре $\mathfrak{H}^0$) с помощью правил

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \bar{*} w &= w \bar{*} \mathbf{1} = w, \\ uy_j \bar{*} vy_k &= (u \bar{*} vy_k)y_j + (uy_j \bar{*} v)y_k + (u \bar{*} v)y_{j+k} \end{aligned} \quad (49)$$

вместо (15), (17).

ЛЕММА 6. *Отображение $w \mapsto \text{Ri}_w(t)$ является гомоморфизмом алгебры $(\mathfrak{H}^0, \bar{*})$ на $C([0, +\infty); \mathbb{R})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам необходимо проверить соотношение

$$\text{Ri}_{w_1 \bar{*} w_2}(z) = \text{Ri}_{w_1}(z) \text{Ri}_{w_2}(z) \quad \text{для всех } w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^0; \quad (50)$$

не ограничивая общности, будем считать w_1, w_2 словами алгебры $\mathfrak{H}^0$. Докажем соотношение (50) индукцией по величине $\ell(w_1) + \ell(w_2)$; если $w_1 = \mathbf{1}$ или $w_2 = \mathbf{1}$, то

справедливость (50) очевидна ввиду (49). В противном случае запишем $w_1 = uy_j$, $w_2 = vy_k$ и воспользуемся формулами (44), (45) и индуктивным предположением:

$$\begin{aligned}
 D(\text{Ri}_{w_1}(t) \text{Ri}_{w_2}(t)) &= D(\text{Ri}_{uy_j}(t) \text{Ri}_{vy_k}(t)) \\
 &= D \text{Ri}_{uy_j}(t) \cdot \text{Ri}_{vy_k}(t) + \text{Ri}_{uy_j}(t) \cdot D \text{Ri}_{vy_k}(t) \\
 &\quad + D \text{Ri}_{uy_j}(t) \cdot D \text{Ri}_{vy_k}(t) \\
 &= \frac{1}{t^j} \text{Ri}_u(t) \text{Ri}_{vy_k}(t) + \frac{1}{t^k} \text{Ri}_{uy_j}(t) \text{Ri}_v(t) + \frac{1}{t^{j+k}} \text{Ri}_u(t) \text{Ri}_v(t) \\
 &= \frac{1}{t^j} \text{Ri}_{u \bar{*} vy_k}(t) + \frac{1}{t^k} \text{Ri}_{uy_j \bar{*} v}(t) + \frac{1}{t^{j+k}} \text{Ri}_{u \bar{*} v}(t) \\
 &= D(\text{Ri}_{(u \bar{*} vy_k)y_j}(t) + \text{Ri}_{(uy_j \bar{*} v)y_k}(t) + \text{Ri}_{(u \bar{*} v)y_{j+k}}(t)) \\
 &= D \text{Ri}_{uy_j \bar{*} vy_k}(t) \\
 &= D \text{Ri}_{w_1 \bar{*} w_2}(t).
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\text{Ri}_{w_1}(t) \text{Ri}_{w_2}(t) = \text{Ri}_{w_1 \bar{*} w_2}(t) + C \quad (51)$$

и, устремляя $t \rightarrow +\infty$, согласно (48) получаем $C = 0$. Таким образом, соотношение (51) превращается в требуемое равенство (50). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Согласно (47) теорема 5 следует из леммы 6 и теоремы 9.

10. Гомоморфизм Хоффмана для стаффл-алгебры

Другой способ доказательства теоремы 5 (а также леммы 6) основан на гомоморфизме Хоффмана $\phi: \mathfrak{H}^1 \rightarrow \mathbb{Q}[[t_1, t_2, \dots]]$, где $\mathbb{Q}[[t_1, t_2, \dots]]$ есть $\mathbb{Q}$ -алгебра формальных степенных рядов от счетного множества (коммутирующих) переменных $t_1, t_2, \dots$ (см. [11], [13]). Именно, $\mathbb{Q}$ -линейное отображение ϕ определяется правилами $\phi(1) := 1$ и

$$\phi(y_{s_1} y_{s_2} \cdots y_{s_l}) := \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_l \geq 1} t_{n_1}^{s_1} t_{n_2}^{s_2} \cdots t_{n_l}^{s_l}, \quad s \in \mathbb{Z}^l, \quad s_1 \geq 1, \dots, s_l \geq 1.$$

Образом гомоморфизма (и, в действительности, мономорфизма) ϕ является алгебра $QSym$ квазисимметрических функций. Здесь под *квазисимметрической функцией* понимается формальный степенной ряд (ограниченной степени) от переменных $t_1, t_2, \dots$, у которого коэффициенты при мономах $t_{n_1}^{s_1} t_{n_2}^{s_2} \cdots t_{n_l}^{s_l}$ и $t_{n'_1}^{s_1} t_{n'_2}^{s_2} \cdots t_{n'_l}^{s_l}$ совпадают, как только $n_1 > n_2 > \cdots > n_l$ и $n'_1 > n'_2 > \cdots > n'_l$ (наше определение несколько отличается от соответствующего определения из [13], но приводит к одной и той же алгебре $QSym$ квазисимметрических функций). В этих терминах гомоморфизм $w \mapsto \text{Ri}_w(t)$ из леммы 6 определяется как ограничение гомоморфизма ϕ на $\mathfrak{H}^0$ с помощью подстановки $t_n = 1/(t+n)$, $n = 1, 2, \dots$.

Другой подход к доказательству стаффл-соотношений для кратных дзета-значений был недавно предложен Картье (см. [28]). Несколько модифицируя оригинальную схему Картье, мы продемонстрируем основные идеи этого подхода на примере доказательства тождества Эйлера

$$\zeta(s_1)\zeta(s_2) = \zeta(s_1 + s_2) + \zeta(s_1, s_2) + \zeta(s_2, s_1), \quad s_1 \geq 2, s_2 \geq 2. \quad (52)$$

Для этого нам необходимо иное по сравнению с (31) интегральное представление

$$\zeta(s) = \int \cdots \int_{[0,1]^{|s|}} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{t_1 t_2 \cdots t_{s_1+\cdots+s_j}}{1 - t_1 t_2 \cdots t_{s_1+\cdots+s_j}} \cdot \frac{dt_1 dt_2 \cdots dt_{|s|}}{1 - t_1 t_2 \cdots t_{s_1+s_2+\cdots+s_l}}, \quad l = \ell(s), \quad (53)$$

для допустимых мультииндексов s , на которое нам любезно указал Нестеренко и которое доказывается непосредственным интегрированием ряда

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n.$$

Осуществляя в элементарном тождестве

$$\frac{1}{(1-u)(1-v)} = \frac{1}{1-uv} + \frac{u}{(1-u)(1-uv)} + \frac{v}{(1-v)(1-uv)}$$

подстановку $u = t_1 \cdots t_{s_1}$, $v = t_{s_1+1} \cdots t_{s_2}$ и интегрируя по гиперкубу $[0,1]^{s_1+s_2}$ в соответствии с (53), мы приходим к тождеству (52).

11. Дифференцирования

Рассмотрим, как и в разделе 8, градуированную некоммутативную полиномиальную алгебру $\mathfrak{A} = \mathcal{K}\langle A \rangle$ над полем $\mathcal{K}$ характеристики 0 с локально конечным множеством образующих A . Под *дифференцированием* алгебры $\mathfrak{A}$ понимается линейное отображение $\delta: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ (градуированных $\mathcal{K}$ -векторных пространств), удовлетворяющее правилу Лейбница

$$\delta(uv) = \delta(u)v + u\delta(v) \quad \text{для всех } u, v \in \mathfrak{A}. \quad (54)$$

Коммутатор двух дифференцирований $[\delta_1, \delta_2] := \delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1$ является дифференцированием, так что множество всех дифференцирований алгебры $\mathfrak{A}$ образует алгебру Ли $\text{Der}(\mathfrak{A})$ (естественным образом градуированную по степени).

Как несложно заметить, дифференцирование $\delta \in \text{Der}(\mathfrak{A})$ достаточно задать на образующих A алгебры $\mathfrak{A}$, распространяя его на всю алгебру по линейности и пользуясь правилом (54).

Следующее утверждение дает примеры дифференцирований алгебры $\mathfrak{A}$, наделенной дополнительным умножением $\circ$ с условиями (39), (40).

ТЕОРЕМА 10. *Для любой буквы $a \in A$ отображение*

$$\delta_a: w \mapsto aw - a \circ w \quad (55)$$

является дифференцированием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейность отображения δ_a очевидна. Согласно лемме 4 для любых слов $u, v \in \mathfrak{A}$ имеем

$$\begin{aligned}\delta_a(uv) &= auv - a \circ uv = auv - (a \circ u)v - u(a \circ v - av) \\ &= (\delta_a u)v + u(\delta_a v),\end{aligned}$$

так что (55) действительно является дифференцированием.

Как следует из теоремы 10, отображения $\delta_{\sqcup}: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ и $\delta_*: \mathfrak{H}^1 \rightarrow \mathfrak{H}^1$, определяемые равенствами

$$\delta_{\sqcup}: w \mapsto x_1 w - x_1 \sqcup w, \quad \delta_*: w \mapsto y_1 w - y_1 * w = x_1 w - x_1 * w, \quad (56)$$

являются дифференцированиями; согласно правилу (18) отображение δ_* является дифференцированием на всей алгебре $\mathfrak{H}$. Отметим действие дифференцирований (56) на образующих алгебры, полученное в соответствии с правилами (15)–(18):

$$\delta_{\sqcup} x_0 = -x_0 x_1, \quad \delta_{\sqcup} x_1 = -x_1^2, \quad \delta_* x_0 = 0, \quad \delta_* x_1 = -x_1^2 - x_0 x_1. \quad (57)$$

Для любого дифференцирования δ алгебры $\mathfrak{H}$ (или ее подалгебры $\mathfrak{H}^0$) определим двойственное дифференцирование $\bar{\delta} = \tau \delta \tau$, где τ – анти-автоморфизм алгебры $\mathfrak{H}$ (и $\mathfrak{H}^0$) из раздела 6. Дифференцирование $\bar{\delta}$ будем называть *симметрическим*, если $\bar{\delta} = \delta$, и *антисимметрическим*, если $\bar{\delta} = -\delta$. Поскольку $\tau x_0 = x_1$, (анти)симметрическое дифференцирование δ однозначно восстанавливается по значению на одном из образующих x_0 или x_1 , в то время как произвольное дифференцирование восстанавливается по значению на обоих образующих.

Определим теперь дифференцирование D алгебры $\mathfrak{H}$ равенствами $Dx_0 = 0$, $Dx_1 = x_0 x_1$ (так что $Dy_s = y_{s+1}$ для образующих y_s алгебры $\mathfrak{H}^1$) и перепишем утверждение теоремы 1 в следующем виде.

ТЕОРЕМА 11 (теорема о дифференцировании [13; теорема 2.1]). *Для любого слова $w \in \mathfrak{H}^0$ справедливо тождество*

$$\zeta(Dw) = \zeta(\bar{D}w). \quad (58)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Записывая слово $w \in \mathfrak{H}^0$ в виде $w = y_{s_1} y_{s_2} \cdots y_{s_l}$ ($s_l > 1$), отметим, что левая часть равенства (7) отвечает элементу

$$Dw = D(y_{s_1} y_{s_2} \cdots y_{s_l}) = y_{s_1+1} y_{s_2} \cdots y_{s_l} + y_{s_1} y_{s_2+1} y_{s_3} \cdots y_{s_l} + \cdots + y_{s_1} \cdots y_{s_{l-1}+1} y_{s_l+1} \quad (59)$$

алгебры $\mathfrak{H}^0$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}\bar{D}w &= \tau D(x_0 x_1^{s_l-1} x_0 x_1^{s_{l-1}-1} \cdots x_0 x_1^{s_2-1} x_0 x_1^{s_1-1}) \\ &= \tau \sum_{k=1}^l \sum_{\substack{j=0 \\ s_k \geq 2}}^{s_k-2} x_0 x_1^{s_l-1} \cdots x_0 x_1^{s_{k+1}-1} x_0 x_1^j x_0 x_1^{s_k-j-1} x_0 x_1^{s_{k-1}-1} \cdots x_0 x_1^{s_1-1} \\ &= \sum_{k=1}^l \sum_{\substack{j=0 \\ s_k \geq 2}}^{s_k-2} x_0^{s_1-1} x_1 \cdots x_0^{s_{k-1}-1} x_1 x_0^{s_k-j-1} x_1 x_0^j x_1 x_0^{s_{k+1}-1} x_1 \cdots x_0^{s_l-1} x_1,\end{aligned} \quad (60)$$

что отвечает правой части равенства (7). Применяя теперь к обеим частям полученных равенств (59), (60) отображение ζ , из теоремы 1 получаем требуемое тождество (58).

ЗАМЕЧАНИЕ. Ослабить требование $w \in \mathfrak{H}^0$ в теореме 11 нельзя; для слова $w = x_1$ равенство (58) оказывается неверным:

$$\zeta(Dx_1) = \zeta(x_0x_1) \neq 0 = \zeta(\overline{D}x_1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Сравнивая действие (57) дифференцирований (56) с действием $D, \overline{D}$ на образующих алгебры $\mathfrak{H}$:

$$Dx_0 = 0, \quad Dx_1 = x_0x_1, \quad \overline{D}x_0 = x_0x_1, \quad \overline{D}x_1 = 0,$$

закключаем, что $\delta_* - \delta_{\sqcup\sqcup} = \overline{D} - D$. Поэтому применение теоремы 11 для слова $w \in \mathfrak{H}^0$ приводит нас к требуемому равенству:

$$\zeta(x_1 \sqcup\sqcup w - x_1 * w) = \zeta((\delta_* - \delta_{\sqcup\sqcup})w) = \zeta((\overline{D} - D)w) = \zeta(\overline{D}w) - \zeta(Dw) = 0.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Другое доказательство теоремы 6, основанное на шаффл- и стаффл-соотношениях для так называемых *раскрашенных* полилогарифмов

$$\text{Li}_{\mathbf{s}}(z) = \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_l)}(z_1, z_2, \dots, z_l) := \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_l \geq 1} \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2} \dots z_l^{n_l}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_l^{s_l}}, \quad (61)$$

можно найти в [28]. (Как несложно заметить, специализация $z_2 = \dots = z_l = 1$ превращает функции (61) в обобщенные полилогарифмы (22).) Мы не ставим цели изложить в данном обзоре свойства функциональной модели (61), отсылая заинтересованного читателя к работам [4], [7], [28].

12. Дифференцирования Ихары–Канеко и соотношения Оно

Теорема 11 имеет естественное обобщение. Для каждого $n \geq 1$ определим антисимметрическое дифференцирование $\partial_n \in \text{Der}(\mathfrak{H})$ соотношением $\partial_n x_0 = x_0(x_0 + x_1)^{n-1}x_1$; как было отмечено в доказательстве теоремы 6, $\partial_1 = \overline{D} - D = \delta_* - \delta_{\sqcup\sqcup}$. Справедлив следующий результат.

ТЕОРЕМА 12 [14] (см. также [13]). Для каждого $n \geq 1$ и любого слова $w \in \mathfrak{H}^0$ справедливо тождество

$$\zeta(\partial_n w) = 0. \quad (62)$$

Далее мы излагаем схему доказательства этой теоремы, приводимого в препринте [14] (доказательство в [13] основано на иных идеях).

Следующий результат, полученный в работе [21] с помощью метода производящей функции, содержит как частные случаи теоремы 1, 3, 7 (соответствующие импликации также приводятся в [21]).

ТЕОРЕМА 13 (соотношения Оно). Пусть слово $w \in \mathfrak{H}^0$ и двойственное ему $w' = \tau w \in \mathfrak{H}^0$ имеют следующие записи в терминах образующих алгебры $\mathfrak{H}^1$:

$$w = y_{s_1} y_{s_2} \cdots y_{s_l}, \quad w' = y_{s'_1} y_{s'_2} \cdots y_{s'_k}.$$

Тогда для любого целого $n \geq 0$ справедливо тождество

$$\sum_{\substack{e_1, e_2, \dots, e_l \geq 0 \\ e_1 + e_2 + \dots + e_l = n}} \zeta(y_{s_1+e_1} y_{s_2+e_2} \cdots y_{s_l+e_l}) = \sum_{\substack{e_1, e_2, \dots, e_k \geq 0 \\ e_1 + e_2 + \dots + e_k = n}} \zeta(y_{s'_1+e_1} y_{s'_2+e_2} \cdots y_{s'_k+e_k}).$$

Следуя [14], для каждого целого $n \geq 1$ определим дифференцирование $D_n \in \text{Der}(\mathfrak{H})$, полагая $D_n x_0 = 0$ и $D_n x_1 = x_0^n x_1$. Несложно убедиться в том, что дифференцирования $D_1, D_2, \dots$ попарно коммутируют; это справедливо и для двойственных дифференцирований $\overline{D}_1, \overline{D}_2, \dots$. Рассмотрим пополнение $\widehat{\mathfrak{H}}$, именно алгебру $\widehat{\mathfrak{H}} = \mathbb{Q}\langle\langle x_0, x_1 \rangle\rangle$ – алгебру формальных степенных рядов от некоммутирующих переменных x_0, x_1 над полем $\mathbb{Q}$. Действие анти-автоморфизма τ и дифференцирований $\delta \in \text{Der}(\mathfrak{H})$ естественным образом продолжается на алгебру $\widehat{\mathfrak{H}}$. Для простоты запись $w \in \ker \zeta$ означает, что все однородные компоненты элемента $w \in \widehat{\mathfrak{H}}$ лежат в $\ker \zeta$. Отображения

$$\mathcal{D} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{n}, \quad \overline{\mathcal{D}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{D}_n}{n}$$

являются дифференцированиями алгебры $\widehat{\mathfrak{H}}$, и, как следует из стандартной взаимосвязи между дифференцированием и гомоморфизмом, отображения

$$\sigma = \exp(\mathcal{D}), \quad \overline{\sigma} = \tau \sigma \tau = \exp(\overline{\mathcal{D}})$$

являются автоморфизмами алгебры $\widehat{\mathfrak{H}}$. В этих терминах соотношения Оно могут быть сформулированы следующим образом.

ТЕОРЕМА 14 [14]. Для любого слова $w \in \mathfrak{H}^0$ справедливо включение

$$(\sigma - \overline{\sigma})w \in \ker \zeta. \quad (63)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathcal{D}x_0 = 0$ и

$$\mathcal{D}x_1 = \left(x_0 + \frac{x_0^2}{2} + \frac{x_0^3}{3} + \cdots \right) x_1 = (-\log(1 - x_0))x_1,$$

можно заключить, что $\mathcal{D}^n x_0 = 0$ и $\mathcal{D}^n x_1 = (-\log(1 - x_0))^n x_1$, откуда $\sigma x_0 = x_0$ и

$$\sigma x_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\log(1 - x_0))^n x_1 = (1 - x_0)^{-1} x_1 = (1 + x_0 + x_0^2 + x_0^3 + \cdots) x_1.$$

Следовательно, для слова $w = y_{s_1} y_{s_2} \cdots y_{s_l} \in \mathfrak{H}^0$ выполнено

$$\begin{aligned} \sigma w &= \sigma(x_0^{s_1-1} x_1 x_0^{s_2-1} x_1 \cdots x_0^{s_l-1} x_1) \\ &= x_0^{s_1-1} (1 + x_0 + x_0^2 + \cdots) x_1 x_0^{s_2-1} (1 + x_0 + x_0^2 + \cdots) x_1 \cdots \\ &\quad \cdots x_0^{s_l-1} (1 + x_0 + x_0^2 + \cdots) x_1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{e_1, e_2, \dots, e_l \geq 0 \\ e_1 + e_2 + \dots + e_l = n}} x_0^{s_1-1+e_1} x_1 x_0^{s_2-1+e_2} x_1 \cdots x_0^{s_l-1+e_l} x_1; \end{aligned}$$

поэтому $\sigma w - \sigma \tau w \in \ker \zeta$ согласно теореме 13. Применяя теперь теорему 7, мы получаем требуемое включение (63).

Возвращаясь к дифференцированиям $\partial_1, \partial_2, \dots$, рассмотрим дифференцирование

$$\partial = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial_n}{n} \in \text{Der}(\widehat{\mathfrak{H}}).$$

ЛЕММА 7. *Имеет место равенство*

$$\exp(\partial) = \bar{\sigma} \cdot \sigma^{-1}. \quad (64)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, отметим попарную перестановочность операторов ∂_n , $n = 1, 2, \dots$. Поскольку $\partial_n(x_0 + x_1) = 0$ для любого $n \geq 1$, достаточно проверить равенство $\partial_n \partial_m x_0 = \partial_m \partial_n x_0$ для $n, m \geq 1$. С учетом $\partial_n(x_0 + x_1)^k = 0$ для любых $n \geq 1$ и $k \geq 0$ получаем

$$\begin{aligned} \partial_n \partial_m x_0 &= \partial_n(x_0(x_0 + x_1)^{m-1} x_1) \\ &= x_0(x_0 + x_1)^{n-1} x_1(x_0 + x_1)^{m-1} x_1 - x_0(x_0 + x_1)^{m-1} x_0(x_0 + x_1)^{n-1} x_1 \\ &= x_0(x_0 + x_1)^{n-1} (x_0 + x_1 - x_0)(x_0 + x_1)^{m-1} x_1 \\ &\quad - x_0(x_0 + x_1)^{m-1} (x_0 + x_1 - x_1)(x_0 + x_1)^{n-1} x_1 \\ &= -x_0(x_0 + x_1)^{n-1} x_0(x_0 + x_1)^{m-1} x_1 + x_0(x_0 + x_1)^{m-1} x_1(x_0 + x_1)^{n-1} x_1 \\ &= \partial_m \partial_n x_0, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Рассмотрим семейство $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, автоморфизмов алгебры $\widehat{\mathfrak{H}}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\langle\langle x_0, x_1 \rangle\rangle$, определенных на образующих $x'_0 = x_0 + x_1$ и x_1 следующим образом:

$$\varphi(t): x'_0 \mapsto x'_0, \quad \varphi(t): x_1 \mapsto (1 - x'_0)^t x_1 \left(1 - \frac{1 - (1 - x'_0)^t}{x'_0} x_1\right)^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Рутинная проверка [14] показывает, что

$$\varphi(t_1)\varphi(t_2) = \varphi(t_1 + t_2), \quad \varphi(0) = \text{id}, \quad \left.\frac{d}{dt}\varphi(t)\right|_{t=0} = \partial, \quad \varphi(1) = \bar{\sigma} \cdot \sigma^{-1};$$

значит, $\varphi(t) = \exp(t\partial)$ и подстановка $t = 1$ приводит к требуемому результату (64).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 12. Покажем теперь, как из теоремы 14 и леммы 7 следует теорема 12. С одной стороны, имеем

$$\partial = \log(\bar{\sigma} \cdot \sigma^{-1}) = \log(1 - (\sigma - \bar{\sigma})\sigma^{-1}) = -(\sigma - \bar{\sigma}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((\sigma - \bar{\sigma})\sigma^{-1})^{n-1}}{n} \sigma^{-1},$$

а с другой стороны,

$$\sigma - \bar{\sigma} = (1 - \bar{\sigma} \cdot \sigma^{-1})\sigma = (1 - \exp(\partial))\sigma = -\partial \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^{n-1}}{n!} \sigma,$$

откуда $\partial \mathfrak{H}^0 = (\sigma - \bar{\sigma})\mathfrak{H}^0$, и теорема 14 влечет требуемые тождества (62).

Существует ли более простой способ обоснования соотношений (62)? Явные вычисления [14] показывают, что $\partial_1 = \delta_* - \delta_{\square}$,

$$\partial_2 = [\delta_*, \bar{\delta}_*],$$

$$\partial_3 = \frac{1}{2}[\delta_*, [\partial_1, \bar{\delta}_*]] - \frac{1}{2}[\delta_*, \partial_2] - \frac{1}{2}[\bar{\delta}_*, \partial_2],$$

$$\partial_4 = \frac{1}{6}[\delta_*, [\partial_1, [\partial_1, \bar{\delta}_*]]] - \frac{1}{6}[\bar{\delta}_*, [\delta_*, [\partial_1, \bar{\delta}_*]]] + \frac{1}{6}[\partial_1, [\partial_2, \bar{\delta}_*]] + \frac{1}{3}[\partial_3, \delta_*] + \frac{1}{3}[\partial_3, \bar{\delta}_*]$$

и, кроме того, $\delta_* + \bar{\delta}_* = \delta_{\square} + \bar{\delta}_{\square}$; поэтому случаи $n = 1, 2, 3, 4$ в теореме 12 обслуживаются индукцией (с базой индукции – теоремой 11). Это мотивирует следующее предположение.

ГИПОТЕЗА 3 [14]. Для каждого $n \geq 1$ определенное выше антисимметрическое дифференцирование ∂_n содержится в подалгебре Ли алгебры $\text{Der}(\mathfrak{H})$, порожденной дифференцированиями $\delta_*, \bar{\delta}_*, \delta_{\square}, \bar{\delta}_{\square}$.

Отметим также, что в препринте [14] содержатся и иные (по сравнению с гипотезой 2) идеи полного описания тождеств для кратных дзета-значений в терминах регуляризованных шаффл-стаффл-соотношений.

13. Открытые вопросы

Наряду с отмеченными выше гипотезами 1–3 отметим еще ряд важных предположений о строении подпространства $\ker \zeta \subset \mathfrak{H}$. Через $\mathcal{X}_k$ обозначим $\mathbb{Q}$ -векторное подпространство в $\mathbb{R}$, порожденное кратными дзета-значениями веса k ; при этом $\mathcal{X}_0 = \mathbb{Q}$ и $\mathcal{X}_1 = \{0\}$. Тогда $\mathbb{Q}$ -подпространство $\mathcal{X} \in \mathbb{R}$, порожденное всеми кратными дзета-значениями, является подалгеброй $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$, градуированной по весу.

ГИПОТЕЗА 4 [8], [28]. Как $\mathbb{Q}$ -алгебра, $\mathcal{X}$ является прямой суммой подпространств $\mathcal{X}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Как несложно заметить, соотношения (19)–(21) для кратных дзета-значений однородны по весу, так что гипотеза 4 следует из гипотезы 2.

Обозначая через d_k размерность $\mathbb{Q}$ -пространства $\mathcal{X}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, отметим, что $d_0 = 1$, $d_1 = 0$, $d_2 = 1$ (поскольку $\zeta(2) \neq 0$), $d_3 = 1$ (поскольку $\zeta(3) = \zeta(2, 1) \neq 0$) и $d_4 = 1$ (поскольку $\mathcal{X}_4 = \mathbb{Q}\pi^4$ согласно (32), (34) и (36)). Для $k \geq 5$ полученные тождества позволяют выписать оценки сверху; так, например, $d_5 \leq 2$, $d_6 \leq 2$, и т.д.

ГИПОТЕЗА 5 [30]. Для $k \geq 3$ справедливы рекуррентные соотношения

$$d_k = d_{k-2} + d_{k-3};$$

иными словами,

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k = \frac{1}{1 - t^2 - t^3}.$$

Даже в случае положительного ответа на гипотезы 4 и 5 вопрос о выборе базиса трансцендентности алгебры $\mathcal{Z}$ и (или) рационального базиса $\mathbb{Q}$ -пространств $\mathcal{Z}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, остается открытым. В этой связи нам представляется любопытным следующее предположение Хоффмана.

ГИПОТЕЗА 6 [11]. Для каждого $k = 0, 1, 2, \dots$ базис $\mathbb{Q}$ -пространства $\mathcal{Z}_k$ задается множеством чисел

$$\{\zeta(\mathbf{s}) : |\mathbf{s}| = k, s_j \in \{2, 3\}, j = 1, \dots, \ell(\mathbf{s})\}. \quad (65)$$

Веским доводом в пользу гипотезы 6 является не только экспериментальное подтверждение при $k \leq 16$ (в предположении истинности гипотезы 2), но и согласованность размерности $\mathbb{Q}$ -пространства, порожденного числами (65), с размерностью d_k пространств $\mathcal{Z}_k$ из гипотезы 5. Последний факт доказан Хоффманом в [11].

14. q -аналоги кратных дзета-значений

Спустя тридцать три года после работы Гаусса о гипергеометрических рядах Гейне рассмотрел [9] ряды, зависящие от дополнительного параметра q и обладающие схожими с гауссовыми рядами свойствами. Более того, (по крайней мере почленный) предельный переход при $q \rightarrow 1$ превращает q -ряды Гейне в гипергеометрические ряды, так что результаты Гаусса могут быть получены из соответствующих результатов для q -рядов с помощью указанного предельного перехода и теоремы об аналитическом продолжении.

Подобные q -расширения классических объектов возможны не только в анализе: заинтересованному читателю мы рекомендуем работу Хоффмана [12], в которой обсуждается возможная q -деформация стаффл-алгебры $\mathfrak{H}_*$. Цель этого раздела – обсудить проблемы q -расширения кратных дзета-значений.

Самый простой (и достаточно очевидный) способ заключается в следующем: для целых положительных $s_1, s_2, \dots, s_l$ положим

$$\begin{aligned} \zeta_q^*(x_{\mathbf{s}}) &= \zeta_q^*(\mathbf{s}) = \zeta_q^*(s_1, s_2, \dots, s_l) \\ &:= \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_l \geq 1} \frac{q^{n_1 s_1 + n_2 s_2 + \dots + n_l s_l}}{(1 - q^{n_1})^{s_1} (1 - q^{n_2})^{s_2} \dots (1 - q^{n_l})^{s_l}}, \quad |q| < 1, \end{aligned} \quad (66)$$

и распространим $\mathbb{Q}$ -линейное отображение ζ_q^* на всю алгебру $\mathfrak{H}^1$ по сложению. Несложные вычисления показывают, что в случае $s_1 > 1$ выполнено

$$\lim_{\substack{q \rightarrow 1 \\ 0 < q < 1}} (1 - q)^{|\mathbf{s}|} \zeta_q^*(\mathbf{s}) = \zeta(\mathbf{s}),$$

т.е. ряды в (66) действительно являются q -расширениями рядов (4). Кроме того, ζ_q^* является (q -параметрическим) гомоморфизмом стаффл-алгебры $\mathfrak{H}_*^1$; для доказательства этого факта достаточно рассмотреть специализацию $t_n = q^n/(1 - q^n)$ гомоморфизма Хоффмана ϕ из раздела 10. Следовательно,

$$\zeta_q^*(w_1 * w_2) = \zeta_q^*(w_1)\zeta_q^*(w_2) \quad \text{для всех } w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1.$$

Указанная модель кратных q -дзета-значений (а также обобщенных q -полилогарифмов) описывается в [23]; к ее основным недостаткам следует отнести отсутствие описания других линейных и полиномиальных соотношений над $\mathbb{Q}$, иными словами, отсутствие подходящего q -шаффл-произведения.

Другой способ q -расширения (не кратных) дзета-значений предложен одновременно и независимо в работах [15] и [34]:

$$\zeta_q(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{s-1}(n)q^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{s-1}q^n}{1 - q^n}, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (67)$$

где $\sigma_{s-1}(n) = \sum_{d|n} d^{s-1}$ обозначает сумму степеней делителей; там же показаны предельные соотношения

$$\lim_{\substack{q \rightarrow 1 \\ 0 < q < 1}} (1 - q)^s \zeta_q(s) = (s - 1)! \cdot \zeta(s), \quad s = 2, 3, \dots$$

q -дзета-значения (67) могут быть просто пересчитаны в терминах (66) с $l = 1$, именно

$$\begin{aligned} \zeta_q(1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 - q^n}, \quad \zeta_q(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{(1 - q^n)^2}, \quad \zeta_q(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n(1 + q^n)}{(1 - q^n)^3}, \\ \zeta_q(4) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n(1 + 4q^n + q^{2n})}{(1 - q^n)^4}, \quad \zeta_q(5) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n(1 + 11q^n + 11q^{2n} + q^{3n})}{(1 - q^n)^5} \end{aligned}$$

и в общем

$$\zeta_q(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \rho_k(q^n)}{(1 - q^n)^k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

где многочлены $\rho_k(x) \in \mathbb{Z}[x]$ определяются рекурсивно с помощью формул

$$\rho_1 = 1, \quad \rho_{k+1} = (1 + (k - 1)x)\rho_k + x(1 - x)\rho'_k \quad \text{при } k = 1, 2, \dots$$

(см. [34]).

Для четных $s \geq 2$ ряды $E_s(q) = 1 - 2s\zeta_q(s)/B_s$, где числа Бернулли $B_s \in \mathbb{Q}$ определены в (3), известны как *ряды Эйзенштейна*. Это обстоятельство позволяет доказать совпадение колец $\mathbb{Q}[q, \zeta_q(2), \zeta_q(4), \zeta_q(6), \zeta_q(8), \zeta_q(10), \dots]$ и $\mathbb{Q}[q, \zeta_q(2), \zeta_q(4), \zeta_q(6)]$ (ср. с соответствующим результатом из раздела 1 для обычных дзета-значений). Однако вопрос о создании модели кратных q -дзета-значений, включающей однократную модель (67), остается открытым. Естественные требования к подобной модели – наличие q -аналогов шаффл- и стаффл-произведений. В заключение укажем возможное q -расширение формулы Эйлера (5) для величины

$$\zeta_q(2, 1) = \sum_{n_1 > n_2 \geq 1} \frac{q^{n_1}}{(1 - q^{n_1})^2(1 - q^{n_2})}.$$

ТЕОРЕМА 15. *Имеет место тождество*

$$2\zeta_q(2, 1) = \zeta_q(3).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в случае доказательства теоремы 1, мы воспользуемся методом простейших дробей, именно разложением

$$\frac{1}{(1-u)(1-uv)^s} = \frac{1}{(1-v)^s(1-u)} - \sum_{j=0}^{s-1} \frac{v}{(1-v)^{j+1}(1-uv)^{s-j}}, \quad s = 1, 2, 3, \dots; \quad (68)$$

доказывается это тождество так же, как и (9), суммированием геометрической прогрессии в правой части. При $s = 2$ домножим тождество (68) на $u(1+v)$:

$$\frac{u(1+v)}{(1-u)(1-uv)^2} = \frac{u(1+v)}{(1-v)^2(1-u)} - \frac{uv(1+v)}{(1-v)(1-uv)^2} - \frac{uv(1+v)}{(1-v)^2(1-uv)},$$

положим $u = q^m$, $v = q^n$ и просуммируем по всем целым положительным m, n . В результате получим равенство, в правой части которого стоит двойная сумма

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^m(1+q^n)}{(1-q^m)(1-q^{n+m})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^n(1+q^m)}{(1-q^n)(1-q^{n+m})^2},$$

а в левой

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{q^m(1+q^n)}{(1-q^n)^2(1-q^m)} - \frac{q^{n+m}(1+q^n)}{(1-q^n)(1-q^{n+m})^2} - \frac{q^{n+m}(1+q^n)}{(1-q^n)^2(1-q^{n+m})} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+q^n}{(1-q^n)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{q^m}{1-q^m} - \frac{q^{n+m}}{1-q^{n+m}} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{n+m}(1+q^n)}{(1-q^n)(1-q^{n+m})^2}. \end{aligned}$$

Переносим последнюю сумму из правой части в левую, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^n(1+q^m) + q^{n+m}(1+q^n)}{(1-q^n)(1-q^{n+m})^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+q^n}{(1-q^n)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{q^m}{1-q^m} - \frac{q^{n+m}}{1-q^{n+m}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+q^n}{(1-q^n)^2} \sum_{m=1}^n \frac{q^m}{1-q^m} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+q^n}{(1-q^n)^2} \left(\frac{q^n}{1-q^n} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{q^m}{1-q^m} \right) = \zeta_q(3) + \sum_{n>m \geq 1} \frac{(1+q^n)q^m}{(1-q^n)^2(1-q^m)}. \end{aligned} \quad (69)$$

С другой стороны, левая часть последнего равенства может быть записана в виде ($n+m=l$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{q^n + 2q^l + q^{l+n}}{(1-q^n)(1-q^l)^2} = \sum_{l>n \geq 1} \frac{q^n + 2q^l + q^{l+n}}{(1-q^l)^2(1-q^n)}, \quad (70)$$

так что окончательно, полагая $n_1 = n$, $n_2 = m$ в правой части (69) и $n_1 = l$, $n_2 = n$ в (70), мы получаем требуемое:

$$\begin{aligned} \zeta_q(3) &= \sum_{n_1>n_2 \geq 1} \frac{q^{n_2} + 2q^{n_1} + q^{n_1+n_2}}{(1-q^{n_1})^2(1-q^{n_2})} - \sum_{n_1>n_2 \geq 1} \frac{(1+q^{n_1})q^{n_2}}{(1-q^{n_1})^2(1-q^{n_2})} \\ &= \sum_{n_1>n_2 \geq 1} \frac{2q^{n_1}}{(1-q^{n_1})^2(1-q^{n_2})}. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. Apéry. Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ // *Astérisque*. 1979. V. 61. P. 11–13.
- [2] J. Borwein, D. Bradley. Empirically determined Apéry-like formulae for $\zeta(4n+3)$ // *Experiment. Math.* 1997. V. 6. №3. P. 181–194.
- [3] J. M. Borwein, D. M. Bradley, D. J. Broadhurst. Evaluations of k -fold Euler/Zagier sums: A compendium of results for arbitrary k // *Electron. J. Combin.* 1997. V. 4. №2. #R5. Printed version // *J. Combin.* 1997. V. 4. №2. P. 31–49.
- [4] J. M. Borwein, D. M. Bradley, D. J. Broadhurst, P. Lisoněk. Special values of multiple polylogarithms // *Trans. Amer. Math. Soc.* 2001. V. 353. №3. P. 907–941.
- [5] L. Euler. *Meditationes circa singulare serierum genus* // *Novi Comm. Acad. Sci. Petropol.* 1775. V. 20. P. 140–186; Reprinted // *Opera Omnia Ser. I*. V. 15. Berlin: Teubner, 1927. P. 217–267.
- [6] А. О. Гельфонд. *Исчисление конечных разностей*. М.: Наука, 1967.
- [7] A. B. Goncharov. Polylogarithms in arithmetic and geometry // *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (ICM'94, Zürich, August 3–11, 1994)* / ed. S. D. Chatterji. V. I. Basel: Birkhäuser, 1995. P. 374–387.
- [8] A. B. Goncharov. The double logarithm and Manin's complex for modular curves // *Math. Res. Lett.* 1997. V. 4. №5. P. 617–636.
- [9] E. Heine. Über die Reihe ... // *J. Reine Angew. Math.* 1846. V. 32. P. 210–212.
- [10] M. E. Hoffman. Multiple harmonic series // *Pacific J. Math.* 1992. V. 152. №2. P. 275–290.
- [11] M. E. Hoffman. The algebra of multiple harmonic series // *J. Algebra.* 1997. V. 194. №2. P. 477–495.
- [12] M. E. Hoffman. Quasi-shuffle products // *J. Algebraic Combin.* 2000. V. 11. №1. P. 49–68.
- [13] M. E. Hoffman, Y. Ohno. Relations of multiple zeta values and their algebraic expression // Preprint, 2000; // E-print math.QA/0010140.
- [14] K. Ihara, M. Kaneko. Derivation relations and regularized double shuffle relations of multiple zeta values // Preprint, 2000.
- [15] M. Kaneko, N. Kurokawa, M. Wakayama. A variation of Euler's approach to values of the Riemann zeta function // E-print math.QA/0206171.
- [16] M. Koecher. Letter to the editor // *Math. Intelligencer*. 1979/1980. V. 2. №2. P. 62–64.
- [17] F. Lindemann. Über die Zahl π // *Math. Ann.* 1882. V. 20. P. 213–225.
- [18] H. M. Minh, G. Jacob, M. Petitot, N. E. Oussous. Aspects combinatoires des polylogarithmes et des sommes d'Euler-Zagier // *Sém. Lothar. Combin.* 1999. V. 43. Art. B43e (electronic); // <http://www.mat.univie.ac.at/~slc/wpapers/s43minh.html>.
- [19] H. M. Minh, M. Petitot. Lyndon words, polylogarithms and the Riemann ζ function // *Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Vienna, 1997)*. *Discrete Math.* 2000. V. 217. №1–3. P. 273–292.
- [20] H. M. Minh, M. Petitot, J. van der Hoeven. Shuffle algebra and polylogarithms // *Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Toronto, ON, June 1998)*. *Discrete Math.* 2000. V. 225. №1–3. P. 217–230.
- [21] Y. Ohno. A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values // *J. Number Theory*. 1999. V. 74. №1. P. 39–43.
- [22] T. Rivoal. La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs // *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 2000. V. 331. №4. P. 267–270.
- [23] K.-G. Schlesinger. Some remarks on q -deformed multiple polylogarithms // E-print math.QA/0111022, 2001.
- [24] В. Н. Сорокин. О линейной независимости значений обобщенных полилогарифмов // *Матем. сб.* 2001. Т. 192. №8. С. 139–154.
- [25] Е. А. Уланский. Тождества для обобщенных полилогарифмов // *Матем. заметки*. 2003. Т. 73. №4. С. 613–624.
- [26] Д. В. Васильев. Некоторые формулы для дзета-функции в целых точках // *Вестн. МГУ. Сер. I. Матем., мех.* 1996. №1. С. 81–84.
- [27] M. Waldschmidt. Valeurs zêta multiples: une introduction // *J. Théor. Nombres Bordeaux*. 2000. V. 12. №2. P. 581–595.

- [28] M. Waldschmidt. Multiple polylogarithms // Lectures at Institute of Math. Sciences (Chennai, November 2000); Updated version // <http://www.math.jussieu.fr/~miw/articles/ps/mpl.ps>.
- [29] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. Курс современного анализа. Т. 2. М.: Физматлит, 1963.
- [30] D. Zagier. Values of zeta functions and their applications // First European Congress of Mathematics (Paris, 1992). V. II / ed. A. Joseph et al. Progr. Math. V. 120. Boston: Birkhäuser, 1994. P. 497–512.
- [31] J. Zhao. Analytic continuation of multiple zeta functions // Proc. Amer. Math. Soc. 2000. V. 128. № 5. P. 1275–1283.
- [32] С. А. Злобин. Интегралы, представляемые в виде линейных форм от обобщенных полилогарифмов // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 5. С. 782–787.
- [33] В. В. Зудилин. Совершенно уравновешенные гипергеометрические ряды и кратные интегралы // УМН. 2002. Т. 57. № 4. С. 177–178.
- [34] В. В. Зудилин. О диофантовых задачах для q -дзета-значений // Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 6. С. 936–940.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: wadim@ips.ras.ru

Поступила в редакцию
30.10.2001