Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ф. Красичков-Терновский, Спектральный синтез и аналитическое продолжение, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 1, 33–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm593>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 13:50:47

УДК 517.5

СПЕКТРАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

И. Ф. КРАСИЧКОВ-ТЕРНОВСКИЙ

Рассматривается замкнутое подпространство функций, голоморфных в области n -мерного комплексного пространства. Предполагается, что подпространство инвариантно относительно операторов частного дифференцирования и что оно допускает спектральный синтез, т.е. совпадает с замыканием линейной оболочки совместных корневых элементов операторов частного дифференцирования, содержащихся в нем. Исследуются условия, при которых элементы инвариантного подпространства допускают аналитическое продолжение в область, более широкую, чем исходная. Геометрия этой области зависит как от исходной области, так и от наличия в аннуляторном подмодуле инвариантного подпространства функций, допускающих специальные оценки снизу. Подобная же задача рассматривается для топологических произведений инвариантных подпространств. Результаты применяются для аналитического продолжения решений однородных уравнений свертки.

Библиография: 59 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Исторический обзор	34
§ 2. Спектральный синтез и обильные подмодули	44
§ 3. Отображения инвариантных подпространств	53
§ 4. Θ -выпуклость	59
§ 5. Нестандартная выпуклость	65
§ 6. Проекторы Дирихле	73
§ 7. Мономорфизмы Дирихле	81
§ 8. Разделение множеств	87
§ 9. Существование проекторов Дирихле в случае выпуклых q -областей	92
§ 10. Существование проекторов Дирихле в случае невыпуклых q -областей	103
Список литературы	109

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00030).

§ 1. Исторический обзор

1. Спектральный синтез.

Пусть $\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_q)$ – система областей Рунге в $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}(\Omega_1), \dots, \mathcal{H}_q = \mathcal{H}(\Omega_q)$ – пространства функций, голоморфных в $\Omega_1, \dots, \Omega_q$ соответственно, с топологиями равномерной сходимости на компактах, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \dots \times \mathcal{H}_q$ – топологическое произведение пространств $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_q$. Элементами $\mathcal{H}$ являются векторы $f = (f_1, \dots, f_q)$, где $f_1 \in \mathcal{H}_1, \dots, f_q \in \mathcal{H}_q$. В пространстве $\mathcal{H}$ покомпонентно действуют операторы частного дифференцирования

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, D_n = \frac{\partial}{\partial z_n}. \quad (1)$$

Элемент $e \in \mathcal{H}$ называется *корневым элементом* системы (1), отвечающим вектору собственных значений $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, если e удовлетворяет системе уравнений вида

$$(D_1 - \lambda_1 E)^m e = 0, \dots, (D_n - \lambda_n E)^m e = 0,$$

где E – тождественный оператор, m – целое положительное число. Корневые элементы, отвечающие вектору $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, представляют собою так называемые *элементарные эксп- q -многочлены*, т.е. элементы вида

$$e = (e_1, \dots, e_n),$$

где $e_i(z) = p_i(z) \exp \langle \lambda, z \rangle$, $p_i(z)$ – многочлен переменных $z_1, \dots, z_n$, $\langle \lambda, z \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i$. Подпространство $W \subset \mathcal{H}$ называется *инвариантным*, если оно замкнуто в $\mathcal{H}$ и удовлетворяет условию

$$f \in W \implies D_1 f, \dots, D_q f \in W.$$

Инвариантное подпространство $W \subset \mathcal{H}$ *допускает спектральный синтез*, если W совпадает с замыканием в топологии $\mathcal{H}$ линейной оболочки корневых элементов системы (1), содержащихся в W .

Инвариантные подпространства связаны с однородными уравнениями свертки. Пусть Ω – выпуклая область в $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим линейный непрерывный функционал S на $\mathcal{H}(\Omega)$. Известно, что функционал S допускает интегральное представление

$$\langle S, f \rangle = \int f d\mu,$$

где μ – комплекснозначная мера, сосредоточенная на некотором компакте $K \Subset \Omega$. Из этого представления следует, что функционал S можно применять не только к функциям $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, но и к “малым” сдвигам этих функций, т.е. при “малых” $h = (h_1, \dots, h_n)$ выражение $\langle S, f(z + h) \rangle$ имеет смысл. Это выражение представляет собою функцию $F(h)$, голоморфную в некоторой окрестности начала, скажем, ω , и называется *сверткой функционала S и функции f* , в обозначении $F = S * f$. Оператор свертки $f \rightarrow S * f$ линейно и непрерывно отображает $\mathcal{H}(\Omega)$ в $\mathcal{H}(\omega)$, кроме того, этот оператор коммутирует с операторами частного дифференцирования $D_1, \dots, D_n$.

Рассмотрим однородное уравнение свертки

$$S * f = 0.$$

Пусть W обозначает совокупность решений $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ этого уравнения. Из того, что оператор свертки $f \rightarrow S * f$ является линейным и непрерывным, следует, что W есть замкнутое подпространство в $\mathcal{H}(\Omega)$; из того, что этот оператор коммутирует с операторами частного дифференцирования, следует, что W – инвариантное подпространство. Другой пример – подпространство W решений системы однородных уравнений свертки

$$\begin{cases} S_1 * f = 0 \\ \dots\dots\dots \\ S_m * f = 0 \end{cases}$$

Это подпространство инвариантно, так как оно представляет собою пересечение инвариантных подпространств $W_1, \dots, W_m$ решений соответствующих уравнений свертки $S_1 * f = 0, \dots, S_m * f = 0$. В случае $q > 1$ примером инвариантного подпространства является совокупность решений $f = (f_1, \dots, f_q) \in \mathcal{H}(\Omega_1) \times \dots \times \mathcal{H}(\Omega_q)$ системы однородных сверточных уравнений с q неизвестными функциями

$$\begin{cases} S_1^{(1)} * f_1 + \dots + S_q^{(1)} * f_q = 0 \\ \dots\dots\dots \\ S_1^{(m)} * f_1 + \dots + S_q^{(m)} * f_q = 0 \end{cases}$$

Здесь $S_j^{(i)}$ – линейный непрерывный функционал на $\mathcal{H}(\Omega_j)$.

Задача спектрального синтеза – выяснить условия, при которых заданное инвариантное подпространство W допускает спектральный синтез.

Впервые задача спектрального синтеза была поставлена Л. Шварцем в 1947 г. в статье [1]. Там же Л. Шварц доказал, что каждое инвариантное подпространство в $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ допускает спектральный синтез. Разные аспекты этой задачи в случае $n = 1$ были исследованы автором в работах [2]–[9]. В случае $n > 1$ известны лишь отдельные факты (см. [10]–[13]), в частности, инвариантное подпространство решений однородного уравнения свертки в выпуклой области допускает спектральный синтез [12], [13]. В работах А. Б. Шишкина [14] и автора [15] задача спектрального синтеза сводится к двойственной задаче локального описания.

Некоторые авторы [16], [17] понимают термин “спектральный синтез” в более узком смысле, чем определено в настоящей работе. Спектральный синтез для инвариантного подпространства $W \subset \mathcal{H}(\Omega)$, где Ω – область в $\mathbb{C}^n$, трактуется как совпадение W с замыканием в топологии $\mathcal{H}(\Omega)$ линейной оболочки множества экспоненциальных одночленов, т.е. функций вида $z^\alpha \exp\langle \lambda, z \rangle$ содержащихся в W . Такая трактовка правомерна в случае $n = 1$ и в случае инвариантного подпространства, связанного с одним уравнением свертки (см. [11]), так как в этих ситуациях из того, что инвариантное подпространство содержит ехр-многочлен, следует, что оно содержит ехр-одночлены, его составляющие. При $n > 1$ это, вообще говоря, уже не так. Класс инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез в узком смысле, значительно сужается; из него исключаются некоторые простейшие инвариантные подпространства, связанные с системами однородных уравнений в частных производных. Вот соответствующий пример, навеянный Л. Эренпрайсом [18]. Рассмотрим инвариантное под-

пространство $W \subset \mathcal{H}(\mathbb{C}^2)$ решений f системы трех уравнений в частных производных

$$\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} f = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z_1} - \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0.$$

Методом разложения в ряд Тейлора легко установить, что общее решение этой системы имеет вид $f(z) = a + b(z_1 + z_2)$, где a, b – произвольные константы. Совокупность функций такого вида представляет собою инвариантное подпространство, которое, очевидно, допускает спектральный синтез. Однако это подпространство не содержит одночлены z_1, z_2 и, значит, не допускает спектральный синтез в узком смысле.

Ниже мы будем всегда предполагать, что W – замкнутое инвариантное подпространство, допускающее спектральный синтез.

2. Аналитическое продолжение.

В настоящей статье рассматривается следующая задача: при каких условиях каждый элемент $f = (f_1, \dots, f_q) \in W$ допускает аналитическое продолжение в более широкую, чем Ω , систему областей $\Omega' = (\Omega'_1, \dots, \Omega'_q)$, т.е. каждая компонента f_i продолжается в область $\Omega'_i \supset \Omega_i, i = 1, \dots, q$?

Сама возможность аналитического продолжения проистекает из того, что при определенных условиях каждая последовательность линейных комбинаций элементарных эксп- q -многочленов из W , сходящаяся к элементу $f \in W$ равномерно внутри Ω , будет автоматически сходиться внутри более широкой системы областей Ω' ; в результате элемент f аналитически продолжается в Ω' . Это обстоятельство накладывает определенные геометрические ограничения на области существования компонент $f_1, \dots, f_q$ элемента f . Процесс аналитического продолжения сводится к расширению исходной системы областей Ω до тех пор, пока ее компоненты не приобретут требуемые геометрические свойства.

С каждым инвариантным подпространством $W \subset \mathcal{H}$ определенным образом связывается его аннуляторный подмодуль I – замкнутый подмодуль специального модуля P целых функций экспоненциального типа (см. §2, п. 2). Геометрия системы областей $\Omega' = (\Omega'_1, \dots, \Omega'_q)$, куда осуществляется аналитическое продолжение, зависит от множества предельных направлений, по которым спектральное множество (§2, п. 3) инвариантного подпространства уходит в ∞ , и от наличия в I системы элементов, допускающих определенную оценку снизу.

3. История задачи аналитического продолжения при $n = 1$.

В случае $q = n = 1$ задача имеет долгую историю. Ее истоки лежат в начатых еще в позапрошлом веке исследованиях областей существования функций, представимых в виде степенных рядов. В 1892 г. Ж. Адамар [19] доказал, что если функция f представляется рядом

$$f(z) = \sum a_n z^{\lambda_n} \tag{2}$$

с пропусками $\lambda_{n+1} - \lambda_n > \theta \lambda_n$, где θ – положительное число, не зависящее от n , то граница круга сходимости ряда (2) является естественной границей области существования функции f , т.е. каждая точка этой границы является особой для f . В терминах аналитического продолжения этот результат можно трактовать следующим образом: если функция f голоморфна в области G , содержащей начало, и разлагается в

ряд (2) с пропусками Адамара в некоторой окрестности начала, то f допускает аналитическое продолжение в наименьший открытый круг с центром в начале, содержащий область G .

Е. Фабри [20] в 1896 г. доказал, что утверждение Адамара сохраняется при более общем условии на последовательность показателей, а именно, последовательность $\{\lambda_n\}$ должна иметь нулевую плотность:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0.$$

В работах Д. Пойа [21], А. Островского [22], В. Бернштейна [23] этот результат был распространен на ряды Дирихле: если функция f представляется в виде ряда Дирихле

$$f(z) = \sum a_n e^{-\lambda_n z} \quad (3)$$

с последовательностью положительных показателей, имеющей нулевую плотность, то вертикальная прямая, ограничивающая наибольшую полуплоскость голоморфности функции f , является естественной границей области существования этой функции. Последний результат является частным случаем более общего утверждения Д. Пойа [21]: область существования решения однородного уравнения свертки $S * f = 0$ с характеристической функцией $\varphi(\lambda) = \langle S, \exp \lambda z \rangle$ минимального типа является выпуклой. Таким образом, если известно а priori, что решение такого уравнения голоморфно в некоторой области, то оно допускает аналитическое продолжение в выпуклую оболочку этой области. В. Бернштейн [23; гл. VI] установил, что если последовательность положительных показателей $\{\lambda_n\}$ имеет конечную максимальную плотность σ , то каждый замкнутый отрезок длины $2\pi\sigma$ на прямой голоморфности ряда (3) содержит особую точку его суммы f . Отсюда, в частности, следует обобщение теоремы Адамара–Фабри: если последовательность $\{\lambda_n\}$ степеней ряда (2) имеет плотность $\sigma = \lim n/\lambda_n$, то каждая замкнутая дуга границы круга сходимости углового раствора $2\pi\sigma$ содержит особую точку его суммы f . Отметим, что утверждение В. Бернштейна несколько ранее было доказано Д. Пойа [24] при условии разделения показателей:

$$|\lambda_{n+1} - \lambda_n| \geq q > 0.$$

А. Ф. Леонтьев [25], [26], развивая цитированные выше результаты В. Бернштейна, доказал, что если характеристическая функция однородного уравнения свертки $S * f = 0$ имеет вид

$$\varphi(\lambda) = \prod \left(1 - \left(\frac{z}{\lambda_n} \right)^2 \right), \quad (4)$$

где $n/\lambda_n \rightarrow \sigma > 0$, то всякое решение f этого уравнения, голоморфное в окрестности вертикального отрезка $[-i\pi\sigma, i\pi\sigma]$, допускает аналитическое продолжение в вертикальную полосу, содержащую этот отрезок; при этом вертикальные прямые, ограничивающие полосу голоморфности f , обладают свойством: всякий вертикальный отрезок длины $2\pi\sigma$, лежащий на этих прямых, содержит особые точки f . Позднее такой же результат был получен Ж.-Р. Каханом [27]. Результату А. Ф. Леонтьева можно придать следующую геометрическую интерпретацию: если решение f уравнения

$S * f = 0$ с характеристической функцией (4) голоморфно в области G , содержащей отрезок $I = [-i\pi\sigma, i\pi\sigma]$, то f допускает аналитическое продолжение в полосу

$$G' = (G \ominus I)_0 + i\mathbb{R}, \quad (5)$$

где $G \ominus I$ – геометрическая разность G и I , $(G \ominus I)_0$ – компонента связности этого множества, содержащая начало.

В цитированных выше результатах аналитическое продолжение сопровождается распространением сходимости последовательностей полиномов Дирихле, причем в ту же область, в которую имеет место аналитическое продолжение. Например, в ситуации, рассмотренной А. Ф. Леонтьевым, если последовательность полиномов Дирихле сходится в области G , содержащей отрезок $[-i\pi\sigma, i\pi\sigma]$, то она сходится и в области (5). Задача распространения сходимости имеет самостоятельный интерес, выходящий за рамки аналитического продолжения. В разных ситуациях эта задача рассматривалась А. Ф. Леонтьевым [28]–[30], Л. Шварцем [31], Ж.-Р. Каханом [27], А. Байетт [32], [33], И. Ф. Красичковым [34]. Отметим следующий результат из работы [34].

Пусть система экспонент $\{e^{-\lambda_n z}\}$, $\lambda_n > 0$, не полна в некоторой односвязной области G , т.е. замыкание линейной оболочки этой системы в топологии $\mathcal{H}(G)$ не совпадает со всем $\mathcal{H}(G)$. Тогда для того чтобы сходимость последовательности полиномов Дирихле, т.е. конечных линейных комбинаций вида

$$\sum a_n e^{-\lambda_n x},$$

распространялась в некоторую полуплоскость $\operatorname{Re} z > a$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ имела конечный индекс концентрации

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_{\varepsilon}^1 \frac{n_{\sigma}(x)}{\sigma} d\sigma,$$

где $n_{\sigma}(x)$ – число точек λ_n в круге $e_{\sigma}(x) = \{z : |z - x| \leq \sigma|x|\}$.

В работе автора [35] было установлено, что геометрия области G , в которую продолжают функции из инвариантного подпространства $W \subset \mathcal{H}(G)$, определяется множеством направлений, по которому его спектр уходит в бесконечность, и наличием в аннуляторном подмодуле подпространства W функций, допускающих определенные оценки снизу. Чтобы дать представление, насколько далеко можно продвинуться в одномерном случае по сравнению с многомерным, воспроизведем один результат из работы [35] (предложение 2.6).

Пусть W – инвариантное подпространство в $\mathcal{H}(G)$, где G – односвязная область в $\mathbb{C}$. Предположим, что W допускает спектральный синтез и аннуляторный подмодуль I подпространства содержит целую функцию вполне регулярного роста с сопряженной диаграммой $D \subset G$. Пусть Θ – множество предельных направлений спектра $\Lambda = \{\lambda_i, n_i\}$ подпространства W , т.е. множество точек на единичной окружности, являющихся пределами подпоследовательностей последовательности $\tau_i = \lambda_i/|\lambda_i|$, $i = 1, 2, \dots$, $\Theta^* = \{\tau : \bar{\tau} \in \Theta\}$ – множество сопряженных направлений, $G \ominus D$ – геометрическая разность G и D , т.е. множество $\{z : z + D \subset G\}$, $(G \ominus D)_0$ – компонента этой разности, содержащая начало. Тогда любая функция $f \in W$ допускает аналитическое продолжение в область

$$G' = \operatorname{conv}_{\Theta^*}((G \ominus D)_0 + D).$$

Здесь $\text{conv}_{\Theta^*}((G \ominus D)_0 + D)$ обозначает Θ^* -выпуклую оболочку множества $((G \ominus D)_0 + D)$ – пересечение всех полуплоскостей вида $\{z : \text{Re}(z\bar{\tau}) < p\}$, $\tau \in \Theta^*$, содержащих $((G \ominus D)_0 + D)$.

Отметим, что из этого утверждения можно вывести цитированные выше результаты, начиная с теоремы Адамара о степенных рядах с пропусками и кончая теоремой Леонтьева об аналитическом продолжении в вертикальную полосу.

4. История задачи при $n > 1$.

В случае многих переменных задача аналитического продолжения мотивирована известным фактом аналитичности решений многих классических уравнений математической физики.

Чтобы сформулировать известные результаты, введем ряд понятий. *Направлением* в $\mathbb{C}^n$ мы называем точку τ единичной сферы $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$. Для $\tau \in S^{2n-1}$ τ -*полупространством* называется либо замкнутое полупространство вида

$$\{z \in \mathbb{C}^n : (z, \tau) \leq a\},$$

либо открытое полупространство вида

$$\{z \in \mathbb{C}^n : (z, \tau) < a\},$$

где $(z, \tau) = \text{Re} \sum_{i=1}^n z_i \bar{\tau}_i$, $a \in \mathbb{R}$.

Пусть Θ – некоторое множество направлений, т.е. множество точек на S^{2n-1} . Множество $M \subset \mathbb{C}^n$ называется Θ -*выпуклым*, если оно представляет собою пересечение некоторого семейства τ -полупространств. Пересечение любого семейства Θ -выпуклых множеств – снова Θ -выпуклое множество. Поэтому имеет смысл понятие Θ -выпуклой оболочки множества: это – пересечение всех Θ -выпуклых множеств, его содержащих. Θ -выпуклая оболочка множества M обозначается $\text{conv}_{\Theta} M$.

Пусть Λ – некоторое множество в $\mathbb{C}^n$. *Множеством предельных направлений* множества Λ называется множество пределов на сфере S^{2n-1} всевозможных последовательностей точек $z_k/|z_k|$, где $z_k \in \Lambda$, $z_k \rightarrow \infty$.

Пусть D – компакт в $\mathbb{C}^n$. Функция $H_D(\lambda) = \sup_{z \in D} \text{Re} \langle z, \lambda \rangle$, где $\langle z, \lambda \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \bar{\lambda}_i$, называется *опорной функцией* (в смысле комплексного анализа) компакта D .

Пусть Ω – выпуклая область в $\mathbb{C}^n$, S – линейный непрерывный функционал на $\mathcal{H}(\Omega)$. Выпуклый компакт D называется *определяющим* для S , если для любой открытой окрестности G компакта D и любой целой функции $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ выполняется неравенство

$$|\langle S, f \rangle| \leq \text{const} \cdot \sup_{z \in G} |f(z)|.$$

Выпуклый компакт $D \subset \mathbb{C}^n$ является *определяющим* для целой функции φ экспоненциального типа, если для любого $\varepsilon > 0$ существует константа C_ε такая, что $|\varphi(\lambda)| \leq C_\varepsilon \exp(H_D(\lambda) + \varepsilon|\lambda|)$. Если φ является характеристической функцией функционала S , т.е. $\varphi(\lambda) = \langle S, \exp \langle \lambda, z \rangle \rangle$, то по теореме Мартино–Эренпрайса [36; теорема 4.5.3] классы определяющих компактов для S и φ совпадают.

Пусть $P(D)$ – дифференциальный оператор в частных производных с постоянными коэффициентами. В 1967 г. П. Шапира [37] анонсировал, что каждое решение однородного уравнения

$$P(D)u = 0, \tag{6}$$

голоморфное в выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, допускает аналитическое продолжение в Θ^* -выпуклую оболочку области Ω , т.е. в $\text{conv}_{\Theta^*} \Omega$, где Θ^* – множество направлений, сопряженных Θ , а Θ – множество предельных направлений нулевого множества характеристического многочлена $P(\lambda)$ оператора $P(D)$. Это утверждение было доказано К. Кисельманом [38] в 1969 г.

Следует отметить, что возможность аналитического продолжения решений уравнения (6) в область $\text{conv}_{\Theta^*} \Omega$ следует из интегральных представлений для решений этого уравнения, связанных с фундаментальным принципом Эренпрайса–Паламодова [39], [40]. А. Себбар [41] рассмотрел однородные уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами и с характеристической функцией минимального типа. При некоторых дополнительных условиях типа оценок снизу на характеристическую функцию каждое решение такого уравнения, голоморфное в выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, аналитически продолжается в $\text{conv}_{\Theta^*} \Omega$, где Θ – множество предельных направлений нулевого множества характеристической функции. А. Мерили и Д. Струппа [42] рассмотрели более общую ситуацию уравнения свертки

$$S * f = 0, \quad (7)$$

где S – аналитический функционал с определяющим компактом D . При весьма жестких ограничениях на характеристическую функцию φ функционала S , включающих полную регулярность ее роста, доказывается, что всякое решение f уравнения (7), голоморфное в области $D + \omega$, где ω – выпуклая область в $\mathbb{C}^n$, допускает аналитическое продолжение в область

$$D + \text{conv}_{\Theta^*} \omega,$$

где Θ – множество предельных направлений нулевого множества функции φ .

Наиболее сильный результат в обсуждаемом направлении был получен А. С. Кривошеевым [43]. Воспроизвести формулировку этого результата в том виде, в каком она дана в [43], не представляется возможным, так как она не вписывается в контекст настоящей статьи. Мы придадим этому результату другую форму, доступную геометрическому восприятию. Нам понадобится понятие геометрической разности множеств Ω и D в $\mathbb{C}^n$. *Геометрической разностью* множеств Ω и D , в обозначении $\Omega \ominus D$, называется множество $\{z \in \mathbb{C}^n : z + D \subset \Omega\}$. Если Ω не содержит ни одного сдвига D , то $\Omega \ominus D$ пусто. Если Ω – выпуклая область, а D – компакт, принадлежащий Ω , то геометрическая разность $\Omega \ominus D$ – выпуклая область, содержащая начало координат.

Рассмотрим уравнение свертки (7) в выпуклой области Ω . Пусть D – какой-либо определяющий компакт функционала S , принадлежащий Ω , φ – характеристическая функция функционала S , $H_\varphi(\lambda)$ – регуляризованный индикатор φ , $H_D(\lambda)$ – опорная функция D , Θ – множество предельных направлений нулевого множества функции φ . Предполагаются выполненными условия:

- а) характеристическая функция φ имеет вполне регулярный рост по множеству направлений Θ ;
- б) $H_\varphi(\tau) = H_D(\tau)$ для всех $\tau \in \Theta$;
- в) $H_\Omega(\tau) = H_{\Omega_0}(\tau)$ для всех $\tau \in \Theta$, где $H_\Omega(\lambda)$, $H_{\Omega_0}(\lambda)$ – опорные функции соответственно Ω и $\Omega_0 = (\Omega \ominus D) + D$.

Тогда каждое решение $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ уравнения свертки (7) аналитически продолжается в $\text{conv}_{\Theta^*} \Omega$.

Геометрический смысл условия в) состоит в том, что границы областей Ω и Ω_0 совпадают в точках опоры τ -полупространств при $\tau \in \Theta^*$.

5. Основное содержание работы.

В настоящей работе схема статьи [35] распространяется на многие переменные и $q > 1$. Чтобы описать эту схему, нам потребуется специальная терминология.

Пусть $\Omega = \{\Omega_1, \dots, \Omega_q\}$ – система областей в $\mathbb{C}^n$, E – некоторое множество элементарных ехр- q -многочленов, инвариантное относительно операторов частного дифференцирования. Будем говорить, что инвариантное подпространство $W \subset \mathcal{H}(\Omega)$ порождено E , если W совпадает с замыканием в топологии $\mathcal{H}(\Omega)$ линейной оболочки E . Очевидно, что W – инвариантное подпространство, допускающее спектральный синтез; обратно, всякое инвариантное подпространство, допускающее спектральный синтез, порождается некоторым множеством элементарных ехр- q -многочленов.

Рассмотрим теперь две системы областей $\Omega = \{\Omega_1, \dots, \Omega_q\}$, $\Omega' = \{\Omega'_1, \dots, \Omega'_q\}$ и два множества E , E' элементарных ехр- q -многочленов. Предположим, что $\Omega \subset \Omega'$, т.е. $\Omega_i \subset \Omega'_i$, $i = 1, \dots, q$, и $E' \subset E$. Пусть W – инвариантное подпространство в $\mathcal{H}(\Omega)$, порожденное E , W' – инвариантное подпространство в $\mathcal{H}(\Omega')$, порожденное E' . Линейное непрерывное отображение

$$p: W \rightarrow W'$$

называется *проектором Дирихле* (см. §6, п. 1), если оно обладает следующим свойством:

$$p(e) = \begin{cases} e, & \text{если } e \in E', \\ 0, & \text{если } e \in E \setminus E'. \end{cases}$$

Известным образом (§2, п. 2) пространства, сопряженные к $\mathcal{H}(\Omega)$, $\mathcal{H}(\Omega')$, можно отождествить с пространствами P , P' целых q -функций экспоненциального типа. Эти пространства обладают структурой модулей над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ и называются модулями, ассоциированными с Ω , Ω' соответственно. Инвариантным подпространствам W , W' соответствуют их аннуляторные подмодули $I \subset P$, $I' \subset P'$ (§2, п. 2). Существование проектора Дирихле равносильно существованию так называемого мономорфизма Дирихле (§7, п. 1) – специального линейного непрерывного отображения фактор-модуля P'/I' в фактор-модуль P/I .

Вопрос о существовании мономорфизма Дирихле сводится к разрешимости следующей интерполяционной задачи: для каждого элемента $\varphi' \in P'$ найти элемент $\varphi \in P$ такой, что $\varphi \equiv \varphi' \pmod{I(\lambda)}$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}^n$ (§7, п. 1), здесь $I(\lambda)$ – локальный подмодуль, порожденный I в точке λ (§2, п. 2). В одномерном случае эта задача решалась с помощью интегрирования вдоль контуров, охватывающих спектральное множество инвариантного подпространства [36]; в многомерном случае эта задача решается специальным приемом, восходящим к К. Кисельману [38] и использующим оценку Л. Хёрмандера для неоднородного уравнения Коши–Римана (см. [36; теорема 4.4.2]). Реализация описанной выше схемы приводит к общей теореме 10.1 о существовании проекторов Дирихле. Эта теорема имеет многочисленные следствия. В частности, с ее помощью мы получаем весьма общую теорему об аналитическом продолжении. Ниже мы сформулируем вариант этой теоремы, относящийся к случаю $q = 1$.

6. Теорема об аналитическом продолжении.

Для формулировки теоремы потребуется ряд дополнительных понятий.

1°. Пусть Γ – замкнутое множество в $\mathbb{C}^n$, дополнение которого $\Gamma^{(c)} = \mathbb{C}^n \setminus \Gamma$ состоит не менее чем из двух компонент связности. Для компоненты связности $e \subset \Gamma^{(c)}$ обозначим через E_e объединение всех компонент связности множества $\Gamma^{(c)}$, отличных от e . Определим на $\Gamma^{(c)}$ функцию $T_\Gamma(z)$, полагая

$$T_\Gamma(z) = \text{dist}(z, E_e)$$

при $z \in e$.

Множество Γ является *окружением* множества Λ , если существует разбиение $\Gamma^{(c)}$ на два открытых непустых множества Z', Z'' , первое из которых содержит Λ . Ясно, что множества Z', Z'' не пересекаются и каждое из них представляет собою объединение некоторого семейства компонент связности множества $\Gamma^{(c)}$.

Понятие окружения в $\mathbb{C}^n$ играет ту же роль, что и понятие замкнутого контура в $\mathbb{C}$. При наличии оценок снизу вдоль окружения можно, используя оценки Хёрмандера, добиться того же эффекта, что и с помощью интеграла типа Коши в $\mathbb{C}$.

2°. Пусть A, B – выпуклые множества в $\mathbb{C}^n$. Множество $M \subset \mathbb{C}^n$ называется (A, B) -*выпуклым*, если оно обладает следующим свойством: если сдвиг $A + a$ множества A на вектор a принадлежит M , то и сдвиг $B + a$ также принадлежит M . Пересечение любого семейства (A, B) -выпуклых множеств является (A, B) -выпуклым; поэтому для любого множества M существует его (A, B) -выпуклая оболочка – пересечение всех (A, B) -выпуклых множеств, его содержащих. Если множество M не содержит ни одного сдвига множества A , то оно постулируется (A, B) -выпуклым при любом B ; (A, B) -выпуклая оболочка такого множества совпадает с ним самим.

Понятия спектрального множества инвариантного подпространства и его аннуляторного подмодуля содержатся в § 2.

ТЕОРЕМА ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ. Пусть Ω – область в $\mathbb{C}^n$; W – инвариантное подпространство в $\mathcal{H}(\Omega)$, допускающее спектральный синтез; I – аннуляторный подмодуль подпространства W , Λ – его спектральное множество; Γ – замкнутое подмножество в $\mathbb{C}^n$, окружающее Λ .

Предположим, что аннуляторный подмодуль I подпространства W содержит функцию и такую, что выполняются следующие условия:

1)

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty, \lambda \in \Gamma^{(c)}} \frac{\ln T_\Gamma(\lambda)}{|\lambda|} \geq 0; \quad (8)$$

2) для некоторого выпуклого компакта $d \subset \mathbb{C}^n$ выполняется оценка снизу

$$\ln |u(\lambda)| \geq H_d(\lambda) + o(|\lambda|), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \Gamma; \quad (9)$$

3) для некоторого определяющего компакта D функции и выполняется включение

$$d \subset D.$$

Тогда для любого выпуклого компакта $\omega \subset \mathbb{C}^n$ любая функция $f \in W$ аналитически продолжается в (A, B) -выпуклую оболочку Ω' области Ω , где $A = D + \omega$, $B = \text{conv}_{\Theta_{Z' \cup \Gamma}^*}(d + \omega)$, $\Theta_{Z' \cup \Gamma}$ – предельное множество направлений множества $Z' \cup \Gamma$, $\Theta_{Z' \cup \Gamma}^*$ – множество сопряженных направлений.

Это утверждение является следствием общей теоремы о существовании проекторов Дирихле (теорема 10.1), относящейся к случаю $q \geq 1$.

Если аннуляторный подмодуль I подпространства W содержит другую функцию u и при этом выполняются условия 1)–3) теоремы, может быть, с другими Γ , D , d , ω , то элементы из W будут допускать аналитическое продолжение в соответствующую (A', B') -выпуклую оболочку, скажем Ω'' , отличную от Ω' . Тогда аналитическое продолжение будет осуществляться в объединение $\Omega' \cup \Omega''$. Так что, варьируя u , Γ , D , d , ω допустимым образом, мы можем существенно расширить область аналитического продолжения.

Заметим, что (A, B) -выпуклая оболочка области Ω вместе с $A = D + \omega$ содержит и $B = \text{conv}_{\Theta_{Z' \cup \Gamma}^*}(d + \omega)$. Отсюда получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. При выполнении условий 1)–3) каждый элемент $f \in W$ допускает аналитическое продолжение в $\text{conv}_{\Theta_{Z' \cup \Gamma}^*}(d + \omega)$.

Мы применим это следствие к подпространству $W \subset \mathcal{H}(\Omega)$ решений f однородного уравнения свертки (7). Известно, что W допускает спектральный синтез [13] и что характеристическая функция $u(\lambda) = \langle S, \exp\langle \lambda, z \rangle \rangle$ этого уравнения принадлежит аннуляторному подмодулю I подпространства W .

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\Omega = D + \omega$, где D – какой-либо определяющий компакт функционала S , ω – выпуклая область, и Θ – множество предельных направлений нулевого множества u . Предположим, что выполняются условия: а) характеристическая функция u имеет вполне регулярный рост по множеству направлений Θ ; б) $H_u(\tau) = H_D(\tau)$ для всех $\tau \in \Theta$.

Тогда каждое решение $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ уравнения свертки (7) аналитически продолжается в $\text{conv}_{\Theta^*} \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При выполнении условий а), б) можно построить окружение Γ множества Λ (это фактически сделано в [43]) такое, что множество $\Theta_{Z' \cup \Gamma}$ совпадает с Θ и выполняется оценка (9) с $d = D$. По следствию 1 любое решение $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ уравнения свертки (7) аналитически продолжается в $\text{conv}_{\Theta^*} \Omega$.

Все перечисленные выше результаты, относящиеся к уравнению свертки при $n > 1$, следуют из этой теоремы. Результаты П. Шапиры [37], К. Кисельмана [38], А. Себба-ра [41] получаются при $D = \{0\}$. Утверждение А. Мерила и Д. Струшпы [42] следует из включения

$$D + \text{conv}_{\Theta^*} \omega \subset \text{conv}_{\Theta^*}(D + \omega).$$

Утверждение А. С. Кривошеева [43] выводится с помощью следующего рассуждения. Пусть выполняются условия а)–в) п. 4. Рассмотрим решение f уравнения свертки (7), голоморфное в Ω . Так как $\Omega_0 \subset \Omega$, то тем более f голоморфно в Ω_0 . Но область Ω_0 имеет вид, требуемый следствием 2, именно: $\Omega_0 = D + \omega$, где $\omega = \Omega \ominus D$. Поэтому f аналитически продолжается в $\text{conv}_{\Theta^*} \Omega_0$. Чтобы завершить рассуждение, достаточно заметить, что при условии в) $\text{conv}_{\Theta^*} \Omega = \text{conv}_{\Theta^*} \Omega_0$.

§ 2. Спектральный синтез и обильные подмодули

1. Обозначения.

Объектами исследования настоящей работы являются инвариантные подпространства, допускающие спектральный синтез. Если W – такое подпространство в $\mathcal{H}(G)$, где G – открытое множество в $\mathbb{C}^n$, то каждый элемент из W аппроксимируется равномерно внутри G полиномами Дирихле и, следовательно, обычными полиномами. Это значит, что W вложено в подпространство $H(G)$ пространства $\mathcal{H}(G)$, состоящее из функций, аппроксимируемых полиномами. Наделив последнее топологией, индуцированной из $\mathcal{H}(G)$, мы можем рассматривать его как самостоятельное локально-выпуклое пространство, а W – как вложенное в него. Такой подход позволяет избежать сложностей, связанных со строением открытых множеств, в которых голоморфные функции аппроксимируются многочленами (множеств Рунге). Хорошо известно, что $\mathcal{H}(G)$ является пространством типа (M^*) [44]. Как замкнутое подпространство этого пространства $H(G)$ также является пространством типа (M^*) . Назовем $H(G)$ *пространством, ассоциированным с G* .

Пусть $\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_q)$ – упорядоченная система открытых множеств в $\mathbb{C}^n$;

$$H(\Omega) = H(\Omega_1) \times \dots \times H(\Omega_q) \quad (1)$$

– топологическое произведение пространств $H(\Omega_1), \dots, H(\Omega_q)$, ассоциированных с $\Omega_1, \dots, \Omega_q$ соответственно. Для сокращения формулировок удобно ввести следующую терминологию. Упорядоченную систему $K = (K_1, \dots, K_q)$ множеств $K_1, \dots, K_q \subset \mathbb{C}^n$ будем называть *q -множеством*. K – открытое q -множество, если все K_i – открытые множества; K – выпуклая q -область, если все K_i – выпуклые области; K – выпуклый q -компакт, если все K_i – выпуклые компакты. По отношению к q -множествам теоретико-множественные отношения включения и операции объединения и пересечения имеют покомпонентный смысл. Так, включение $K \subset K'$ для q -множеств $K = (K_1, \dots, K_q)$, $K' = (K'_1, \dots, K'_q)$ равносильно q включениям $K_i \subset K'_i$, $i = 1, \dots, q$. Объединение $K = \bigcup_{\alpha} K^{\alpha}$ равносильно $K_i = \bigcup_{\alpha} K_i^{\alpha}$, $i = 1, \dots, q$. Напомним, что арифметическая сумма $A + B$ множеств $A, B \subset \mathbb{C}^n$ представляет собою множество всех сумм $a + b$, где $a \in A$, $b \in B$. В этой статье мы будем иметь дело с арифметическими суммами вида $K + A$, где $K = (K_1, \dots, K_q)$ – q -множество, а A – множество из $\mathbb{C}^n$; при этом под суммой $K + A$ мы подразумеваем q -множество $(K_1 + A, \dots, K_q + A)$, где $K_i + A$ – арифметическая сумма K_i и A .

Пространство $H(\Omega)$, введенное по формуле (1), будем кратко обозначать H и называть *пространством, ассоциированным с открытым q -множеством Ω* . Как топологическое произведение пространств $H(\Omega_1), \dots, H(\Omega_q)$ пространство H наследует их свойства; в частности, оно является пространством типа (M^*) . Элементами H являются векторы $f = (f_1, \dots, f_q)$ с компонентами $f_i \in H(\Omega_i)$. Опишем сходимость в топологии H . Пусть $K = (K_1, \dots, K_q)$ – q -компакт в Ω . Последовательность элементов

$$f^{(k)} = (f_1^{(k)}, \dots, f_q^{(k)}), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

сходится к элементу $f = (f_1, \dots, f_q)$ равномерно на K , если $f_i^{(k)} \rightarrow f_i$ равномерно на K_i для $i = 1, \dots, q$. Сходимость последовательности (2) к элементу f в топологии H равносильна сходимости этой последовательности к элементу f равномерно внутри Ω , т.е. равномерно на каждом q -компакте $K \subset \Omega$.

Чтобы указать зависимость компонент элемента $f = (f_1, \dots, f_q)$ от соответствующих переменных, правильно было бы использовать запись $(f_1(z^{(1)}), \dots, f_q(z^{(q)}))$, где векторные переменные $z^{(1)} = (z_1^{(1)}, \dots, z_n^{(1)})$, $\dots$, $z^{(q)} = (z_1^{(q)}, \dots, z_n^{(q)})$ изменяются в множествах $\Omega_1, \dots, \Omega_q$ соответственно. Однако более удобна символическая запись

$$f(z) = (f_1(z), \dots, f_q(z)),$$

где неявно предполагается, что в каждой компоненте переменная $z = (z_1, \dots, z_n)$ меняется независимо от переменных в других компонентах. Продемонстрируем удобство такой символики. Будем q -одночлен, т.е. элемент вида

$$(a_1(z^{(1)})^\alpha, \dots, a_q(z^{(q)})^\alpha),$$

где $a_1, \dots, a_q$ – комплексные числа, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $(z^{(i)})^\alpha = (z_1^{(i)})^{\alpha_1} \dots (z_n^{(i)})^{\alpha_n}$, записывать символически в виде az^α , где $a = (a_1, \dots, a_q)$ – вектор-столбец, умножение монома $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$ на вектор a производится покомпонентно. q -многочлен степени m , т.е. элемент вида $(p_1(z^{(1)}), \dots, p_q(z^{(q)}))$, где $p_i(z^{(i)})$ – многочлен от переменных $z_1^{(i)}, \dots, z_n^{(i)}$ и $\max_i \deg p_i = m$, допускает запись в виде суммы q -одночленов

$$\sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha z^\alpha,$$

где $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, a_α – векторы-столбцы. Наконец, *элементарный* $\exp$ - q -многочлен степени m , т.е. элемент вида

$$(p_1(z^{(1)}) \exp\langle \lambda, z^{(1)} \rangle, \dots, p_q(z^{(q)}) \exp\langle \lambda, z^{(q)} \rangle),$$

где p_i – многочлен, $\max_i \deg p_i = m$, допускает символическую запись

$$p(z) \exp\langle \lambda, z \rangle,$$

где $p(z)$ – q -многочлен степени m и экспонента $\exp\langle \lambda, z \rangle$ умножается на q -многочлен $p(z)$ покомпонентно. Конечную сумму элементарных $\exp$ - q -многочленов будем называть просто $\exp$ - q -многочленом или полиномом Дирихле.

2. Аннуляторный подмодуль.

Задача спектрального синтеза сводится к задаче локального описания с помощью принципа двойственности, восходящего к Л. Эренпрайсу [11]. Сначала рассмотрим случай $q = 1$. Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{C}^n$, H – пространство, ассоциированное с Ω , H^* – сильное сопряженное к H . Каждому линейному непрерывному функционалу $S \in H^*$ поставим в соответствие его характеристическую функцию $\varphi(\lambda) = \langle S, \exp\langle \lambda, z \rangle \rangle$. Когда S пробегает H^* , его характеристическая функция φ пробегает некоторый класс целых функций P . Этот класс обладает структурой модуля над кольцом многочленов и наделяется топологией, индуцированной из H^* отображением $T: S \mapsto \varphi(\lambda) = \langle S, \exp\langle \lambda, z \rangle \rangle$. Будем называть P *модулем, ассоциированным*

с открытым множеством Ω , а отображение $T: H^* \rightarrow P$ – каноническим. Поскольку система всех одночленов, а значит, и система всех экспонент, полны в H , ядро отображения $T: H^* \rightarrow P$ тривиально. Отсюда следует, что отображение T – топологический изоморфизм. Пространство P как изоморфное пространству, сопряженному к пространству типа (M^*) , является пространством типа (LN^*) и, значит, является бочечным, борнологическим, рефлексивным [45; гл. XI].

Теперь рассмотрим случай $q > 1$. Пусть H – пространство, определенное по формуле (1). Пространство H^* , сопряженное к H , представляется в виде топологического произведения

$$H^* = H_1^* \times \dots \times H_q^*,$$

где H_i^* – пространство, сопряженное к $H(\Omega_i)$. Линейный непрерывный функционал $S \in H^*$ представляется в виде вектора $S = (S_1, \dots, S_q)$, $S_i \in H_i^*$. Действие функционала S на элемент $f = (f_1, \dots, f_q) \in H$ осуществляется по формуле

$$\langle S, f \rangle = \sum_{i=1}^q \langle S_i, f_i \rangle.$$

Сопоставим функционалу $S = (S_1, \dots, S_q)$ его характеристический элемент

$$\varphi(\lambda) = (\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_q(\lambda)),$$

где $\varphi_i(\lambda) = \langle S_i, \exp(\lambda, z) \rangle$. Когда S пробегает H^* , его характеристический элемент $\varphi(\lambda) = (\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_q(\lambda))$ пробегает класс P целых q -функций экспоненциального типа. Класс P обладает структурой линейного пространства над полем $\mathbb{C}$ и выдерживает умножение (покомпонентное) на многочлены.

Обозначим через T операцию перехода от функционала S к его характеристическому элементу. T является линейным отображением H^* на P . Наделим P локально-выпуклой топологией, индуцированной из H^* отображением T . Легко видеть, что P представляет собою топологическое произведение

$$P = P_1 \times \dots \times P_q,$$

где P_i – модуль, ассоциированный с Ω_i . Произведение P наследует свойства пространств P_i : оно является пространством типа (LN^*) , бочечным, борнологическим, рефлексивным. Операция умножения на многочлен непрерывна в топологии P . Это означает, что P обладает структурой топологического модуля над кольцом $\mathbb{C}[\lambda] = \mathbb{C}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$. Будем P называть *модулем, ассоциированным с открытым q -множеством Ω* , а отображение $T: H^* \rightarrow P$ – *каноническим*. Отображение T является топологическим изоморфизмом. Это следует из того, что таковыми являются канонические отображения $T_i: H_i^* \rightarrow P_i$. *Подмодулем* $\mathbb{C}[\lambda]$ -модуля P называется подмножество $I \subset P$, обладающее свойствами:

- 1) $\varphi_1, \varphi_2 \in I \implies \varphi_1 + \varphi_2 \in I$;
- 2) $\varphi \in I, p \in \mathbb{C}[\lambda] \implies p\varphi \in I$.

Существует связь между замкнутыми подмодулями $I \subset P$ и инвариантными подпространствами $W \subset H$. Эта связь устанавливается следующим образом. Рассматривается подпространство W^0 в H^* , ортогональное W :

$$W^0 = \{S \in H^* : \langle S, f \rangle = 0 \ \forall f \in W\}.$$

В силу рефлексивности H подпространство W^0 замкнуто в H^* . Стандартным образом показывается, что образ $I = T(W^0)$ обладает структурой замкнутого подмодуля в P . Обратно, в силу того, что каноническое отображение $T: H^* \rightarrow P$ – топологический изоморфизм, каждому замкнутому подмодулю $I \subset P$ соответствует инвариантное подпространство $W \subset H$, связанное с I соотношением $I = T(W^0)$. Подмодуль I называется *аннуляторным подмодулем* инвариантного подпространства W и обозначается $\text{An } W$. Соотношение $I = \text{An } W$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между совокупностью $\{W\}$ всех инвариантных подпространств в H и совокупностью $\{I\}$ всех замкнутых подмодулей в P . Инвариантным подпространствам, допускающим спектральный синтез, соответствуют замкнутые подмодули, обладающие специальным свойством. Чтобы описать это свойство, введем понятие локального подмодуля $I(\lambda)$, порождаемого подмодулем I в точке $\lambda \in \mathbb{C}^n$. Обозначим через $O(\lambda)$ кольцо ростков функций, аналитических в точке λ , а через $O^q(\lambda)$ – совокупность ростков q -функций, аналитических в точке λ . Очевидно, что $O^q(\lambda)$ обладает структурой модуля над кольцом $O(\lambda)$. Фиксированный подмодуль $I \subset P$ порождает в каждой точке $\lambda \in \mathbb{C}^n$ *локальный подмодуль* $I(\lambda)$; последний состоит из всевозможных конечных линейных комбинаций элементов из I с коэффициентами из $O(\lambda)$:

$$\sum c_i u^{(i)}, \quad u^{(i)} \in I, \quad c_i \in O(\lambda).$$

Элемент f из P *принадлежит I локально*, в записи $f \in I_{\text{loc}}$, если $f \in I(\lambda) \ \forall \lambda \in \mathbb{C}^n$. Подмодуль I *обильный*, если справедлива импликация

$$f \in P, \quad f \in I_{\text{loc}} \implies f \in I.$$

Термин “обильный подмодуль” проистекает из того обстоятельства, что среди подмодулей с одинаковым локальным поведением обильные подмодули имеют наибольший запас элементов; иными словами, если I – обильный подмодуль в P , а I' – другой подмодуль в P с тем же набором локальных подмодулей, т.е. $I'(\lambda) = I(\lambda) \ \forall \lambda \in \mathbb{C}^n$, то $I' \subset I$. Очевидно, что обильные подмодули и только они допускают локальное описание, т.е. полностью восстанавливаются по набору $\{I(\lambda)\}$, $\lambda \in \mathbb{C}^n$, своих локальных подмодулей.

3. Спектр.

В пространстве H действуют n операторов частного дифференцирования

$$D_i: (f_1, \dots, f_q) \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial z_i} f_1, \dots, \frac{\partial}{\partial z_i} f_q \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Элемент $e \in H$ называется *корневым элементом* системы операторов $D_1, \dots, D_n$, отвечающим вектору собственных значений $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, если для некоторого положительного целого числа m элемент e удовлетворяет системе уравнений

$$(D_1 - \lambda_1 E)^m e = 0, \quad \dots, \quad (D_n - \lambda_n E)^m e = 0, \quad (3)$$

где E – тождественный оператор. Из теории дифференциальных уравнений известно, что целые решения системы (3) представляют собою $\exp$ - q -многочлены степени, меньшей m , с показателем λ . Описание запаса элементарных $\exp$ - q -многочленов, содержащихся в инвариантном подпространстве $W \subset H$, осуществляется с помощью спектра этого подпространства. Обозначим $\mathbb{C}^q[\xi] = \mathbb{C}^q[\xi_1, \dots, \xi_n]$ множество q -многочленов переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$. Легко видеть, что $\mathbb{C}^q[\xi]$ выдерживает умножение (покомпонентное) на многочлены $p(\xi)$. Поэтому можем рассматривать $\mathbb{C}^q[\xi]$ как модуль над кольцом многочленов $\mathbb{C}[\xi]$. Фиксируем точку $\lambda \in \mathbb{C}^n$. Локальный спектр W в точке λ определяется как множество

$$\mathrm{Sp}_\lambda W := \{p \in \mathbb{C}^q[\xi] : p(z) \exp\langle \lambda, z \rangle \in W\}.$$

Локальный спектр обладает следующими свойствами:

- 1° $p_1, p_2 \in \mathrm{Sp}_\lambda W, c_1, c_2 \in \mathbb{C} \implies c_1 p_1 + c_2 p_2 \in \mathrm{Sp}_\lambda W$;
- 2° $W \subset W' \implies \mathrm{Sp}_\lambda W \subset \mathrm{Sp}_\lambda W'$;
- 3° $p \in \mathrm{Sp}_\lambda W \implies p^{(\alpha)} \in \mathrm{Sp}_\lambda W$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс и $p^{(\alpha)}(z) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial^{\alpha_1} z_1 \dots \partial^{\alpha_n} z_n} p(z)$.

Спектр W определяется как дизъюнктивное объединение локальных спектров

$$\mathrm{Sp} W := \bigsqcup_{\lambda \in \mathbb{C}^n} \mathrm{Sp}_\lambda W.$$

Спектр W можно представить как совокупность пар (λ, p) , $\lambda \in \mathbb{C}^n$, $p \in \mathbb{C}^q[\xi]$, для которых $p(z) \exp\langle \lambda, z \rangle \in W$.

Точка $\lambda \in \mathbb{C}^n$ называется *спектральной точкой* инвариантного подпространства W , если $\mathrm{Sp}_\lambda W \neq \{0\}$. Множество всех спектральных точек подпространства W образует *спектральное множество* этого подпространства¹.

4. Дивизор.

4.1. Локальный дивизор.

$$p(\xi) = (p_1(\xi), \dots, p_q(\xi)) \in \mathbb{C}^q[\xi].$$

Этому q -многочлену соответствует дифференциальный q -оператор $p(D) = (p_1(D), \dots, p_q(D))$, который q -функцию $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_q)$, голоморфную в области $U \subset \mathbb{C}^n$, переводит в скалярную функцию ψ , голоморфную в той же области, по правилу

$$\psi = \sum_{i=1}^q p_i(D) \varphi_i.$$

Стандартным образом действие оператора $p(D)$ распространяется на ростки q -функций, аналитических в точке λ . Рассмотрим подмодуль $I \subset O^q(\lambda)$. Дивизор подмодуля I , в записи $\mathrm{Div} I$, – это множество q -многочленов:

$$\mathrm{Div} I := \{p \in \mathbb{C}^q[\xi] : p(D)u|_\lambda = 0 \ \forall u \in I\}.$$

В статье [15] установлены следующие свойства дивизора.

Свойство 1. Если $p_1, p_2 \in \mathrm{Div} I$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, то $a_1 p_1 + a_2 p_2 \in \mathrm{Div} I$.

¹В работе [14] спектральное множество называется алгебраическим спектром.

Свойство 2. Если I, J – подмодули в $O^q(\lambda)$ и $I \subset J$, то $\text{Div } J \subset \text{Div } I$.

Свойство 3. Если $p \in \text{Div } I$, то $p^\alpha \in \text{Div } I$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $p^{(\alpha)} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial^{\alpha_1} z_1 \dots \partial^{\alpha_n} z_n} p$.

Свойство 4. $\text{Div } I \cup \text{Div } J \subset \text{Div}(I \cap J)$.

Для подмодулей I, J символом $I \vee J$ обозначим подмодуль в $O^q(\lambda)$, порожденный I и J .

Свойство 5. Справедливо соотношение

$$\text{Div}(I \vee J) = \text{Div } I \cap \text{Div } J.$$

Свойство 6. Если $\text{Div } I = \text{Div } J$, то $I = J$.

Свойство 7. Если $\text{Div } J \supset \text{Div } I$, то $J \subset I$.

Для произвольного множества $I \subset O^q(\lambda)$ дивизор I определяется как дивизор подмодуля, порожденного I в $O^q(\lambda)$; в частности, дивизор элемента $u \in O^q(\lambda)$, в обозначении $\text{Div } u$, есть дивизор главного подмодуля, порожденного u в $O^q(\lambda)$.

Свойство 8. Пусть I – подмодуль в $O^q(\lambda)$, $u \in O^q(\lambda)$. Если $\text{Div } u \supset \text{Div } I$, то $u \in I$.

Пусть I, J – множества в $O^q(\lambda)$. Множество J зависит от множества I (над кольцом $O(\lambda)$), если каждый элемент $v \in J$ представляется в виде конечной линейной комбинации

$$v = \sum c_i u^{(i)}, \quad u^{(i)} \in I, \quad c_i \in O(\lambda).$$

Свойство 9. Для того чтобы множество J зависело от множества I , необходимо и достаточно, чтобы $\text{Div } J \supset \text{Div } I$.

4.2. Глобальный дивизор. Пусть I – подмодуль в P . Локальный дивизор подмодуля I в точке λ , в записи $\text{Div}_\lambda I$, определяется как дивизор локального подмодуля $I(\lambda)$, порожденного I в точке λ : $\text{Div}_\lambda I := \text{Div } I(\lambda)$.

Дивизор I есть дизъюнктное объединение локальных дивизоров

$$\text{Div } I := \bigsqcup_{\lambda \in \mathbb{C}^n} \text{Div}_\lambda I.$$

В работе [15] доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть W – инвариантное подпространство в H , $I = \text{An } W$. Тогда $\text{Sp } W = \text{Div } I$ или, более точно,

$$\text{Sp}_\lambda W = \text{Div}_\lambda I \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^n. \quad (4)$$

Доказательство основано на следующем соотношении: для любого линейного непрерывного функционала $S \in H^*$ и его характеристического элемента φ справедливо соотношение

$$p(D)\varphi|_\lambda = \langle S, p(z) \exp \langle \lambda, z \rangle \rangle. \quad (5)$$

ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ [14], [15]. *Для того чтобы инвариантное подпространство $W \subset H$ допускало спектральный синтез, необходимо и достаточно, чтобы аннуляторный подмодуль $I = \text{An } W$ этого подпространства был обильным.*

5. Нулевое множество подмодуля.

Система элементов $u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \in O^q(\lambda)$ независима над кольцом $O(\lambda)$, если

$$\sum c_i u^{(i)} = 0, \quad c_i \in O(\lambda) \implies c_i = 0.$$

Если J – подмодуль в $O^q(\lambda)$, то *ранг* J , в записи $\text{rank } J$, – максимальное число элементов в независимых системах $u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \in J$. Так же, как и в случае $n = 1$ (см. [46; § 1]), устанавливается, что $\text{rank } J \leq q$.

Пусть I – подмодуль в P . Нетрудно проверить, что ранг локального подмодуля $I(\lambda)$ не зависит от λ . Это число называется *рангом* I и обозначается $\text{rank } I$. Система элементов $u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \in P$ называется *независимой*, если она независима хотя бы над одним кольцом $O(\lambda)$. Ранг I равен максимальному числу элементов в независимых системах $u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \in I$. Будем представлять элементы из P как векторы-столбцы. Обозначим $(u^{(1)} \dots u^{(k)})$, $k \leq q$, матрицу, составленную из векторов-столбцов $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$. Рассмотрим минор

$$\begin{bmatrix} u^{(1)} & \dots & u^{(k)} \\ i_1 & \dots & i_k \end{bmatrix} \quad (6)$$

этой матрицы, полученный выделением строк с номерами $i_1, \dots, i_k$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq q$. Независимость системы $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ равносильна тому, что ранг матрицы $(u^{(1)} \dots u^{(k)})$ равен k , т.е. среди определителей вида (6) хотя бы один отличен от тождественного нуля.

В настоящей статье мы будем рассматривать только подмодули полного ранга $k = q$. Для таких подмодулей определим понятие нулевого множества. Пусть I – подмодуль в P полного ранга q . Рассмотрим всевозможные определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1^{(1)} & \dots & u_1^{(q)} \\ u_q^{(1)} & \dots & u_q^{(q)} \end{vmatrix}, \quad (7)$$

где $u^{(1)} = (u_1^{(1)}, \dots, u_q^{(1)})$, $\dots$, $u^{(q)} = (u_1^{(q)}, \dots, u_q^{(q)})$ – элементы из I . Каждый определитель Δ представляет собою целую функцию. Точка $\lambda \in \mathbb{C}^n$ называется *нулем* подмодуля I , если все определители вида (7) обращаются в нуль в точке λ . Совокупность N всех нулей подмодуля I образует его *нулевое множество*. Нулевое множество N является аналитическим в классическом смысле: для каждой точки $\lambda \in N$ существует открытая окрестность Y этой точки такая, что $N \cap Y$ представляется как нулевое множество конечного числа аналитических функций. Это следует из известного факта нётеровости [47; § 1] любого локального подмодуля (в рассматриваемом случае – подмодуля, порожденного функциями, представленными в виде определителя (7)). В случае $q = 1$ определители (7) совпадают с элементами $u \in I$ и N совпадает с нулевым множеством подмодуля I в прямом смысле.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $\text{rank } I = q$. Для того чтобы локальный подмодуль $I(\lambda)$, порождаемый I в точке λ , был нетривиальным, т.е. $I(\lambda) \neq O^q(\lambda)$, необходимо и достаточно, чтобы λ было нулем подмодуля I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение эквивалентно элементарному утверждению: для того чтобы $I = O^q(\lambda)$, необходимо и достаточно, чтобы λ не было нулем I .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Спектральное множество инвариантного подпространства совпадает с нулевым множеством его аннуляторного подмодуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Λ – спектральное множество инвариантного подпространства W , N – нулевое множество его аннуляторного подмодуля I . Пусть $\lambda \in \Lambda$. Тогда $\text{Sp}_\lambda W \neq \{0\}$. В силу соотношения (4) $\text{Div}_\lambda I \neq \{0\}$. По свойству 7 дивизора отсюда следует, что $I(\lambda) \neq O^q(\lambda)$. По предложению 2.2 заключаем, что $\lambda \in N$. Таким образом, доказано, что $\Lambda \subset N$. Пусть теперь $\lambda \in N$. Согласно предложению 2.2 $I(\lambda) \neq O^q(\lambda)$. По свойству 7 дивизора $\text{Div}_\lambda I \neq \{0\}$. В силу соотношения (4) будет $\text{Sp}_\lambda W \neq \{0\}$, а это означает, что $\lambda \in \Lambda$. Таким образом, доказано, что $N \subset \Lambda$. Из вышеизложенного следует $N = \Lambda$.

6. Квазиспектральное и квазинулевое множества.

Пусть W – инвариантное подпространство в $H = H(\Omega)$, допускающее спектральный синтез; Λ – спектральное множество подпространства W , $\Lambda' \subset \Lambda$. Обозначим W' замыкание в топологии $H(\Omega)$ множества линейных комбинаций $\exp$ - q -многочленов из W с показателями $\lambda \in \Lambda'$. Будем Λ' называть *квазиспектральным множеством* инвариантного подпространства W , если $W' = W$.

Пусть I – обильный подмодуль в P , N – нулевое множество I . Множество $N' \subset N$ называется *квазинулевым множеством* подмодуля I , если выполняется импликация

$$f \in P, \quad f \in I(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda' \implies f \in I.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть I – аннуляторный подмодуль инвариантного подпространства W , допускающего спектральный синтез. Для того чтобы множество Λ' было квазиспектральным множеством подпространства W , необходимо и достаточно, чтобы Λ' было квазинулевым множеством его аннуляторного подмодуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть Λ – спектральное множество W , а N – нулевое множество I . По предложению 2.3 $\Lambda = N$. Пусть Λ' – квазиспектральное множество подпространства W . Ясно, что $\Lambda' \subset N$. Утверждаем, что Λ' – квазинулевое множество I . Пусть $\varphi \in P$ и $\varphi \in I(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda'$. По свойству 8 дивизора включение $\varphi \in I(\lambda)$ эквивалентно включению $\text{Div}_\lambda \varphi \supset \text{Div}_\lambda I$. Таким образом, для $\lambda \in \Lambda'$ и $p \in \text{Div}_\lambda I$ будет $p(D)\varphi|_\lambda = 0$. Пусть S – соответствующий φ функционал. В силу соотношения (5) функционал S обращается в нуль на всех $\exp$ - q -многочленах из W с показателями $\lambda \in \Lambda'$. Поскольку по предположению замыкание линейной оболочки этих $\exp$ - q -многочленов совпадает с W , S аннулирует все W , т.е. $S \in W^0$. Это значит, что $\varphi \in I$.

Достаточность. Пусть Λ' – квазинулевое множество I . Из соотношения $\Lambda = N$ следует, что Λ' – часть спектрального множества Λ . Покажем, что Λ' – квазиспектральное множество. Для этого по теореме Хана–Банаха достаточно доказать следующее: если линейный непрерывный функционал S обращается в нуль на элементарных

хр- q -многочленах из W с показателями $\lambda \in \Lambda'$, то S обращается в нуль на всем W . Пусть S – такой функционал и $p(z) \exp\langle \lambda, z \rangle \in W$, $\lambda \in \Lambda'$. Тогда $\langle S, p(z) \exp\langle \lambda, z \rangle \rangle = 0$. Рассмотрим характеристический элемент φ функционала S . Из соотношения (5) следует, что $p(D)\varphi|_{\lambda} = 0$. При фиксированном $\lambda \in \Lambda'$ это верно для любого $p \in \text{Sp}_{\lambda} W$. Поскольку $\text{Sp}_{\lambda} W = \text{Div}_{\lambda} I$, заключаем, что $\text{Div}_{\lambda} \varphi \supset \text{Div}_{\lambda} I$, $\lambda \in \Lambda'$. В силу свойства 8 (п. 4) дивизора $\varphi \in I(\lambda)$. Это верно для любого $\lambda \in \Lambda'$. Поскольку Λ' – квазинулевое множество I , заключаем, что $\varphi \in I$, или, что то же самое, $S \in W^0$. Иными словами, S аннулирует W . Это и требовалось доказать.

Пусть Λ – квазиспектральное множество инвариантного подпространства W . *Квазиспектром* инвариантного подпространства мы называем дизъюнктное объединение

$$\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \text{Sp}_{\lambda} W.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Пусть инвариантные подпространства W , W' имеют одинаковые квазиспектры с квазиспектральным множеством Λ . Тогда $I(\lambda) = I'(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию

$$\text{Sp}_{\lambda} W = \text{Sp}_{\lambda} W' \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

По предложению 2.1

$$\text{Div}_{\lambda} I(\lambda) = \text{Sp}_{\lambda} W = \text{Sp}_{\lambda} W' = \text{Div}_{\lambda} I'(\lambda). \quad (8)$$

Таким образом, локальные дивизоры подмодулей I и I' совпадают. По свойству 6 дивизоров (п. 4) совпадают и локальные подмодули.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Пусть $\Omega \subset \Omega'$, а W , W' допускают спектральный синтез с одним и тем же квазиспектром. Тогда $I \subset I'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что поскольку W , W' допускают спектральный синтез, их аннуляторные подмодули являются обильными (п. 4). Далее, по условию W и W' имеют один и тот же квазиспектр; следовательно, W , W' обладают одним и тем же спектральным множеством Λ таким, что $\text{Sp}_{\lambda} W = \text{Sp}_{\lambda} W'$, $\lambda \in \Lambda$. В силу предложения 2.5

$$I(\lambda) = I'(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda. \quad (9)$$

Теперь приступим к доказательству включения $I \subset I'$. Пусть $\varphi \in I$. Тогда $\varphi \in I(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$. В силу (9), $\varphi \in I'(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$. Кроме того, включение $\Omega \subset \Omega'$ влечет включение $P \subset P'$; следовательно, $\varphi \in P'$. По предложению 2.4 Λ является квазинулевым множеством для I' . По определению квазинулевого множества условие $\varphi \in P'$ и условие $\varphi \in I'(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$ влекут $\varphi \in I'$. Включение $I \subset I'$ установлено.

§3. Отображения инвариантных подпространств

1. Прямые и дуальные отображения.

Пусть $H = H(\Omega)$, $H' = H(\Omega')$ – пространства, ассоциированные с открытыми q -множествами Ω, Ω' ; W, W' – инвариантные подпространства в H, H' соответственно. Подпространства W, W' наделяются топологиями, индуцированными из пространств H, H' , и рассматриваются как самостоятельные локально-выпуклые пространства. Сопряженное W^* к пространству W изоморфно фактор-пространству H^*/W^0 , наделенному фактор-топологией топологии H^* по W^0 (см. [48; п. 9]); точно так же сопряженное W'^* к пространству W' изоморфно фактор-пространству H'^*/W'^0 , наделенному фактор-топологией H'^* по W'^0 . Пусть P, P' – модули, ассоциированные с Ω, Ω' соответственно; $I = \text{An } W$, $I' = \text{An } W'$. Очевидно, что I, I' – подмодули в P, P' . Рассмотрим фактор-модули $P/I, P'/I'$. Наделим эти фактор-модули соответствующими фактор-топологиями. Изоморфизмы $T: H^* \rightarrow P, T': H'^* \rightarrow P'$ порождают фактор-изоморфизмы

$$\begin{aligned}\widehat{T}: H^*/W^0 &\rightarrow P/I, \\ \widehat{T}': H'^*/W'^0 &\rightarrow P'/I'.\end{aligned}$$

Пусть $u: W \rightarrow W'$ – линейное непрерывное отображение. Сопряженное отображение u^* действует линейно и непрерывно из H'^*/W'^0 в H^*/W^0 . Отображения $\widehat{T}, \widehat{T}'$ позволяют “поднять” отображение u^* до отображения

$$u^\otimes: P'/I' \rightarrow P/I,$$

именно,

$$u^\otimes = \widehat{T} \circ u^* \circ \widehat{T}'^{-1}.$$

Отображение $u^\otimes$ называется *дуальным* по отношению к *прямому* отображению u . Из соображений рефлексивности следует, что для всякого линейного непрерывного отображения $v: P'/I' \rightarrow P/I$ существует единственное прямое отображение $u: W \rightarrow W'$, т.е. такое, что $v = u^\otimes$. Отметим, что если u отображает H в H' , дуальное отображение $u^\otimes$ отображает P' в P . Известно, что W, W' – рефлексивные пространства Фреше. Поэтому для этих пространств справедливы известные утверждения Дьедонне–Шварца [48] о прямых и сопряженных операциях u, u^* ; в этих утверждениях с соответствующей оговоркой можно заменить u^* на $u^\otimes$.

2. Отображения, перестановочные с операторами частного дифференцирования.

Пусть W, W' – инвариантные подпространства в H, H' соответственно; I, I' – аннуляторные подмодули этих подпространств. Линейное отображение $u: W \rightarrow W'$ перестановочно с операторами частного дифференцирования $D_1 = \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, D_n = \frac{\partial}{\partial z_n}$, если $D_1 \circ u = u \circ D_1, \dots, D_n \circ u = u \circ D_n$. Дуальная операция $D_i^\otimes$ к D_i есть операция умножения на i -ю независимую переменную λ_i . Для перестановочности u и D_i необходимо и достаточно перестановочности $u^\otimes$ и $D^\otimes$, т.е.

$$\lambda_i u^\otimes(\Phi') = u^\otimes(\lambda_i \Phi'), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где $\Phi' \in P'/I'$. Стандартным образом соотношение (1) распространяется на многочлены:

$$pi^{\otimes}(\Phi') = u^{\otimes}(p\Phi) \quad \forall p \in \mathbb{C}[\lambda].$$

Таким образом, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Для того чтобы линейное непрерывное отображение $u: W \rightarrow W'$ было перестановочно с операторами частного дифференцирования, необходимо и достаточно, чтобы дуальное отображение $u^{\otimes}: P'/I' \rightarrow P/I$ было непрерывным модульным гомоморфизмом.*

3. Целые элементы.

3.1. Элемент $f = (f_1, \dots, f_q)$ из $H(\Omega)$ называется *целым*, если все компоненты f_i допускают аналитическое продолжение до целых функций. *Сдвигом* f_h целого элемента f на шаг $h \in \mathbb{C}^n$ называется элемент

$$f_h(z) = (f_1(z+h), \dots, f_q(z+h)).$$

Здесь мы используем запись элементов из $H(\Omega)$ в виде вектор-функций в соответствии с соглашением п. 1 § 2. Ясно, что если f – целый элемент, то и его сдвиг f_h – целый элемент. Переход от f к f_h называется *оператором сдвига* и обозначается $T_h(f)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Пусть W – инвариантное подпространство в $H(\Omega)$ и f – целый элемент из W . Тогда сдвиг $T_h(f)$ элемента f на любой шаг $h \in \mathbb{C}^n$ снова принадлежит W .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим сдвиг $T_h(f)$ элемента f в виде ряда Тейлора

$$T_h(f) = \sum \frac{D^\alpha(f)}{\alpha!} h^\alpha. \quad (2)$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, $h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}$. С одной стороны, в силу инвариантности W все производные $D^\alpha f$ принадлежат W вместе с f . С другой стороны, ряд (2) при фиксированном h сходится равномерно на каждом q -компакте в Ω , т.е. в топологии $H(\Omega)$. В силу замкнутости W сумма этого ряда, т.е. $T_h(f)$, принадлежит W .

3.2. Пусть теперь W, W' – инвариантные подпространства в $H(\Omega), H(\Omega')$; $u: W \rightarrow W'$ – линейный непрерывный оператор, перестановочный с операторами частного дифференцирования. Если f – целый элемент из W , то сдвиг $T_h(f)$ – снова целый элемент из W , и поэтому к нему можно применить оператор u , т.е. имеет смысл выражение $u \circ T_h(f)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Для любого целого элемента $f \in W$ элемент $u(f)$ является целым и справедливо соотношение*

$$u \circ T_h(f) = T_h \circ u(f). \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При фиксированном h ряд (2) сходится равномерно в топологии W . Поэтому в силу непрерывности u имеем

$$u \circ T_h(f) = \sum \frac{u(D^\alpha f)}{\alpha!} h^\alpha.$$

Пусть $F = u(f)$. В силу перестановочности оператора u с операторами $D_1, \dots, D_n$ справедливы равенства $u(D^\alpha f) = D^\alpha u(f) = D^\alpha F$. Таким образом,

$$u \circ T_h(f) = \sum \frac{D^\alpha F}{\alpha!} h^\alpha = T_h(F) = T_h \circ u(f).$$

Соотношение (3) установлено.

По ходу доказательства установлено, что при любом фиксированном h ряд

$$\sum \frac{D^\alpha F}{\alpha!} h^\alpha$$

сходится равномерно на каждом q -компакте в Ω . Сумма этого ряда определяет аналитическое продолжение $F = u(f)$ до целого элемента.

4. Преобразование элементарных $\exp$ - q -многочленов.

Пусть $u: W \rightarrow W'$ – линейное непрерывное отображение, перестановочное с операторами частного дифференцирования.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть e – элементарный $\exp$ - q -многочлен в W с показателем $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ и степенями $m_1, \dots, m_n$ по переменным $z_1, \dots, z_n$ соответственно. Тогда образ $e' = u(e)$ – элементарный $\exp$ - q -многочлен с тем же показателем μ и степенями, не превосходящими $m_1, \dots, m_n$ соответственно по переменным $z_1, \dots, z_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя перестановочность D_i и u , имеем

$$(D_i - \mu_i E)^{m_i+1} e' = (D_i - \mu_i E)^{m_i+1} u(e) = u((D_i - \mu_i E)^{m_i+1} e) = u(0) = 0.$$

Здесь используется соотношение $(D_i - \mu_i E)^{m_i+1} e = 0$, проистекающее из того, что степень $\exp$ - q -многочлена e по z_i равна m_i . Это верно для любого $i = 1, \dots, n$. Таким образом, элемент e' удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$(D_1 - \mu_1 E)^{m_1+1} e' = 0, \dots, (D_n - \mu_n E)^{m_n+1} e' = 0. \quad (4)$$

Согласно предложению 3.3 e' – целый элемент. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что всякое целое решение системы уравнений (4) представляет собою элементарный $\exp$ - q -многочлен с показателем μ и степенями по переменным $z_1, \dots, z_n$, не превосходящими $m_1, \dots, m_n$ соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть $u: W \rightarrow W'$ – линейное непрерывное отображение, $u^{\otimes}: P'/I' \rightarrow P/I$ – дуальное отображение, $e(z) = p(z) \exp\langle \lambda, z \rangle$, $e'(z) = p'(z) \exp\langle \mu, z \rangle$ – элементарные $\exp$ - q -многочлены, содержащиеся соответственно в W и W' . Для того чтобы $e' = u(e)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого класса смежности $\Phi' \in P'/I'$ и его образа $\Phi = u^{\otimes}(\Phi') \in P/I$ выполнялось соотношение

$$p(D)\Phi|_{\lambda} = p'(D)\Phi'|_{\mu}. \quad (5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Соотношение (5) следует понимать в следующем смысле: для любых $\varphi \in \Phi$ и $\varphi' \in \Phi'$ выполняется соотношение

$$p(D)\varphi|_{\lambda} = p'(D)\varphi'|_{\mu}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть $e' = u(e)$. Сопряженное отображение $u^*: H'^*/W'^0 \rightarrow H^*/W^0$ переводит класс смежности $S' \in H'^*/W'^0$, содержащий функционал s' , в класс смежности $S \in H^*/W^0$, содержащий функционал s ; при этом

$$\langle s, f \rangle = \langle s', u(f) \rangle \quad \forall f \in W.$$

Полагая в этом соотношении $f = e$, получим

$$\langle s, e \rangle = \langle s', e' \rangle,$$

или, что то же самое,

$$\langle s, p(z) \exp\langle \lambda, z \rangle \rangle = \langle s', p'(z) \exp\langle \mu, z \rangle \rangle. \quad (7)$$

Это соотношение верно для любых функционалов $s \in S$, $s' \in S'$, где $S = u^*(S')$. Пусть φ, φ' – характеристические элементы s, s' соответственно. По определению дуального отображения $u^*: P'/I' \rightarrow P/I$ оно переводит класс смежности $\Phi' \in P'/I'$, содержащий элемент φ' , в класс смежности $\Phi \in P/I$, содержащий элемент φ ; при этом соответствующие функционалы s и s' связаны соотношением (7). В силу формулы (5) §2 соотношение (7) можно записать в терминах характеристических элементов в виде (6), где $\varphi \in \Phi$, $\varphi' \in \Phi'$ и $\Phi = u^*(\Phi')$.

Достаточность. Пусть $\Phi = u^*(\Phi')$ и выполняется соотношение (5). Это означает, что для любых представителей соответствующих классов выполняется соотношение (6). В терминах соответствующих функционалов s, s' соотношение (6) переписывается в виде

$$\langle s, e \rangle = \langle s', e' \rangle. \quad (8)$$

Здесь s – любой представитель класса смежности $S \in H^*/W^0$, s' – любой представитель класса $S' \in H'^*/W'^0$, причем $S = u^*(S')$. Соотношение (8) можно записать в эквивалентной форме

$$\langle S, e \rangle = \langle S', e' \rangle.$$

Отсюда следует

$$\langle S', e' \rangle = \langle u^*(S'), e \rangle = \langle S', u(e) \rangle.$$

Итак, $\langle S', e' - u(e) \rangle = 0$. Это верно для любого линейного непрерывного функционала S' на W' . По теореме Хана–Банаха $e' - u(e) = 0$.

5. Специальное свойство отображений, перестановочных с операторами дифференцирования.

Пусть W, W' – инвариантные подпространства в $H = H(\Omega)$, $H' = H(\Omega')$, причем W допускает спектральный синтез; $u: W \rightarrow W'$ – линейное непрерывное отображение, перестановочное с операторами дифференцирования. Напомним, что для q -множества Ω и множества $A \subset \mathbb{C}^n$ символ $\Omega + A$ обозначает арифметическую сумму Ω и A (см. §2, п. 1). Обозначим W_A (соответственно W'_A) инвариантное подпространство в $H(\Omega + A)$ (соответственно в $H(\Omega' + A)$), допускающее спектральный синтез с тем же спектром, что и W (соответственно W').

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Для произвольного множества $A \subset \mathbb{C}^n$ существует линейное непрерывное отображение $v: W_A \rightarrow W'_A$ со свойствами:

- 1) v перестановочно с операторами частного дифференцирования;
- 2) для любого полинома Дирихле $e \in W$ выполняется соотношение $v(e) = u(e)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E – множество всех полиномов Дирихле из W . Очевидно, E – линейное подпространство пространства W_A , плотное в нем. Наметим план рассуждений. Мы определим оператор $v_0: E \rightarrow W'_A$; покажем, что этот оператор непрерывен в топологии, индуцируемой в E из W_A ; затем, пользуясь тем, что E плотно в W_A , расширим v_0 до оператора v , действующего на всем W_A . Приступим к осуществлению этого плана.

Рассмотрим оператор v_0 , который каждому полиному Дирихле $e \in E$ ставит в соответствие элемент $e' = u(e)$. Согласно предложению 3.4, e' – полином Дирихле. Поскольку u отображает E в W' , e' принадлежит W' ; более того, $e' \in W'_A$, ибо W'_A содержит все полиномы Дирихле из W' . Ясно, что v_0 линейно отображает E в W'_A . Отображение v_0 перестановочно с операторами частного дифференцирования. Действительно, используя инвариантность E и перестановочность u с операторами $D_1, \dots, D_n$, имеем

$$D_i \circ v_0(e) = D_i \circ u(e) = u \circ D_i(e) = v_0 \circ D_i(e).$$

Наделим E топологией, индуцированной из $H(\Omega + A)$, и покажем, что отображение $v_0: E \rightarrow W'_A$ является непрерывным. Пусть K – компакт в $\mathbb{C}^n$. Обозначим $H(K)$ банахово пространство функций, голоморфных внутри K и непрерывных вплоть до границы K . Обозначим

$$B(K) = \{f \in H(K) : \max_K |f| \leq 1\}$$

единичный шар в $H(K)$. Для q -компакта $\mathcal{K} = (K_1, \dots, K_q)$ введем топологическое произведение $H(\mathcal{K}) := H(K_1) \times \dots \times H(K_q)$. Это произведение есть банахово пространство с единичным шаром

$$B(\mathcal{K}) = B(K_1) \times \dots \times B(K_q).$$

Семейства множеств

$$\begin{aligned} \{\varepsilon B(\mathcal{K}) \cap W_A\}, \quad \mathcal{K} \in \Omega + A, \quad \varepsilon > 0, \\ \{\varepsilon B(\mathcal{K}') \cap W'_A\}, \quad \mathcal{K}' \in \Omega' + A, \quad \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

образуют фундаментальные системы окрестностей нуля в W_A и W'_A соответственно. Ввиду такого описания топологий рассматриваемых пространств достаточно доказать следующее утверждение: для каждого q -компакта $\mathcal{K}' \in \Omega' + A$ и каждого $\varepsilon > 0$ существуют q -компакт $\mathcal{K} \subset \Omega + A$ и $\delta > 0$ такие, что

$$u(E \cap \delta B(\mathcal{K})) \subset \varepsilon B(\mathcal{K}').$$

Очевидно, что q -компакт $\mathcal{K}'$ покрывается системой открытых q -множеств вида $\Omega' + a$, $a \in A$; в свою очередь Ω' покрывается системой открытых q -множеств $D' \in \Omega'$.

Отсюда следует, что q -компакт $\mathcal{K}'$ покрывается конечным набором q -множеств вида $D'_j + a_j$, $j = 1, \dots, N$, где D'_j — q -компакты в Ω' , $a_j \in A$. Таким образом,

$$\mathcal{K}' \subset \bigcup_{j=1}^N (D'_j + a_j).$$

Это влечет включение

$$\bigcap_{j=1}^N B(D'_j + a_j) \subset B(\mathcal{K}').$$

В силу непрерывности отображения $u: W \rightarrow W'$ существуют q -компакты $D_j \subset \Omega$, $j = 1, \dots, N$, и $\delta > 0$ такие, что

$$u(\delta B(D_j) \cap W) \subset \varepsilon B(D'_j). \quad (9)$$

Полагаем

$$\mathcal{K} = \bigcup_{j=1}^N (D_j + a_j).$$

Пусть $e \in E$ и $e' = u(e)$. Докажем импликацию

$$e \in \delta B(\mathcal{K}) \implies e' \in \varepsilon B(\mathcal{K}'). \quad (10)$$

Включение $e \in \delta B(\mathcal{K})$ равносильно N включениям

$$e \in \delta B(D_j + a_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (11)$$

Рассмотрим сдвиги $e_j = T_{a_j}(e)$. Включения (11) равносильны включениям

$$e_j \in \delta B(D_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (12)$$

Положим $e'_j = u(e_j)$, $j = 1, \dots, N$. Включения (12) и (9) влекут

$$e'_j \in \varepsilon B(D'_j), \quad j = 1, \dots, N.$$

Но согласно предложению 3.3

$$e'_j = u(T_{a_j}(e)) = T_{a_j}(u(e)) = T_{a_j}(e').$$

Из вышеизложенного следует, что

$$T_{a_j}(e') \in \varepsilon B(D'_j), \quad j = 1, \dots, N.$$

Эти включения можем записать в равносильной форме

$$e' \in \varepsilon B(D'_j + a_j), \quad j = 1, \dots, N.$$

Это означает, что

$$e' \in \varepsilon \bigcap_{j=1}^N B(D'_j + a_j) \subset \varepsilon B(\mathcal{K}').$$

Импликация (10) доказана. Тем самым установлено, что отображение v_0 действует непрерывно из E в W'_A . Поскольку E плотно в W_A , а W'_A полно, отображение v_0 по непрерывности распространяется на все W_A . Это расширение v будет линейным. В силу бочечности W_A [45; гл. XI] оно будет непрерывным; при этом образ расширенного отображения будет по-прежнему лежать в W'_A . Построенное отображение $v: W_A \rightarrow W'_A$ удовлетворяет всем требованиям: оно непрерывно; перестановочно с операторами частного дифференцирования, ибо таким свойством обладает его сужение v_0 на подпространство E , плотное в W_A ; в силу построения выполняется соотношение $v(e) = u(e)$ для любого $e \in E$.

§ 4. Θ -выпуклость

1. Определение.

Пространство $\mathbb{C}^n$ n -мерных комплексных векторов мы отождествляем с евклидовым пространством $\mathbb{R}^{2n}$ вещественных $2n$ -мерных векторов с помощью изоморфизма

$$\alpha: z = (z_1, \dots, z_n) \rightarrow w = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n),$$

где $x_i = \operatorname{Re} z_i$, $y_i = \operatorname{Im} z_i$. Скалярное произведение (z', z'') в $\mathbb{C}^n$ вводится по правилу

$$(z', z'') = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n z'_j \overline{z''_j} = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n (x'_j + iy'_j)(x''_j - iy''_j) = \sum_{j=1}^n (x'_j x''_j + y'_j y''_j) = (w', w'').$$

Вместе со скалярным произведением в $\mathbb{C}^n$ вводятся геометрические понятия расстояния, ортогональности, выпуклости, выпуклой оболочки и т. д. Расстояние $|z|$ точки z от начала координат вычисляется по формуле

$$|z|^2 = (z, z) = \sum_{j=1}^n (x_j^2 + y_j^2) = |w|^2.$$

Пусть $S^{2n-1} = \{\tau \in \mathbb{C}^n : |\tau| = 1\}$ – единичная сфера в $\mathbb{C}^n$. Каждый элемент τ единичной сферы задает луч $t\tau$, $t > 0$, уходящий в бесконечность в направлении τ . Поэтому элементы единичной сферы удобно называть *направлениями*. τ -гиперплоскость в $\mathbb{C}^n$, находящаяся на “расстоянии” p от начала (“расстояние” снабжено знаком), задается уравнением

$$(z, \tau) = p,$$

где $p \in \mathbb{R}^n$. Эта гиперплоскость является общей границей двух полупространств: замкнутого полупространства

$$\Pi(\tau, p) = \{z \in \mathbb{C}^n : (z, \tau) \leq p\} \quad (1)$$

и открытого полупространства

$$\Pi^0(\tau, p) = \{z \in \mathbb{C}^n : (z, \tau) < p\}. \quad (2)$$

Полупространства вида (1), (2) будем называть τ -полупространствами. Условимся, что при $p = -\infty$ любое τ -полупространство пусто, а при $p = \infty$ совпадает с $\mathbb{C}^n$.

Напомним, что множество M в $\mathbb{C}^n$ называется *выпуклым*, если вместе с двумя точками z_1, z_2 оно содержит отрезок $[z_1, z_2]$. Выпуклое замкнутое множество представляется как пересечение замкнутых полупространств [49; § 11, теорема 11.5]; открытое выпуклое множество – как пересечение открытых полупространств [49; § 11, теорема 11.3].

Пусть Θ – некоторое множество направлений на сфере S^{2n-1} . Множество $L \subset \mathbb{C}^n$ называется Θ -*выпуклым*, если оно представляется как пересечение некоторого семейства τ -полупространств, $\tau \in \Theta$. Если $\Theta' \subset \Theta''$, то согласно определению всякое Θ' -выпуклое множество является и Θ'' -выпуклым. Пересечение любого семейства Θ -выпуклых множеств является Θ -выпуклым. Поэтому для любого множества

$L \subset \mathbb{C}^n$ существует наименьшее Θ -выпуклое множество, его содержащее, – пересечение всех Θ -выпуклых множеств, содержащих L . Это множество называется Θ -*выпуклой оболочкой* множества L и обозначается $\text{conv}_\Theta L$. Очевидно, что $\text{conv}_\Theta L \subset \text{conv}_\Theta L'$ при $L \subset L'$. Далее, Θ -выпуклую оболочку открытого множества можно представить как пересечение *всех* открытых τ -полупространств, его содержащих, а Θ -выпуклую оболочку компакта – как пересечение *всех* замкнутых полупространств, его содержащих ($\tau \in \Theta$). Из последнего утверждения, в частности, следует, что Θ -выпуклая оболочка компакта – замкнутое множество. Отметим, что если $\Theta = S^{2n-1}$, а L – либо компакт, либо открытое множество, то Θ -выпуклая оболочка множества L совпадает с его выпуклой оболочкой. Насколько нам известно, понятие плоского Θ -выпуклого множества было впервые введено в 1973 г. в работе [35]. Замкнутые Θ -выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$ (под названием H -выпуклых) были введены В. Г. Болтянским (см. [50], [51]) в 1976 г. в связи с теоремой Хелли [52]. Свойства замкнутых Θ -выпуклых множеств исследованы в книгах [53], [54].

2. Элементарные свойства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть Θ – замкнутое множество направлений, G – открытое множество. Тогда Θ -выпуклая оболочка множества G – открытое множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z_0 \in \text{conv}_\Theta G$. Нужно показать, что z_0 – внутренняя точка $\text{conv}_\Theta G$, т.е. существует шар положительного радиуса с центром в z_0 , содержащийся в $\text{conv}_\Theta G$. Для этого достаточно показать, что существует положительное число $\delta > 0$ такое, что расстояние $d(\tau, p)$ точки z_0 до границы открытого полупространства $\Pi^0(\tau, p)$, $\tau \in \Theta$, содержащего G , не менее δ . Предположим противное, т.е. существует последовательность открытых полупространств $\Pi^0(\tau_n, p_n)$, $\tau_n \in \Theta$, содержащих G , такая, что $d(\tau_n, p_n) \rightarrow 0$. Заметим, что $d(\tau_n, p_n) = p_n - (z_0, \tau_n)$. Таким образом, согласно предположению

$$p_n - (z_0, \tau_n) \rightarrow 0. \quad (3)$$

Последовательность чисел (z_0, τ_n) ограничена, так как $|(z_0, \tau_n)| \leq |z_0|$.

Из (3) следует, что и последовательность p_n , $n = 1, 2, \dots$, ограничена. Поэтому существует подпоследовательность $\mathbb{N}'$ натурального ряда такая, что $p_n \rightarrow p_0$, $\tau_n \rightarrow \tau_0$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathbb{N}'$. В силу замкнутости Θ будет $\tau_0 \in \Theta$. Совершая в (3) предельный переход, получим

$$(z_0, \tau_0) = p_0. \quad (4)$$

Далее, так как $G \subset \Pi^0(\tau_n, p_n)$, то для любой точки $z \in G$ имеем

$$(z, \tau_n) < p_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Совершая предельный переход, получим

$$(z, \tau_0) \leq p_0.$$

Это неравенство справедливо для любой точки $z \in G$. Поскольку образ G при отображении $z \rightarrow (z, \tau_0)$ открыт, в действительности будет выполняться строгое неравенство

$$(z, \tau_0) < p_0 \quad \forall z \in G.$$

Это неравенство означает, что открытое полупространство $\Pi^0(\tau_0, p_0)$ содержит G . С другой стороны, равенство (4) означает, что точка z_0 принадлежит границе открытого τ_0 -полупространства $\Pi^0(\tau_0, p_0)$, $\tau_0 \in \Theta$, содержащего G , и, значит, не может принадлежать G . Это противоречие заставляет признать, что существует положительное δ такое, что $d(\tau, p) \geq \delta$ для всякого полупространства $\Pi^0(\tau, p)$, содержащего G . Тем самым, предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть Ω – ограниченное открытое множество, $\overline{\Omega}$ – замыкание Ω . Тогда

$$\overline{\text{conv}_\Theta \Omega} = \text{conv}_\Theta \overline{\Omega}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\Omega \subset \overline{\Omega}$,

$$\text{conv}_\Theta \Omega \subset \text{conv}_\Theta \overline{\Omega}.$$

В силу ограниченности Ω множество $\overline{\Omega}$ является компактом, и, следовательно, $\text{conv}_\Theta \overline{\Omega}$ замкнуто (см. п. 1). После операции замыкания получим

$$\overline{\text{conv}_\Theta \Omega} \subset \text{conv}_\Theta \overline{\Omega}. \quad (6)$$

Теперь будем доказывать обратное включение. Множества Ω и $\overline{\Omega}$ имеют одну и ту же опорную функцию (в смысле вещественного анализа)

$$H_\Omega^{(r)}(z) = H_{\overline{\Omega}}^{(r)}(z) = \sup_{\zeta \in \Omega} (\zeta, z).$$

Множество $\text{conv}_\Theta \overline{\Omega}$ представляется как пересечение всех замкнутых τ -полупространств, $\tau \in \Theta$, содержащих $\overline{\Omega}$, а $\text{conv}_\Theta \Omega$ – как пересечение всех открытых τ -полупространств, $\tau \in \Theta$, содержащих Ω . Это позволяет представить Θ -выпуклые оболочки множеств $\overline{\Omega}$ и Ω в виде

$$\text{conv}_\Theta \overline{\Omega} = \{z : (z, \tau) \leq H^{(r)}(\tau) \ \forall \tau \in \Theta\}, \quad (7)$$

$$\text{conv}_\Theta \Omega = \{z : (z, \tau) < H^{(r)}(\tau) \ \forall \tau \in \Theta\}. \quad (8)$$

Пусть $z_0 \in \text{conv}_\Theta \overline{\Omega}$. Согласно (7) это значит, что

$$(z_0, \tau) \leq H^{(r)}(\tau) \ \forall \tau \in \Theta. \quad (9)$$

Фиксируем точку $z'_0 \in \Omega$, отличную от z_0 . Согласно (8) имеем

$$(z'_0, \tau) < H^{(r)}(\tau) \ \forall \tau \in \Theta. \quad (10)$$

Рассмотрим интервал (z'_0, z_0) . Этот интервал не пуст, так как $z'_0 \neq z_0$. Утверждаем, что каждая точка этого интервала принадлежит $\text{conv}_\Theta \Omega$. Пусть $z \in (z'_0, z_0)$. Тогда z представляется в виде $z = \alpha z'_0 + \beta z_0$, где $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$. Отсюда для любого направления $\tau \in \Theta$ имеем $(z, \tau) = \alpha(z'_0, \tau) + \beta(z_0, \tau)$. Поскольку $\alpha > 0$ и для точек z'_0, z_0 выполняются неравенства (9), (10), получаем неравенство

$$(z, \tau) < H^{(r)}(\tau).$$

Это верно для любого направления $\tau \in \Theta$. Согласно (8) заключаем, что $z \in \text{conv}_\Theta \Omega$. Таким образом, мы показали, что $(z'_0, z_0) \subset \text{conv}_\Theta \Omega$. Но любая окрестность z_0 пересекается с (z'_0, z_0) . Значит, z_0 есть точка прикосновения для $\text{conv}_\Theta \Omega$, т.е. $z_0 \in \overline{\text{conv}_\Theta \Omega}$. Это верно для любой точки $z_0 \in \text{conv}_\Theta \overline{\Omega}$. Значит, имеет место включение

$$\text{conv}_\Theta \overline{\Omega} \subset \overline{\text{conv}_\Theta \Omega}.$$

Тем самым, соотношение (5) установлено.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть Θ – множество направлений, $\overline{\Theta}$ – замыкание Θ . Тогда для любого компакта D справедливо соотношение

$$\text{conv}_{\overline{\Theta}} D = \text{conv}_{\Theta} D.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\Theta \subset \overline{\Theta}$, то семейство τ -полупространств, $\tau \in \overline{\Theta}$, содержащих D , шире семейства τ -полупространств, $\tau \in \Theta$, содержащих D . Поэтому

$$\text{conv}_{\overline{\Theta}} D \subset \text{conv}_{\Theta} D.$$

Докажем обратное включение. Пусть $x \notin \text{conv}_{\overline{\Theta}} D$. Тогда существует замкнутое τ_0 -полупространство $\Pi(\tau_0, p)$, $\tau_0 \in \overline{\Theta}$, такое, что $D \subset \Pi(\tau_0, p)$, но $x \notin \Pi(\tau_0, p)$. Путем малого “шевеления” p можно добиться того, что $D \subset \text{Int } \Pi(\tau_0, p)$, но по-прежнему $x \notin \Pi(\tau_0, p)$. Далее, существует последовательность направлений $\tau_n \rightarrow \tau_0$, $\tau_n \in \Theta$. Последовательность полупространств $\Pi(\tau_n, p)$ будет сходиться к полупространству $\Pi(\tau_0, p)$, и в силу того, что D компактно принадлежит $\Pi(\tau_0, p)$, найдется достаточно большое n такое, что $\Pi(\tau_n, p)$ содержит D , но не содержит x . Это означает, что $x \notin \text{conv}_{\Theta} D$. Таким образом, справедлива импликация

$$x \notin \text{conv}_{\overline{\Theta}} D \implies x \notin \text{conv}_{\Theta} D.$$

Эта импликация равносильна тому, что

$$\text{conv}_{\Theta} D \subset \text{conv}_{\overline{\Theta}} D.$$

Предложение доказано.

Интересно отметить, что аналогичное утверждение для открытых множеств не верно. В качестве примера рассмотрим открытый шар B единичного радиуса с центром в начале координат. В качестве Θ возьмем $S^{2n-1} \setminus \tau_0$, где τ_0 – точка S^{2n-1} . Замыкание $\overline{\Theta}$ множества Θ совпадает с S^{2n-1} . Однако $\text{conv}_{\Theta} B = B \cup \{\tau_0\}$, а $\text{conv}_{\overline{\Theta}} B = \text{conv}_{S^{2n-1}} B = B$.

3. Пределный переход.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть G – открытое множество, Θ – замкнутое множество направлений, $K_1 \Subset K_2 \Subset \dots$ – возрастающая последовательность компактов, исчерпывающая G . Тогда

$$\text{conv}_{\Theta} G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}_{\Theta} K_n. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $K_n \subset G$, то

$$\text{conv}_\Theta K_n \subset \text{conv}_\Theta G$$

и потому

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}_\Theta K_n \subset \text{conv}_\Theta G. \quad (12)$$

Докажем обратное включение. Если $\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}_\Theta K_n = \mathbb{C}^n$, то из (12) следует (11) и предложение доказано. Поэтому предположим, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}_\Theta K_n \neq \mathbb{C}^n$. Пусть $z^0 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}_\Theta K_n$. Тогда $z^0 \notin \text{conv}_\Theta K_n$ при любом $n = 1, 2, \dots$. Это значит, что для любого n существует замкнутое полупространство $\Pi(\tau_n, p_n)$, $\tau_n \in \Theta$, содержащее K_n , но не содержащее z^0 , т.е.

$$(z, \tau_n) \leq p_n, \quad \forall z \in K_n, \quad (13)$$

$$(z^0, \tau_n) > p_n. \quad (14)$$

Утверждаем, что последовательность p_n , $n = 1, 2, \dots$, является ограниченной. Ограниченность сверху следует из неравенства

$$p_n < (z_0, \tau_n) \leq |z^0|.$$

Ограниченность снизу следует из следующего соображения: фиксируем точку $z_0 \in G$; при достаточно больших n (скажем, $n > n_0$) $z_0 \in K_n$, тем более, $z_0 \in \Pi(\tau_n, p_n)$, и, значит, $(z_0, \tau_n) \leq p_n$; отсюда следует, что $p_n \geq -(z_0, \tau_n) \geq -|z_0|$. Пользуясь тем, что Θ замкнуто и, следовательно, компактно на сфере S^{2n-1} , а последовательность p_n ограничена, выделим подпоследовательность $\mathbb{N}'$ натурального ряда такую, что при $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathbb{N}'$, будет $\tau_n \rightarrow \tau_0$, $\tau_0 \in \Theta$, и $p_n \rightarrow p_0$. Совершая предельный переход в соотношениях (13), (14), получим

$$(z, \tau_0) \leq p_0 \quad \forall z \in G, \quad (15)$$

$$(z^0, \tau_0) \geq p_0. \quad (16)$$

Неравенство (15) справедливо при любом $z \in G$. Поскольку образ G при отображении $z \rightarrow (z, \tau_0)$ открыт, в действительности для каждого $z \in G$ будет выполняться неравенство

$$(z, \tau_0) < p. \quad (17)$$

Неравенства (16) и (17) равносильны тому, что открытое полупространство $\Pi^0(\tau_0, p_0)$ содержит G , но не содержит z^0 . С другой стороны, как подчеркивалось выше (п. 1), $\text{conv}_\Theta G$ представляется в виде пересечения всех открытых τ -полупространств, $\tau \in \Theta$, содержащих G . Следовательно, $z^0 \notin \text{conv}_\Theta G$. Таким образом,

$$z \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}_\Theta K_n \implies z \notin \text{conv}_\Theta G.$$

Это означает, что $\text{conv}_\Theta G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}_\Theta K_n$. Тем самым, соотношение (11) установлено.

Отметим, что в завуалированной форме доказанное утверждение содержится в статье К. Кисельмана [38; предложение 3.2].

4. Об опорных функциях компактов.

Для неограниченного множества $Z \subset \mathbb{C}^n$ обозначим Θ_Z множество предельных направлений этого множества, т.е. множество точек τ на единичной сфере $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$, для которых существуют последовательности точек $z_n \in Z$ таких, что $z_n/|z_n| \rightarrow \tau$. Множество предельных направлений любого неограниченного множества Z является замкнутым. Если Z ограничено, то полагаем $\Theta_Z = \emptyset$.

Пусть K – компакт в $\mathbb{C}^n$. Функция

$$H^{(r)}(\lambda) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} (z, \lambda) = \sup_{z \in K} \operatorname{Re}(z, \bar{\lambda})$$

называется *опорной функцией* компакта K в смысле вещественного анализа. Эта функция связана с соответствующей опорной функцией в смысле комплексного анализа (§ 1, п. 4) соотношением

$$H_K^{(r)}(\lambda) = H_K(\bar{\lambda}),$$

где $\lambda = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n)$ – вектор, комплексно сопряженный $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. Пусть G – открытое множество, M – неограниченное множество в $\mathbb{C}^n$, Θ – множество предельных направлений этого множества. Тогда для любого компакта $K' \subset \operatorname{conv}_\Theta G$ существуют компакт $K \subset G$ и константы $\varepsilon > 0$, $c < \infty$ такие, что

$$H_{K'}^{(r)}(z) \leq H_K^{(r)}(z) - \varepsilon|z| + c \quad (18)$$

при $z \in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим возрастающую последовательность компактов

$$D_1 \Subset D_2 \Subset \dots,$$

исчерпывающую G . Согласно предложению 4.4

$$\operatorname{conv}_\Theta G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{conv}_\Theta D_n. \quad (19)$$

По условию $D_{n-1} \subset \operatorname{Int} D_n$, следовательно,

$$\operatorname{conv}_\Theta D_{n-1} \subset \operatorname{conv}_\Theta \operatorname{Int} D_n \subset \operatorname{conv}_\Theta D_n.$$

В силу этих включений и (19) $\operatorname{conv}_\Theta G$ представляется в виде объединения последовательности множеств $\operatorname{conv}_\Theta \operatorname{Int} D_n$; при этом по предложению 4.1 множества $\operatorname{conv}_\Theta \operatorname{Int} D_n$ открыты. Фиксируем компакт $K' \subset \operatorname{conv}_\Theta G$. Возрастающая последовательность открытых множеств $\operatorname{conv}_\Theta \operatorname{Int} D_n$ покрывает K' . Поэтому найдется номер n_0 такой, что $K' \subset \operatorname{conv}_\Theta \operatorname{Int} D_{n_0}$. Из этого включения следует, что

$H_{K'}^{(r)}(\tau) \leq H_{D_{n_0}}^{(r)}(\tau)$, $\tau \in \Theta$. Далее, поскольку $D_{n_0} \Subset D_{n_0+1}$, найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$H_{D_{n_0}}^{(r)}(\tau) \leq H_{D_{n_0+1}}^{(r)}(\tau) - 2\varepsilon.$$

Таким образом,

$$H_{K'}^{(r)}(\tau) \leq H_{D_{n_0+1}}^{(r)}(\tau) - 2\varepsilon, \quad \tau \in \Theta. \quad (20)$$

Положим $K = D_{n_0+1}$ и покажем, что при таком выборе K будет иметь место (18). Запишем неравенство (20) в виде

$$H_{K'}^{(r)}(\tau') \leq H_K^{(r)}(\tau') - 2\varepsilon, \quad \tau' \in \Theta. \quad (21)$$

Пусть $z = \tau|z| \in M$, где τ – точка на единичной сфере. Сопоставим точке τ одну из ближайших к ней точек $\tau' \in \Theta$. Это можно сделать, так как Θ – компакт на единичной сфере. Используя неравенство (21), имеем

$$\begin{aligned} H_{K'}^{(r)}(z) &= |z|H_{K'}^{(r)}(\tau) = |z|(H_{K'}^{(r)}(\tau) - H_{K'}^{(r)}(\tau')) + |z|H_{K'}^{(r)}(\tau') \\ &\leq |z|(H_{K'}^{(r)}(\tau) - H_{K'}^{(r)}(\tau')) + |z|(H_K^{(r)}(\tau') - H_K^{(r)}(\tau)) + |z|H_K^{(r)}(\tau) - 2\varepsilon|z|. \end{aligned}$$

При $z \rightarrow \infty$, $z \in M$, справедливо соотношение $\tau - \tau' = o(1)$ и, следовательно, в силу равномерной непрерывности $H_K^{(r)}$ и $H_{K'}^{(r)}$ на единичной сфере $H_{K'}^{(r)}(\tau) - H_{K'}^{(r)}(\tau') = o(1)$, $H_K^{(r)}(\tau') - H_K^{(r)}(\tau) = o(1)$. Таким образом, при $z \rightarrow \infty$, $z \in M$, и достаточно большом C имеем

$$H_{K'}^{(r)}(z) \leq o(|z|) - 2\varepsilon|z| + |z|H_K^{(r)}(\tau) \leq c + \varepsilon|z| + H_K^{(r)}(z).$$

Предложение доказано.

§ 5. Нестандартная выпуклость

Возможность аналитического продолжения элементов из инвариантных подпространств связана со специальным свойством (A, B) -выпуклости q -областей существования этих элементов. Это свойство является частным случаем более общей выпуклости, описанной в книге Л. Данцера, Б. Грюнбаума и В. Кли [52; §9].

1. Геометрическая разность q -множеств.

Пусть $K = (K_1, \dots, K_q)$ – q -множество, $A \subset \mathbb{C}^n$. Напомним, что q -множество $K + A := (K_1 + A, \dots, K_q + A)$ называется *арифметической суммой* q -множества K и множества $A \subset \mathbb{C}^n$. В частности, если $a \in \mathbb{C}^n$, то $K + a := (K_1 + a, \dots, K_q + a)$ – сдвиг q -множества на вектор a . Пусть K, K' – q -множества. Множество $K' \ominus K := \{a \in \mathbb{C}^n : K + a \subset K'\}$ называется геометрической разностью множеств K' и K . Очевидно, $K' \ominus K \subset \mathbb{C}^n$ и $K + (K' \ominus K) \subset K'$.

В том случае, когда никакой сдвиг $K + a$ не содержится в K' , геометрическая разность $K' \ominus K$ представляет собою пустое множество. Нам понадобятся следующие свойства геометрической разности.

Свойство 1. Пусть Ω – открытое q -множество, A – q -компакт. Тогда $\Omega \ominus A$ – открытое множество.

Доказательство элементарно.

Пусть $M = (M_1, \dots, M_q)$ – q -множество. Замыканием M , в обозначении $\overline{M}$, называется q -множество $(\overline{M_1}, \dots, \overline{M_q})$, где $\overline{M_i}$ – замыкание M_i в $\mathbb{C}^n$.

Свойство 2. Пусть Ω – открытое q -множество, A – q -компакт, B – q -множество. Тогда $(\Omega \ominus A) + B = (\Omega \ominus A) + \overline{B}$.

Доказательство элементарно.

Свойство 3. Пусть

$$D_1 \supset D_2 \supset \dots \quad (1)$$

– убывающая последовательность q -компактов, сходящаяся к q -компакту

$$D = \bigcap D_n,$$

G – открытое q -множество.

Тогда $G \ominus D = \bigcup (G \ominus D_n)$.

Доказательство использует вспомогательное утверждение.

ЛЕММА. Пусть q -компакт D есть предел убывающей последовательности q -компактов (1). Тогда для любого открытого q -множества $V \supset D$ существует номер n_0 такой, что $D_n \subset V$ при $n \geq n_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение следует очевидным образом из аналогичного утверждения для компактов в $\mathbb{C}^n$, а последнее следует из известного свойства компактов в топологических пространствах [55; следствие 3.1.5].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СВОЙСТВА 3. Установим включение

$$G \ominus D \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (G \ominus D_n). \quad (2)$$

Пусть $x \in G \ominus D$, т.е. $x + D \subset G$. По условию q -компакт $x + D$ представляется в виде предела убывающей последовательности q -компактов $x + D_1 \supset x + D_2 \supset \dots$. По лемме существует номер n_0 такой, что $x + D_n \subset G$ при $n \geq n_0$, или, что то же самое, $x \in G \ominus D_n$. Тем самым включение (2) установлено. Обратное включение следует из включений $G \ominus D_n \subset G \ominus D$, проистекающих из включений $D \subset D_n$, $n = 1, 2, \dots$. В заключение этого пункта отметим, что понятие геометрической разности для выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$ было введено Л. С. Понтрягиным [56].

2. (A, B) -выпуклость.

Пусть A , B , Ω – q -множества. Множество Ω называется (A, B) -выпуклым, если справедлива импликация

$$c \in \mathbb{C}^n, \quad A + c \subset \Omega \implies B + c \subset \Omega.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Это определение подразумевает, что множество, не содержащее ни одного сдвига множества A , является (A, B) -выпуклым.

Перечисленные ниже свойства (A, B) -выпуклости достаточно элементарны и не требуют доказательства.

Свойство 1. Пересечение любого семейства $\{\Omega_\sigma\}$, $\sigma \in \Sigma$, (A, B) -выпуклых множеств является (A, B) -выпуклым.

Из свойства 1 следует, что для любого множества Ω существует наименьшее (A, B) -выпуклое множество, его содержащее; именно – пересечение всех (A, B) -выпуклых множеств, его содержащих. Это множество называется (A, B) -выпуклой оболочкой Ω и обозначается $\text{conv}_{(A, B)} \Omega$.

Из замечания 1 следует: если $A + c \not\subset \Omega$, $\forall c \in \mathbb{C}^n$, то (A, B) -выпуклая оболочка множества Ω совпадает с Ω .

Свойство 2. Пусть $A \subset A'$. Тогда всякое (A, B) -выпуклое множество является и (A', B) -выпуклым.

Свойство 3. Пусть Ω – q -множество и $A \subset A'$. Тогда

$$\text{conv}_{(A', B)} \Omega \subset \text{conv}_{(A, B)} \Omega. \quad (3)$$

Свойство 4. Пусть $B \subset B'$. Тогда всякое (A, B') -выпуклое множество является и (A, B) -выпуклым.

Свойство 5. Пусть $B \subset B'$. Тогда для любого q -множества Ω

$$\text{conv}_{(A, B)} \Omega \subset \text{conv}_{(A, B')} \Omega. \quad (4)$$

Свойство 6. Пусть A – q -компакт, B – произвольное q -множество, $\overline{B}$ – замыкание B . Для того чтобы открытое q -множество Ω было $(A, \overline{B})$ -выпуклым, необходимо и достаточно, чтобы оно было (A, B) -выпуклым.

Пусть $M = (M_1, \dots, M_q)$ – q -множество. Внутренняя часть M , в обозначении $\text{Int } M$, есть q -множество $(\text{Int } M_1, \dots, \text{Int } M_q)$, где $\text{Int } M_i$ – внутренняя часть M_i .

Свойство 7. Пусть A – q -компакт, B – произвольное q -множество. Если q -множество Ω является (A, B) -выпуклым, то и $\text{Int } \Omega$ является (A, B) -выпуклым множеством.

Свойство 8. Пусть A – q -компакт, B – произвольное q -множество, $\overline{B}$ – замыкание B . Тогда для любого открытого q -множества Ω

$$\text{conv}_{(A, B)} \Omega = \text{conv}_{(A, \overline{B})} \Omega.$$

3. Построение (A, B) -выпуклой оболочки.

Пусть A – q -компакт, Ω – открытое q -множество. Ниже приводится построение (A, B) -выпуклой оболочки открытого q -множества Ω .

Положим

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \Omega, \quad \Omega'_0 = (\Omega_0 \ominus A) + B; \\ \Omega_1 &= \Omega_0 \cup \Omega'_0, \quad \Omega'_1 = (\Omega_1 \ominus A) + B; \\ \Omega_2 &= \Omega_1 \cup \Omega'_1, \quad \Omega'_2 = (\Omega_2 \ominus A) + B \end{aligned}$$

и т. д. Таким образом мы построим возрастающую последовательность множеств

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots,$$

где $\Omega_n = \Omega_{n-1} \cup \Omega'_{n-1}$, $\Omega'_{n-1} = (\Omega_{n-1} \ominus A) + B$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. (A, B) -выпуклая оболочка открытого q -множества Ω совпадает с q -множеством

$$\Omega^\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По свойству 1, п. 1, геометрической разности $\Omega_0 \ominus A$ – открытое множество; следовательно, q -множество $\Omega'_0 = (\Omega_0 \ominus A) + B$ также открыто; открыто будет и объединение $\Omega_1 = \Omega_0 \cup \Omega'_0$. Повторяя эти рассуждения, последовательно установим, что q -множества $\Omega_2, \Omega_3, \dots$ – открыты. Следовательно, будет открыто и объединение Ω^∞ этих множеств. Покажем, что q -множество Ω^∞ является (A, B) -выпуклым. Пусть $A + c \subset \Omega^\infty$. Так как $A + c$ – q -компакт, а Ω^∞ есть объединение возрастающей последовательности открытых q -множеств Ω_n , то $A + c \subset \Omega_n$ для некоторого n . Это включение означает, что $c \in \Omega_n \ominus A$. Поэтому

$$B + c \subset (\Omega_n \ominus A) + B = \Omega'_n \subset \Omega_n \cup \Omega'_n = \Omega_{n+1} \subset \Omega^\infty.$$

Следовательно, выполняется импликация

$$A + c \subset \Omega^\infty \implies B + c \subset \Omega^\infty,$$

т.е. Ω^∞ действительно является (A, B) -выпуклым. Из вышеизложенного следует, что (A, B) -выпуклая оболочка $\hat{\Omega}$ q -множества Ω содержится в Ω^∞ . С другой стороны, из способа построения q -множеств $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ следует, что (A, B) -оболочка $\hat{\Omega}$ q -множества Ω содержит эти q -множества, значит, содержит их объединение Ω^∞ . Тем самым, установлено, что $\hat{\Omega} = \Omega^\infty$.

СЛЕДСТВИЕ. Если A – q -компакт, то (A, B) -оболочка открытого q -множества Ω открыта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 5.1 указанная оболочка $\hat{\Omega}$ представляется в виде объединения открытых множеств Ω_n , $n = 1, 2, \dots$.

4. Пределные переходы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Пусть $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots$ – возрастающая последовательность открытых q -множеств, сходящаяся к Ω ; A – q -компакт, B – произвольное q -множество. Тогда

$$\text{conv}_{(A, B)} \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}_{(A, B)} \Omega_n. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\Omega^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}_{(A, B)} \Omega_n.$$

Включение $\Omega_n \subset \Omega$ влечет включение

$$\text{conv}_{(A, B)} \Omega_n \subset \text{conv}_{(A, B)} \Omega,$$

откуда следует

$$\Omega^\infty \subset \text{conv}_{(A,B)} \Omega. \quad (6)$$

Прежде чем установить обратное включение, покажем, что множество Ω^∞ является (A, B) -выпуклым. По следствию к предложению 5.1 q -множества $\text{conv}_{(A,B)} \Omega_n$ являются открытыми. Пусть $A + c \subset \Omega^\infty$. Это значит, что q -компакт $A + c$ покрывается возрастающей последовательностью открытых q -множеств $\text{conv}_{(A,B)} \Omega_n$. Поэтому существует n такое, что $A + c \subset \text{conv}_{(A,B)} \Omega_n$. Поскольку $\text{conv}_{(A,B)} \Omega_n - (A, B)$ -выпуклое множество, $B + c \subset \text{conv}_{(A,B)} \Omega_n$. Тем более, $B + c \subset \Omega^\infty$. Таким образом, для Ω^∞ выполняется импликация:

$$A + c \subset \Omega^\infty \implies B + c \subset \Omega^\infty,$$

т.е. $\Omega^\infty - (A, B)$ -выпукло. Теперь приступаем к доказательству включения, обратного (6). Имеем

$$\Omega^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}_{(A,B)} \Omega_n \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega.$$

Поскольку q -множество Ω^∞ является (A, B) -выпуклым,

$$\Omega^\infty = \text{conv}_{(A,B)} \Omega^\infty \supset \text{conv}_{(A,B)} \Omega.$$

Следовательно, имеет место (5). Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $A - q$ -компакт, $B -$ произвольное q -множество, $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots -$ возрастающая последовательность открытых (A, B) -выпуклых множеств, сходящаяся к Ω . Тогда Ω является (A, B) -выпуклым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку каждое Ω_n является (A, B) -выпуклым,

$$\text{conv}_{(A,B)} \Omega_n = \Omega_n.$$

По предложению 5.2 имеем

$$\text{conv}_{(A,B)} \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}_{(A,B)} \Omega_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega.$$

Отсюда и следует, что $\Omega - (A, B)$ -выпукло.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть $A_1 \supset A_2 \supset \dots -$ убывающая последовательность q -компактов, сходящаяся к A , $B - q$ -множество. Тогда для любого открытого q -множества Ω

$$\text{conv}_{(A,B)} \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}_{(A_n,B)} \Omega. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\Omega^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}_{(A_n, B)} \Omega. \quad (8)$$

По свойству 3 (п. 2)

$$\text{conv}_{(A_n, B)} \Omega \subset \text{conv}_{(A, B)} \Omega, \quad n = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует

$$\Omega^\infty \subset \text{conv}_{(A, B)} \Omega. \quad (9)$$

Чтобы доказать обратное включение, предварительно установим, что Ω^∞ является (A, B) -выпуклым. По следствию к предложению 5.1 q -множества $\text{conv}_{(A_n, B)} \Omega$ открыты и образуют возрастающую последовательность. Пусть $A + c \subset \Omega^\infty$. Поскольку $A + c$ есть q -компакт, покрываемый возрастающей последовательностью открытых q -множеств $\text{conv}_{(A_n, B)} \Omega$, то $A + c \subset \text{conv}_{(A_{n_0}, B)} \Omega$ при некотором n_0 . С другой стороны, убывающая последовательность q -компактов $A_m + c$ сходится к $A + c$. По лемме (п. 1) найдется $m \geq n_0$ столь большое, что $A_m + c \subset \text{conv}_{(A_{n_0}, B)} \Omega$ и, тем более, $A_m + c \subset \text{conv}_{(A_m, B)} \Omega$. Но множество $\text{conv}_{(A_m, B)} \Omega$ является (A_m, B) -выпуклым. Поэтому $B + c \subset \text{conv}_{(A_m, B)} \Omega$ и, тем более, $B + c \subset \Omega^\infty$. Таким образом, для q -множества выполняется импликация

$$A + c \subset \Omega^\infty \implies B + c \subset \Omega^\infty,$$

т.е. Ω^∞ — (A, B) -выпуклое множество.

Приступим к доказательству включения, обратного (9). Используя включение

$$\Omega \subset \text{conv}_{(A_n, B)} \Omega$$

и выражение (8) для Ω^∞ , получаем включение $\Omega \subset \Omega^\infty$. Отсюда, используя (A, B) -выпуклость Ω^∞ , имеем

$$\text{conv}_{(A, B)} \Omega \subset \text{conv}_{(A, B)} \Omega^\infty = \Omega^\infty.$$

Это включение вместе с (9) дает (7).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. Пусть A — q -компакт; $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ — возрастающая последовательность q -множеств, сходящаяся к B ; Ω — открытое q -множество. Тогда

$$\text{conv}_{(A, B)} \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}_{(A, B_n)} \Omega. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\Omega^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}_{(A, B_n)} \Omega.$$

По свойству 5 (п. 2) включение $B_n \subset B$ влечет включение

$$\text{conv}_{(A, B_n)} \Omega \subset \text{conv}_{(A, B)} \Omega,$$

верное при $n = 1, 2, \dots$. Отсюда следует, что

$$\Omega^\infty \subset \text{conv}_{(A, B)} \Omega.$$

Установим обратное включение. Для этого покажем, что Ω^∞ является (A, B) -выпуклым. Пусть $A + c \subset \Omega^\infty$. По следствию к предложению 5.1 q -множества $\text{conv}_{(A, B_n)} \Omega$ являются открытыми и система этих множеств покрывает q -компакт $A + c$. Поэтому существует номер n_0 такой, что $A + c \subset \text{conv}_{(A, B_n)} \Omega$ при $n \geq n_0$. Далее, так как (A, B_n) -выпуклая оболочка любого q -множества является (A, B_n) -выпуклым множеством, то

$$B_n + c \subset \text{conv}_{(A, B_n)} \Omega,$$

тем более, $B_n + c \subset \Omega^\infty$. Это верно при $n \geq n_0$. Следовательно,

$$B + c = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} B_n + c = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} (B_n + c) \subset \Omega^\infty.$$

Таким образом, Ω^∞ является (A, B) -выпуклым. Так как $\Omega^\infty \supset \Omega$, то (A, B) -выпуклая оболочка Ω содержится в Ω^∞ , т.е.

$$\text{conv}_{(A, B)} \Omega \subset \Omega^\infty.$$

Тем самым, соотношение (10) установлено.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. Пусть $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ — убывающая последовательность q -компактов, сходящаяся к A ; $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ — возрастающая последовательность q -множеств, сходящаяся к B ; $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots$ — возрастающая последовательность открытых q -множеств, сходящаяся к Ω .

Тогда

$$\text{conv}_{(A, B)} \Omega = \bigcup \text{conv}_{(A_n, B_n)} \Omega_n. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\Omega^\infty = \bigcup \text{conv}_{(A_n, B_n)} \Omega_n. \quad (12)$$

Включение $\Omega_n \subset \Omega$ влечет включение

$$\text{conv}_{(A_n, B_n)} \Omega_n \subset \text{conv}_{(A_n, B_n)} \Omega. \quad (13)$$

Так как $A \subset A_n$ и $B_n \subset B$, то, используя свойства 3, 5 (п. 2), имеем

$$\text{conv}_{(A_n, B_n)} \Omega \subset \text{conv}_{(A, B_n)} \Omega \subset \text{conv}_{(A, B)} \Omega.$$

Продолжая включение (13), получаем

$$\text{conv}_{(A_n, B_n)} \Omega_n \subset \text{conv}_{(A, B)} \Omega.$$

Это верно при любом $n = 1, 2, \dots$. Поэтому

$$\Omega^\infty \subset \text{conv}_{(A, B)} \Omega.$$

Докажем обратное включение. Фиксируем целое положительное число m . По свойству 3 (п. 2) при $k \geq m$ имеем

$$\text{conv}_{(A_m, B_k)} \Omega_k \subset \text{conv}_{(A_k, B_k)} \Omega_k \subset \Omega^\infty.$$

Фиксируем целое число $n \geq m$. По свойству 5 (п. 2) при $k \geq n$ имеем

$$\text{conv}_{(A_m, B_n)} \Omega_k \subset \text{conv}_{(A_m, B_k)} \Omega_k \subset \Omega^\infty.$$

Итак, $\text{conv}_{(A_m, B_n)} \Omega_k \subset \Omega^\infty$ при $m \leq n \leq k$. Отсюда следует

$$\bigcup_{k \geq n} \text{conv}_{(A_m, B_n)} \Omega_k \subset \Omega^\infty.$$

По предложению 5.2 левая часть включения есть $\text{conv}_{(A_m, B_n)} \Omega$ и, следовательно,

$$\text{conv}_{(A_m, B_n)} \Omega \subset \Omega^\infty.$$

Это верно при любых $m, n, m \leq n$. Поэтому при любом фиксированном $m = 1, 2, \dots$

$$\bigcup_{n \geq m} \text{conv}_{(A_m, B_n)} \Omega \subset \Omega^\infty.$$

По предложению 5.4 левая часть этого включения есть $\text{conv}_{(A_m, B)} \Omega$.

Следовательно, $\text{conv}_{(A_m, B)} \Omega \subset \Omega^\infty$. Поскольку это верно при $m = 1, 2, \dots$,

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \text{conv}_{(A_m, B)} \Omega \subset \Omega^\infty.$$

По предложению 5.3 левая часть этого включения есть $\text{conv}_{(A, B)} \Omega$.

Таким образом,

$$\text{conv}_{(A, B)} \Omega \subset \Omega^\infty.$$

Соотношение (11) установлено.

Предложение доказано.

§ 6. Проекторы Дирихле

1. Определение проектора Дирихле.

Пусть Ω, Ω' – открытые q -множества; $H = H(\Omega)$, $H' = H(\Omega')$; W – инвариантное подпространство в H , допускающее спектральный синтез; Λ – квазиспектральное множество подпространства W (§ 2, п. 6); Λ' – часть Λ ; E – множество всех элементарных $\exp$ - q -многочленов из W с показателями в Λ ; E' – часть E , состоящая из всех элементарных $\exp$ - q -многочленов из E с показателями в Λ' ; $W' = W(\Lambda', \Omega')$ – замыкание линейной оболочки E' в топологии $H(\Omega')$. Согласно последнему обозначению $W = W(\Lambda, \Omega)$. Заметим, что Λ' – квазиспектральное множество W' .

Проектором Дирихле

$$p: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \Omega') \quad (1)$$

мы называем линейное непрерывное отображение подпространства W в подпространство W' со следующим свойством:

$$p(e) = \begin{cases} e, & e \in E', \\ 0, & e \in E \setminus E'. \end{cases} \quad (2)$$

Так как E полно в W , то может существовать только один проектор Дирихле.

Образ $F = p(f)$ элемента $f \in W$ относительно p будем называть *проекцией Дирихле* элемента f . Настоящий параграф посвящен исследованию свойств проектора Дирихле.

Для удобства изложения мы принимаем следующее *соглашение*:

если q -множество Ω' пусто (т.е. хотя бы одна его компонента – пустое множество), то проектор Дирихле (1) существует при любых Λ и Ω .

2. Проекторы Дирихле и сходимость.

Предложение 6.1. *Для того чтобы существовал проектор Дирихле $p: W \rightarrow W'$, необходимо и достаточно, чтобы из сходимости любой последовательности полиномов Дирихле в W следовала сходимость их проекций Дирихле в W' .*

Доказательство столь же просто, как и в случае одной переменной [35; предложение 1.3].

3. Проектор Дирихле и аналитическое продолжение.

В случае $\Lambda' = \Lambda$ образ $p(f)$ элемента f из W будем называть *продолжением по Дирихле* элемента f на q -множество Ω' . Если $\Omega' - q$ -область и $\Omega' \supset \Omega$, то продолжение по Дирихле совпадает с обычным аналитическим продолжением.

Предложение 6.2. *Пусть $\Omega \subset \Omega'$. Для того чтобы все элементы из W допускали аналитическое продолжение в Ω' , необходимо и достаточно, чтобы они допускали продолжение по Дирихле в Ω' .*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\widehat{W}$ – подпространство, состоящее из элементов $H(\Omega')$, сужения которых на Ω принадлежат W . Легко проверить, что $\widehat{W}$ будет инвариантным подпространством в $H(\Omega')$ с тем же спектром, что и W . Оба подпространства W и W' , наделенные топологиями, индуцированными из $H(\Omega)$ и $H(\Omega')$ соответственно, являются пространствами типа $(\mathcal{F})$. Рассмотрим линейный непрерывный оператор $r: \widehat{W} \rightarrow W$ сужения элементов $\widehat{W}$ на Ω . Ясно, что $\ker r = \{0\}$. По теореме Банаха [57; с. 40] r – топологический изоморфизм. Отсюда следует, что $\widehat{W} = W(\Lambda, \Omega')$ и отображение r^{-1} , обратное r , есть проектор Дирихле

$$p: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda, \Omega').$$

Достаточность. Пусть все элементы из W допускают продолжение по Дирихле в Ω' , т.е. существует проектор Дирихле

$$p: W \rightarrow W(\Omega', \Lambda).$$

Фиксируем элемент $f \in W$, $F = p(f)$ – образ этого элемента относительно p . Поскольку W допускает спектральный синтез, то существует последовательность e_n , $n = 1, 2, \dots$, полиномов Дирихле из W , сходящаяся к f в Ω . Так как отображение p непрерывно, последовательность $f_n = p(e_n)$ образов будет сходиться к F в Ω' . Но по определяющему свойству проектора Дирихле $f_n = e_n$. Поэтому последовательность f_n , $n = 1, 2, \dots$, будет одновременно сходиться к F во всей области Ω' и к f в части Ω этой области. Отсюда следует, что сужение F на Ω совпадает с f , т.е. F – аналитическое продолжение f .

4. Прямые суммы.

Пусть инвариантное подпространство $W \subset H(\Omega)$ содержит инвариантные подпространства $W_1, \dots, W_n$. Будем писать

$$W = W_1 + \dots + W_m,$$

если W представляет собою замыкание в топологии $H(\Omega)$ множества сумм

$$f_1 + \dots + f_m, \quad f_i \in W_i.$$

Будем говорить, что W разлагается в *алгебраическую прямую сумму* и писать

$$W = W_1 \oplus \dots \oplus W_m,$$

если любой элемент $f \in W$ представляется единственным образом в виде

$$w = w_1 + \dots + w_m, \quad \text{где } w_i \in W_i;$$

если при этом w_i непрерывно зависят от w , то будем говорить, что W разлагается в *топологическую прямую сумму*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. *Алгебраическая прямая сумма $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_m$ необходимо является топологической.*

Доказательство проводится по известной схеме [35; предложение 1.5].

Пусть W – инвариантное подпространство в H , допускающее спектральный синтез, Λ – квазиспектральное множество этого подпространства. Предположим, что Λ разбито на конечное число частей $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$, т.е. $\Lambda = \bigcup_{i=1}^m \Lambda_i$, $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. *Для того чтобы W разлагалось в прямую сумму*

$$W = W_1 \oplus \dots \oplus W_m,$$

где $W_i = W(\Lambda_i, \Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали проекторы Дирихле

$$p_i: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda_i, \Omega), \quad i = 1, \dots, m. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Рассмотрим отображение $p_i: W \rightarrow W_i$, которое каждому элементу $w \in W$ ставит в соответствие i -е слагаемое в разложении $w = w_1 + \dots + w_m$. Легко проверить, что отображение p_i будет проектором Дирихле (3).

Достаточность. Любой элемент $w \in W$ представляется в виде $w = w_1 + \dots + w_m$, где $w_i = p_i(w) \in W_i$ и непрерывно зависит от w .

5. Перестановочность с операторами частного дифференцирования.

Из определения проектора Дирихле

$$p: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \Omega')$$

следует, что p перестановочен с операторами частного дифференцирования $D_1 = \frac{\partial}{\partial z_1}$, $\dots$, $D_n = \frac{\partial}{\partial z_n}$ на множестве E элементарных ехр- q -многочленов из W с показателями $\lambda \in \Lambda$. Так как E полно в W , то по непрерывности p перестановочен с $D_1, \dots, D_n$ на всем W .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.5. *Пусть существует проектор Дирихле*

$$p: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \Omega').$$

Тогда для любого множества $A \subset \mathbb{C}^n$ существует проектор Дирихле

$$p_A: W(\Lambda, \Omega + A) \rightarrow W(\Lambda', \Omega' + A). \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения: $W = W(\Lambda, \Omega)$, $W' = W(\Lambda', \Omega')$, $W_A = W(\Lambda, \Omega + A)$, $W'_A = W(\Lambda', \Omega' + A)$. Пусть E – множество ехр- q -многочленов из W с показателями $\lambda \in \Lambda$, E' – множество ехр- q -многочленов из W с показателями $\lambda \in \Lambda'$. Согласно предложению 3.6 существует линейное непрерывное отображение $v: W_A \rightarrow W'_A$, перестановочное с операторами дифференцирования и удовлетворяющее условию: $v(e) = p(e)$, $\forall e \in E$. Отсюда следует

$$v(e) = \begin{cases} e, & e \in E', \\ 0, & e \in E \setminus E'. \end{cases}$$

Тем самым установлено, что v – искомый проектор Дирихле (4).

Из предложения 6.5 следуют два утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.6. Если все элементы из $W = W(\Lambda, \Omega)$ допускают продолжение по Дирихле на Ω' , то все элементы из $W_A = W(\Lambda, \Omega + A)$ допускают продолжение по Дирихле на $\Omega' + A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.7. Если W разлагается в прямую сумму

$$W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m,$$

где $W_i = W(\Lambda_i, \Omega)$, то $W_A = W(\Lambda, \Omega + A)$ разлагается в прямую сумму

$$W_A = W_{1A} \oplus \cdots \oplus W_{mA},$$

где $W_{iA} = W(\Lambda_i, \Omega + A)$.

6. Элементарные свойства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.8. Пусть $\Omega'' \subset \Omega'$. Тогда если существует проектор Дирихле

$$p': W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \Omega'),$$

то существует и проектор Дирихле

$$p'': W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \Omega'').$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть r – оператор сужения на Ω'' . Отображение $r \circ p'$ есть искомым проектор Дирихле p'' .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.9. Пусть $\Lambda_0 \supset \Lambda_1 \supset \cdots \supset \Lambda_n$ и

$$\begin{aligned} p_1: W(\Lambda_0, \Omega_0) &\rightarrow W(\Lambda_1, \Omega_1), \\ p_2: W(\Lambda_1, \Omega_1) &\rightarrow W(\Lambda_2, \Omega_2), \\ &\dots\dots\dots \\ p_n: W(\Lambda_{n-1}, \Omega_{n-1}) &\rightarrow W(\Lambda_n, \Omega_n) \end{aligned}$$

– проекторы Дирихле.

Тогда композиция

$$p = p_n \circ p_{n-1} \circ \cdots \circ p_1$$

есть проектор Дирихле из $W(\Lambda_0, \Omega_0)$ в $W(\Lambda_n, \Omega_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор p линейно и непрерывно отображает $W(\Lambda_0, \Omega_0)$ в $W(\Lambda_n, \Omega_n)$, при этом элементарный $\exp q$ -многочлен из $W(\Lambda_0, \Omega_0)$ с показателем $\lambda \in \Lambda_n$ остается неподвижным, а с показателем $\lambda \in \Lambda_0 \setminus \Lambda_n$ переводится в нуль.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть существует проектор Дирихле $p: W(\Lambda, \Omega_1) \rightarrow W(\Lambda', \Omega_2)$ и $\Omega_1 \subset \Omega_0$, $\Omega_3 \subset \Omega_2$. Тогда существует проектор Дирихле

$$p: W(\Lambda, \Omega_0) \rightarrow W(\Lambda', \Omega_3). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проектор (5) представляется в виде $\widehat{p} = r_2 \circ p \circ r_1$, где r_1, r_2 – отображения сужения на Ω_1, Ω_2 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.10. Пусть $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ – открытые q -множества и существуют проекторы Дирихле

$$p_i: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \Omega_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

Тогда существует проектор Дирихле

$$p: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \Omega'),$$

где $\Omega' = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для сокращения записи обозначим: $W = W(\Lambda, \Omega)$, $W'_i = W(\Lambda', \Omega_i)$, $W' = W(\Lambda', \Omega')$, $W'' = \bigcap_{i=1}^m W'_i$. Нетрудно видеть, что $W' \subset W''$; при этом топология W' совпадает с топологией, индуцированной из W'' . Из определяющего свойства (2) проектора Дирихле следует, что отображения p_i совпадают на множестве E элементарных эксп- q -многочленов из W ; поскольку E полно в W , по свойствам непрерывности p_i совпадают на W и, следовательно, представляют одно и то же отображение p , действующее из W в W'' . Отображение $p: W \rightarrow W''$ непрерывно по той причине, что непрерывно каждое из отображений $p_i: W \rightarrow W'_i$, и при этом топология W'' – слабейшая топология, при которой вложения $W'' \subset W'_i$, $i = 1, \dots, m$, непрерывны.

Пусть E' – множество элементарных эксп- q -многочленов из W с показателями в Λ' . Из соотношений $p = p_i$, $i = 1, \dots, m$, и свойств проектора Дирихле следует

$$p(e) = \begin{cases} e, & e \in E', \\ 0, & e \in E \setminus E'. \end{cases}$$

Для завершения доказательства нужно показать, что

$$p(W) \subset W'. \quad (6)$$

Пусть $F = p(f)$. Существует последовательность f_n , $n = 1, 2, \dots$, полиномов Дирихле с показателями в Λ , сходящаяся к f в W . Элементы $f'_n = p(f_n)$ суть полиномы Дирихле из W' . В силу непрерывности отображения $p: W \rightarrow W''$ последовательность f'_n , $n = 1, 2, \dots$, будет сходиться к F в топологии W'' . Но топология W' совпадает с топологией, индуцированной из W'' . Значит, $f'_n \rightarrow F$ в W' . Так как W' замкнуто в W'' , то $F \in W'$. Тем самым, включение (6) установлено.

7. Предельный переход.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.11. Пусть $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots$ – возрастающая последовательность открытых q -множеств, Ω – открытое q -множество. Предположим, что существуют проекторы Дирихле

$$p_n: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \Omega_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда существует проектор Дирихле

$$p: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \Omega'),$$

где $\Omega' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для сокращения обозначений положим $W = W(\Lambda, \Omega)$, $W_n = W(\Lambda', \Omega_n)$, $W' = W(\Lambda', \Omega')$. Можем рассматривать последовательность W_n , $n = 1, 2, \dots$, как убывающую цепочку вложенных друг в друга пространств

$$W_1 \supset W_2 \supset \dots, \quad (7)$$

причем вложение $W_{n+1} \subset W_n$ означает, что каждый элемент f из W_{n+1} отождествляется со своим сужением на Ω_n . При такой трактовке вложений (7) можно рассматривать пространство W' как пересечение: $W' = \bigcap W_n$.

Пространство W' представляет собою проективный предел последовательности пространств (7). Покажем, что для элемента $f \in W$ образ $F_n = p_n(f)$ не зависит от n и принадлежит W' .

Пусть e_ν , $\nu = 1, 2, \dots$, — последовательность полиномов Дирихле из W с показателями в Λ , сходящаяся к f в W . В силу непрерывности проекторов Дирихле последовательность $p_n(e_\nu)$ будет сходиться к F_n в топологии W_n при $\nu \rightarrow \infty$. Но элемент $p_n(e_\nu)$ представляет собою полином Дирихле (из W_n), который получается из e_ν отбрасыванием членов с показателями в $\Lambda \setminus \Lambda'$. Этот полином не зависит от n . Итак, одна и та же последовательность полиномов Дирихле сходится к F_n в топологии W_n при любом $n = 1, 2, \dots$. Значит, эта последовательность сходится равномерно внутри Ω к некоторому элементу $F \in W$, причем этот элемент является аналитическим продолжением любого из элементов F_n . Таким образом, $F_n = F$ и $F \in W'$. Тем самым установлено, что проекторы p_n не зависят от n и фактически представляют собою одно и то же отображение $p: W \rightarrow W'$. При каждом n отображение $p = p_n$ есть непрерывное отображение W в W_n . По известному свойству проективных пределов [58; гл. V] p будет непрерывным отображением W в W' . Очевидно, что отображение p , так же как и любое p_n , переводит элементарные q -многочлены из W с показателями в Λ' в самих себя, а с показателями в $\Lambda \setminus \Lambda'$ — в нуль. Это значит, что $p: W \rightarrow W'$ — проектор Дирихле.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.12. Пусть Ω_n , $n = 1, 2, \dots$, — открытые q -множества и для каждого n существует проектор Дирихле

$$p_n: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \Omega_n).$$

Тогда существует проектор Дирихле

$$p: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \Omega'),$$

где $\Omega' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Omega'_m = \bigcup_{n=1}^m \Omega_n$. Согласно предложению 6.10 существуют проекторы Дирихле

$$p'_m: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \Omega'_m), \quad m = 1, 2, \dots$$

Далее, открытые q -множества Ω'_m образуют возрастающую последовательность $\Omega'_1 \subset \Omega'_2 \subset \dots$. По предложению 6.11 существует проектор Дирихле

$$p: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \Omega'),$$

где $\Omega' = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega'_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$.

8. Проекторы Дирихле и нестандартная выпуклость.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.13. Пусть D, D' – открытые q -множества. Предположим, что существует проектор Дирихле

$$p: W(\Lambda, D) \rightarrow W(\Lambda', D'). \quad (8)$$

Тогда для любого открытого q -множества Ω существует проектор Дирихле

$$\hat{p}: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \Omega'), \quad (9)$$

где $\Omega' = (\Omega \ominus D) + D'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\Omega \ominus D$ пусто, то и $(\Omega \ominus D) + D'$ пусто. Согласно принятому соглашению (см. п. 1) проектор Дирихле (9) существует. Пусть $\Omega \ominus D$ не пусто. Положим $A = \Omega \ominus D$. По предложению 6.5 существование проектора Дирихле (8) влечет существование проектора Дирихле

$$p_A: W(\Lambda, D + A) \rightarrow W(\Lambda', D' + A).$$

Теперь заметим, что из определения геометрической разности следует $D + A \subset \Omega$. Кроме того, $\Omega' = D' + A$. Применяя следствие предложения 6.9 к множествам $\Omega_0 = \Omega$, $\Omega_1 = D + A$, $\Omega_2 = D' + A$, $\Omega_3 = D' + A$, получим, что существует проектор Дирихле (9).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.14. Пусть $D_1 \ni D_2 \ni \dots$ – последовательность компактно вложенных открытых q -множеств, сходящаяся к q -компакту D ; D' – открытое q -множество. Предположим, что для каждого $n = 1, 2, \dots$ существует проектор Дирихле

$$p_n: W(\Lambda, D_n) \rightarrow W(\Lambda', D').$$

Тогда для любого открытого q -множества Ω существует проектор Дирихле

$$p: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \Omega'), \quad (10)$$

где $\Omega' = (\Omega \ominus D) + D'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 6.13 для каждого $n = 1, 2, \dots$ существует проектор Дирихле

$$p_n: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \Omega'_n),$$

где $\Omega'_n = (\Omega \ominus D_n) + D'$. Пусть $\overline{D}_n$ – замыкание D_n , $\Omega''_n = (\Omega \ominus \overline{D}_n) + D'$. Легко видеть, что $\Omega''_n \subset \Omega'_n$. По предложению 6.8 существуют проекторы Дирихле

$$p''_n: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \Omega''_n).$$

Заметим, что q -компакты $\overline{D}_n$ образуют убывающую последовательность, сходящуюся к D . По свойству 3 геометрической разности (§5, п. 1) последовательность открытых q -множеств Ω''_n , $n = 1, 2, \dots$, возрастает и сходится к Ω' . Согласно предложению 6.11 существует проектор Дирихле (10).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.15. Пусть $D_1 \supseteq D_2 \supseteq \dots$ – убывающая последовательность компактно вложенных друг в друга открытых q -множеств, сходящаяся к q -компакту D ; D' – открытое q -множество. Предположим, что для каждого $n = 1, 2, \dots$ существует проектор Дирихле

$$p_n: W(\Lambda, D_n) \rightarrow W(\Lambda', D'), \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Тогда для любого открытого q -множества Ω существует проектор Дирихле

$$p: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \Omega'),$$

где $\Omega' = (D, D')$ -выпуклая оболочка Ω , если $\Lambda = \Lambda'$, и $\Omega' = (D, D')$ -выпуклая оболочка $(\Omega \ominus D) + D'$, если $\Lambda' \subset \Lambda$.

ЗАМЕЧАНИЕ. q -множества Ω и $(\Omega \ominus D) + D'$ являются открытыми; поэтому по свойству 8 п. 2 § 5, (D, D') -выпуклые оболочки этих множеств совпадают с их $(D, \overline{D}')$ -выпуклыми оболочками, где $\overline{D}'$ – замыкание D' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $\Lambda' = \Lambda$. Построим возрастающую последовательность открытых q -множеств

$$\Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \dots, \quad (12)$$

где $\Omega_0 = \Omega$, $\Omega_1 = \Omega_0 \cup \Omega'_0$, $\Omega'_0 = (\Omega_0 \ominus D) + D'$, $\Omega_2 = \Omega_1 \cup \Omega'_1$, $\Omega'_1 = (\Omega_1 \ominus D) + D'$ и т. д.

Таким образом, в последовательности (12) $\Omega_n = \Omega_{n-1} \cup \Omega'_{n-1}$, $\Omega'_{n-1} = (\Omega_{n-1} \ominus D) + D'$. Согласно предложению 5.1 (D, D') -выпуклая оболочка Ω совпадает с $\Omega' = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n$. По предложению 6.14 существует проектор Дирихле

$$p'_0: W(\Lambda, \Omega_0) \rightarrow W(\Lambda, \Omega'_0).$$

Тождественное отображение

$$p''_0: W(\Lambda, \Omega_0) \rightarrow W(\Lambda, \Omega_0)$$

есть проектор Дирихле. Отсюда, согласно предложению 6.10, заключаем, что существует проектор Дирихле

$$p_1: W(\Lambda, \Omega_0) \rightarrow W(\Lambda, \Omega_1).$$

Применяя снова предложение 6.14 к q -множеству Ω_1 , получим, что существует проектор Дирихле

$$p'_1: W(\Lambda, \Omega_1) \rightarrow W(\Lambda, \Omega'_1).$$

Обозначим $p''_1: W(\Lambda, \Omega_1) \rightarrow W(\Lambda, \Omega_1)$ тождественное отображение. Это отображение является проектором Дирихле. По предложению 6.10 существует проектор Дирихле

$$p_2: W(\Lambda, \Omega_1) \rightarrow W(\Lambda, \Omega_2).$$

Последовательно проводя такие рассуждения, получим, что для каждого $n = 1, 2, \dots$ существует проектор Дирихле

$$p_n: W(\Lambda, \Omega_{n-1}) \rightarrow W(\Lambda, \Omega_n).$$

Рассмотрим суперпозицию $\hat{p}_n = p_n \circ p_{n-1} \circ \dots \circ p_1$. $\hat{p}_n$ есть линейное непрерывное отображение пространства $W(\Lambda, \Omega)$ в $W(\Lambda, \Omega_n)$. По предложению 6.9 $\hat{p}_n$ – проектор Дирихле.

Итак, для каждого $n = 1, 2, \dots$ существует проектор Дирихле

$$\hat{p}_n: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda, \Omega_n).$$

Так как q -множества Ω_n образуют возрастающую последовательность, сходящуюся к Ω' , то по предложению 6.11, существует проектор Дирихле

$$p: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda, \Omega').$$

В случае $\Lambda' = \Lambda$ утверждение предложения доказано.

Рассмотрим случай $\Lambda' \neq \Lambda$. По предложению 6.14 существует проектор Дирихле

$$\hat{p}: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \hat{\Omega}),$$

где $\hat{\Omega} = (\Omega \ominus D) + D'$. Теперь заметим, что условие (11) влечет существование проекторов

$$\hat{p}_n: W(\Lambda', D_n) \rightarrow W(\Lambda', D'), \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Это позволяет свести случай $\Lambda' \neq \Lambda$ к уже разобранному случаю $\Lambda' = \Lambda$ (с заменой Λ на Λ'). В силу (13), по уже доказанному, существует проектор Дирихле

$$p': W(\Lambda', \hat{\Omega}) \rightarrow W(\Lambda', \Omega'),$$

где $\Omega' - (D, D')$ -выпуклая оболочка $\hat{\Omega}$. По предложению 6.9 суперпозиция

$$p = p' \circ \hat{p}$$

есть проектор Дирихле, отображающий $W(\Lambda, \Omega)$ в $W(\Lambda', \Omega')$. Предложение доказано.

§ 7. Мономорфизмы Дирихле

1. Пусть Ω, Ω' – открытые q -множества; P, P' – модули, ассоциированные с Ω, Ω' соответственно; I, I' – обильные подмодули в P, P' ; Λ, Λ' – квазинулевые множества подмодулей I, I' соответственно (см. § 2, п. 6). Предположим, что $\Lambda' \subset \Lambda$ и

$$I'(\lambda) = I(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda'.$$

Мономорфизмом Дирихле называется линейное отображение

$$u: P'/I' \rightarrow P/I,$$

которое класс смежности $\Psi \in P'/I'$ переводит в класс смежности $\Phi \in P/I$ так, что выполняются условия

$$\Phi \equiv \Psi \pmod{I(\lambda)} \quad \forall \lambda \in \Lambda', \quad (1)$$

$$\Phi \equiv 0 \pmod{I(\lambda)} \quad \forall \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'. \quad (2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Условия (1), (2) означают, что для любых представителей φ, ψ классов Φ, Ψ имеют место сравнения $\varphi \equiv \psi \pmod{I(\lambda)}$ при $\lambda \in \Lambda'$ и $\varphi \equiv 0 \pmod{I(\lambda)}$ при $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'$.

Отметим, что может существовать не более одного класса $\Phi \in P/I$, удовлетворяющего условиям (1), (2). Действительно, если существует другой класс Φ' , то для любых двух элементов $\varphi \in \Phi, \varphi' \in \Phi'$ будет $\varphi - \varphi' \equiv 0 \pmod{I(\lambda)} \quad \forall \lambda \in \Lambda$. Отсюда, в силу того, что подмодуль I – обильный, а Λ – квазинулевое множество этого подмодуля, справедливо включение $\varphi - \varphi' \in I$. Это значит, что $\Phi = \Phi'$. Аналогичным образом проверяется, что отображение u мономорфно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *Для того чтобы существовал проектор Дирихле*

$$p: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \Omega'), \quad (3)$$

необходимо и достаточно, чтобы существовал непрерывный мономорфизм Дирихле

$$u: P'/I' \rightarrow P/I. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть существует проектор Дирихле (3). Рассмотрим дуальную операцию $u = p^*: P'/I' \rightarrow P/I$. Для многочлена $P \in \text{Sp}_\lambda W$ имеем

$$p(P(z) \exp\langle \lambda, z \rangle) = \begin{cases} P(z) \exp\langle \lambda, z \rangle, & \lambda \in \Lambda', \\ 0, & \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'. \end{cases}$$

Отсюда, в силу предложения 3.5 для класса смежности $\Psi \in P'/I'$ и его образа $\Phi = p^*(\Psi)$ имеем

$$P(D)\Phi|_\lambda = \begin{cases} P(D)\Psi|_\lambda & \forall \lambda \in \Lambda', \\ 0 & \forall \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'. \end{cases} \quad (5)$$

При фиксированном λ соотношения (5) справедливы для любого многочлена P из локального спектра $\text{Sp}_\lambda W$. Но согласно предложению 2.1 $\text{Sp}_\lambda W = \text{Div}_\lambda I$. Поэтому соотношения (5) можно записать в виде

$$\begin{aligned} P(D)(\Phi - \Psi)|_\lambda &= 0 \quad \forall P \in \text{Div}_\lambda I \quad \forall \lambda \in \Lambda', \\ P(D)\Phi|_\lambda &= 0 \quad \forall P \in \text{Div}_\lambda I \quad \forall \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'. \end{aligned}$$

По свойству 8 дивизора (см. §2, п. 4)

$$\begin{aligned} \Phi - \Psi &\subset I(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda', \\ \Phi &\subset I(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'. \end{aligned}$$

Тем самым установлено, что отображение $u = p^{\otimes}$ есть непрерывный мономорфизм Дирихле.

Достаточность. Пусть существует непрерывный мономорфизм Дирихле (4). Известно (см. §3, п. 1), что существует линейная непрерывная операция $p: W \rightarrow W'$, по отношению к которой u является дуальной операцией: $u = p^{\otimes}$. Покажем, что p – проектор Дирихле. Отображение u переводит класс смежности $\Psi \in P'/I'$ в класс смежности $\Phi \in P/I$, связанный с Ψ соотношениями (1), (2). В силу свойства 8 дивизора (§2, п. 4) эти соотношения можно переписать в виде

$$\begin{aligned} P(D)\Phi &= P(D)\Psi|_{\lambda} \quad \forall P \in \text{Div}_{\lambda} I \quad \forall \lambda \in \Lambda', \\ P(D)\Phi &= 0 \quad \forall P \in \text{Div}_{\lambda} I \quad \forall \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'. \end{aligned}$$

Применяя предложение 3.5, видим, что прямая операция p действует на элементарный $\exp$ - q -многочлен

$$e = P(z) \exp\langle \lambda, z \rangle \in W$$

следующим образом:

$$p(e) = \begin{cases} e, & \text{если } \lambda \in \Lambda', \\ 0, & \text{если } \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'. \end{cases}$$

Это значит, что p – проектор Дирихле.

2. Введем следующие обозначения. Для выпуклого q -компакта $K = (K_1, \dots, K_q)$ и целой q -функции $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_q)$ положим

$$\|\varphi\|_K = \sum_{i=1}^q \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|\varphi_i(\lambda)|}{\exp H_{K_i}(\lambda)},$$

где $H_{K_i}(\lambda) = \sup_{\zeta \in K_i} \text{Re}\langle \zeta, \lambda \rangle$ – опорная функция K_i в смысле комплексного анализа; P_K – банахово пространство целых q -функций с нормой $\|\varphi\|_K < \infty$; $B_K = \{\varphi \in P_K : \|\varphi\|_K \leq 1\}$ – единичный шар в P_K .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. Следующие два утверждения равносильны:

- А) существует непрерывный мономорфизм Дирихле $u: P'/I' \rightarrow P/I$;
 Б) для любого q -компакта $K' \subset \Omega'$ существуют q -компакт $K \subset \Omega$ и константа C такие, что для любого элемента $f' \in P'$ найдется элемент $f \in P$, удовлетворяющий условиям:

- 1) имеют место сравнения

$$f \equiv f' \pmod{I(\lambda)} \quad \forall \lambda \in \Lambda', \quad f \equiv 0 \pmod{I(\lambda)} \quad \forall \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'; \quad (6)$$

- 2) имеет место неравенство

$$\|f\|_K \leq C \|f'\|_{K'}. \quad (7)$$

Доказательство этого предложения требует подготовки, которую мы проведем в п. 3, 4.

3. Пусть P – модуль, ассоциированный с *выпуклой* q -областью Ω . В этом пункте мы будем рассматривать P как локально-выпуклое пространство над полем комплексных чисел. Наша цель – описать фактор-топологию фактор-пространства P/I по замкнутому подпространству $I \subset P$.

Пусть $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots$ – возрастающая последовательность выпуклых q -компактов, исчерпывающая Ω . Используя теорему Мартино–Эренпрайса [36; теорема 4.5.3], можно показать, что топология P есть индуктивный предел возрастающей последовательности

$$P_{K_1} \subset P_{K_2} \subset \dots \quad (8)$$

банаховых пространств, вложенных друг в друга вполне непрерывно. Напомним, что B_{K_n} – единичный шар в P_{K_n} . Абсолютно выпуклое множество $V \subset P$ является окрестностью нуля в P тогда и только тогда, когда для любого $n = 1, 2, \dots$ найдется положительная константа c_n такая, что $c_n B_{K_n} \subset V$.

Пусть I – замкнутое подпространство P . Рассмотрим фактор-пространство P/I , наделенное фактор-топологией топологии P по I . Обозначим через θ канонический гомоморфизм $P \rightarrow P/I$. Совокупность образов $\theta(V)$ окрестностей нуля $V \subset P$ является фундаментальной системой окрестностей нуля в P/I . Соответствующую топологию обозначим τ . Кроме τ в P/I можно ввести топологию μ индуктивного предела следующим образом. Каждая норма $\|\cdot\|_{K_n}$ порождает в P/I фактор-норму

$$\|\Phi\|_{K_n} = \inf\{\|\varphi\|_{K_n} : \varphi \in \Phi\}.$$

Обозначим $(P/I)_{K_n}$ нормированное пространство классов смежности $\Phi \in P/I$, для которых $\|\Phi\|_{K_n} < \infty$. Легко видеть, что единичный шар $\widehat{B}_{K_n} = \{\Phi \in P/I : \|\Phi\|_{K_n} \leq 1\}$ содержит в себе образ $\theta(B_{K_n})$ единичного шара $B_{K_n} \subset P_{K_n}$ и содержится в образе того же, но удвоенного шара:

$$\theta(B_{K_n}) \subset \widehat{B}_{K_n} \subset \theta(2B_{K_n}). \quad (9)$$

Очевидно, что

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (P/I)_{K_n} = P/I.$$

Обозначим через μ топологию индуктивного предела возрастающей последовательности нормированных пространств

$$(P/I)_{K_1} \subset (P/I)_{K_2} \subset \dots \quad (10)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. *Фактор-топология τ пространства P/I совпадает с топологией μ индуктивного предела последовательности (10); при этом вложения в (10) являются вполне непрерывными, т.е. P/I является пространством типа (LN^*) .*

Доказательство основано на сравнении окрестностей нуля фактор-пространства P/I в топологии τ и в топологии μ ; при сравнении используются включения (9).

Полная непрерывность вложений (10) следует тривиальным образом из полной непрерывности вложений (8).

4. Пусть u – линейное отображение P'/I' в P/I . Нас интересуют условия, при которых это отображение будет непрерывным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.4. *Для того чтобы линейное отображение $u: P'/I' \rightarrow P/I$ было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие: для любого выпуклого q -компакта $K' \subset \Omega'$ существует выпуклый q -компакт $K \subset \Omega$ такой, что для любого элемента $f' \in P'$ существует элемент $f \in u([f'])$, для которого*

$$\|f\|_K \leq \text{const} \|f'\|_{K'}, \quad (11)$$

где константа не зависит от f' , f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть отображение u непрерывно. Образ $\widehat{B}_{K'}$ шара $B_{K'}$ относительно канонического гомоморфизма $\theta': P' \rightarrow P'/I'$ представляет собою ограниченное множество в P'/I' . Поэтому его образ $u(\widehat{B}_{K'})$ – ограниченное множество в P/I . Согласно предложению 7.3 P/I есть пространство типа (LN^*) с определяющей последовательностью нормированных пространств $(P/I)_{K_n}$, $n = 1, 2, \dots$. По известному свойству таких пространств [44; теорема 2] $u(\widehat{B}_{K'})$ ограничено в некотором $(P/I)_{K_n}$. Полагая $K = K_n$, можем утверждать, что существует q -компакт $K \subset \Omega$ такой, что $u(\widehat{B}_{K'}) \subset \text{const} \widehat{B}_K$, где $\widehat{B}_K$ – образ шара B_K относительно канонического гомоморфизма $\theta: P \rightarrow P/I$. Последнее равносильно тому, что

$$\|u(F')\|_K \leq c \|F'\|_{K'} \quad (12)$$

для любого класса $F' \in P'/I'$. Здесь c – положительная константа. Пусть теперь f' – какой-либо элемент из P' , а F' – класс смежности, его содержащий. Очевидно,

$$\|F'\|_{K'} \leq \|f'\|_{K'}.$$

Выберем элемент f из $u(F')$, для которого

$$\|f\|_K \leq 2 \|u(F')\|_K.$$

Учитывая (12), получим

$$\|f\|_K \leq 2 \|u(F')\|_K \leq 2c \|f'\|_{K'}.$$

Необходимая часть утверждения доказана.

Достаточность. Пусть $K'_1 \in K'_2 \in \dots$ – возрастающая последовательность выпуклых q -компактов, исчерпывающая Ω' . По предложению 7.3 P'/I' есть индуктивный предел пространств $(P'/I')_{K'_n}$. Пусть выполняется условие (11). Это условие можно переформулировать следующим образом: для любого выпуклого q -компакта $K' \subset \Omega'$ существует q -компакт $K \subset \Omega$ такой, что

$$u(\widehat{B}_{K'}) \subset \text{const} \widehat{B}_K, \quad (13)$$

где $\widehat{B}_{K'}$, $\widehat{B}_K$ – образы шаров $B_{K'}$, B_K относительно канонических гомоморфизмов $\theta': P' \rightarrow P'/I'$, $\theta: P \rightarrow P/I$ соответственно.

Включение (13) означает, что для любого q -компакта $K' \subset \Omega'$ образ $u(\widehat{B}_{K'})$ ограничен в P/I ; в частности, это верно при $K' = K'_n$, $n = 1, 2, \dots$. Пусть $\widehat{V}$ – абсолютно выпуклая окрестность нуля в P/I . Из вышеизложенного следует, что для любого $n = 1, 2, \dots$ существует $\varepsilon_n > 0$ такое, что

$$u(\varepsilon_n \widehat{B}_{K'_n}) \subset \widehat{V}.$$

Иными словами, прообраз $V' = u^{-1}(\widehat{V})$ окрестности $\widehat{V}$ содержит множества $\varepsilon_n \widehat{B}_{K'_n}$, $n = 1, 2, \dots$. Поскольку V' – абсолютно выпуклое множество вместе с $\widehat{V}$, заключаем, что V' – окрестность нуля в P'/I' . Тем самым, установлено, что прообраз $V' = u^{-1}(\widehat{V})$ любой абсолютно выпуклой окрестности $\widehat{V} \subset P/I$ есть окрестность в P'/I' , т.е. отображение u непрерывно.

5. Доказательство предложения 7.2.

1°. Пусть верно утверждение А), т.е. существует непрерывный мономорфизм Дирихле $u: P'/I' \rightarrow P/I$. Согласно предложению 7.4 для любого q -компакта $K' \subset \Omega'$ существуют q -компакт $K \subset \Omega$ и константа $c < \infty$ такие, что справедливо следующее утверждение:

для любого элемента $f' \in P'$ существует элемент $f \in P$ такой, что

$$f \in u([f']), \quad (14)$$

$$\|f\|_K \leq c\|f'\|_{K'}. \quad (15)$$

Поскольку u – мономорфизм Дирихле, включение (14) равносильно сравнениям (6); а условие (15) совпадает с условием (7). Условие Б) выполнено.

2°. Пусть имеет место условие Б), т.е. для любой q -функции $f' \in P'$ найдется q -функция f , связанная с f' условиями (6), (7). Рассмотрим отображение $u: P'/I' \rightarrow P/I$, которое классу смежности $\Psi = [f']$ ставит в соответствие класс смежности $\Phi = [f]$. Покажем, что определение корректно. Пусть f'_0 – другой элемент из класса Ψ . Этому элементу соответствует элемент f_0 и класс $\Phi_0 = [f_0]$ в P/I . Элементы f, f_0 удовлетворяют сравнениям

$$\begin{aligned} f &\equiv \begin{cases} f' \pmod{I(\lambda)} & \forall \lambda \in \Lambda', \\ 0 \pmod{I(\lambda)} & \forall \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda', \end{cases} \\ f_0 &\equiv \begin{cases} f'_0 \pmod{I(\lambda)} & \forall \lambda \in \Lambda', \\ 0 \pmod{I(\lambda)} & \forall \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'. \end{cases} \end{aligned}$$

Ввиду того, что $f' \equiv f'_0 \pmod{I(\lambda)} \quad \forall \lambda \in \Lambda'$, из этих сравнений следует, что $f - f_0 \in I(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$. Поскольку I – обильный подмодуль в P , а Λ – квазинулевое множество подмодуля I , заключаем, что $f - f_0 \in I$. Значит, $\Phi = \Phi_0$. Тем самым, установлено, что u определено корректно. Отображение u удовлетворяет условиям (14), (15). Легко проверяется линейность этого отображения. На основании предложения 7.4 заключаем, что отображение u – непрерывный мономорфизм Дирихле.

6. В некоторых случаях мономорфизм Дирихле является непрерывным автоматически. Следующее утверждение для случая одного переменного известно [35].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.5. Пусть выполнено условие а) $\Lambda = \Lambda'$, либо условие б) $\Omega \subset \Omega'$.

Тогда алгебраический мономорфизм Дирихле $q: P'/I' \rightarrow P/I$ является непрерывным; при этом в случае б) q – топологический мономорфизм.

ЗАМЕЧАНИЕ. Существование мономорфизма Дирихле q эквивалентно условию: для любого элемента $\psi \in P'$ существует элемент $\varphi \in P$ такой, что

$$\varphi \equiv \psi \pmod{I(\lambda)} \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad (16)$$

в случае а) и

$$\varphi \equiv \begin{cases} \psi \pmod{I(\lambda)} & \forall \lambda \in \Lambda', \\ 0 \pmod{I(\lambda)} & \forall \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda' \end{cases} \quad (17)$$

в случае б).

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 1.11 из статьи [35], и мы его опускаем.

§8. Разделение множеств

1. О кратности систем.

Пусть $E = \{e_\alpha\}$, $\alpha \in A$, – некоторая система замкнутых шаров в $\mathbb{R}^m$. Кратностью системы E в точке x , в обозначении $k_E(x)$, называется число шаров e_α , содержащих x . Число

$$k_E = \sup\{k_E(x) : x \in \mathbb{R}^m\}$$

называется кратностью системы E .

Рассмотрим две системы шаров

$$E = \{e_\alpha\}, \quad B = \{b_\alpha\}, \quad \alpha \in A.$$

Предположим, что

$$e_\alpha \subset b_\alpha \quad \forall \alpha \in A. \quad (1)$$

Введем обозначения: $\rho(b)$ – радиус шара b , $\rho_B^+(x) = \sup\{\rho(b_\alpha) : x \in b_\alpha\}$, $\rho_{E|B}^-(x) = \inf\{\rho(e_\alpha) : x \in b_\alpha\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. Пусть система E имеет конечную кратность k_E . Тогда

$$k_B(x) \leq k_E 2^m \left(\frac{\rho_B^+(x)}{\rho_{E|B}^-(x)} \right)^m. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $x \in \mathbb{R}^m$. Пусть $B(x) = \bigcup \{b_\alpha : x \in b_\alpha\}$. Обозначим $|e|$ объем шара e . В силу условия (1) имеем

$$\sum_{x \in b_\alpha} |e_\alpha| \leq k_E \int_{B(x)} ds,$$

где ds – элемент меры Лебега.

Множество $B(x)$ содержится в шаре с центром в x и радиуса $2\rho_B^+(x)$. Поэтому интеграл в правой части не превосходит $B(1)2^m(\rho_B^+(x))^m$, где $B(1)$ – обозначение объема единичного шара. Отсюда

$$\sum_{x \in b_\alpha} |e_\alpha| \leq k_E B(1) 2^m (\rho_B^+(x))^m. \quad (3)$$

С другой стороны, радиус шара e_α , для которого $x \in b_\alpha$, не менее $\rho_{E|B}^-(x)$. Поэтому

$$\sum_{x \in b_\alpha} |e_\alpha| \geq k_B(x) B(1) (\rho_{E|B}^-(x))^m. \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует (2).

В дальнейшем нас будут интересовать системы шаров, заданные с помощью положительной функции $\omega(x)$. Рассмотрим системы шаров $B = \{b_\alpha\}$, $E = \{e_\alpha\}$, $\alpha \in A$, где

$$b_\alpha = \{\zeta \in \mathbb{R}^m : |\zeta - x_\alpha| \leq \omega(x_\alpha)\}, \quad (5)$$

$$e_\alpha = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^m : |\zeta - x_\alpha| \leq \frac{\omega(x_\alpha)}{2} \right\}. \quad (6)$$

Здесь $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in A$, – некоторая система точек в $\mathbb{R}^m$.

Пусть

$$\omega^+(x) = \sup \{\omega(\zeta) : |\zeta - x| \leq \omega(\zeta)\}, \quad (7)$$

$$\omega^-(x) = \inf \{\omega(\zeta) : |\zeta - x| \leq \omega(\zeta)\}. \quad (8)$$

Легко проверить, что

$$\rho_B^+(x) \leq \omega^+(x), \quad \rho_{E|B}^-(x) \geq \frac{\omega^-(x)}{2}.$$

Подставляя в (2), получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть ω – положительная функция, заданная на $\mathbb{R}^m$; $E = \{e_\alpha\}$, $B = \{b_\alpha\}$ – системы шаров (5), (6). Предположим, что система E имеет конечную кратность k_E . Тогда кратность $k_B(x)$ системы B в точке x допускает оценку

$$k_B(x) \leq k_E \cdot 2^{2m} \left(\frac{\omega^+(x)}{\omega^-(x)} \right)^m. \quad (9)$$

2. О разделяющих функциях.

Пусть g, G – непересекающиеся открытые множества в $\mathbb{R}^m$. Функция χ , заданная на $\mathbb{R}^m$, разделяет g и G , если $0 \leq \chi(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$ и

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & x \in g, \\ 1, & x \in G. \end{cases}$$

Цель этого пункта – построить функцию, разделяющую g и G и допускающую определенную оценку для своего градиента.

Пусть ω – положительная непрерывная ограниченная функция, заданная на $\mathbb{R}^m$. Рассмотрим функции ω^+, ω^- , определенные по формулам (7), (8).

ЛЕММА. Функция $\omega^+(x)$ полунепрерывна сверху, $\omega^-(x)$ – положительна и полунепрерывна снизу.

Доказательство использует стандартные приемы математического анализа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2. Пусть для каждой точки $x \in G$ выполняется неравенство

$$\omega(x) \leq \text{dist}(x, g). \quad (10)$$

Тогда существует бесконечно дифференцируемая функция χ , разделяющая g и G , для градиента которой справедлива оценка

$$|\text{grad } \chi|(x) \leq \text{const} \frac{1}{\omega^-(x)} \left(\frac{\omega^+(x)}{\omega^-(x)} \right)^m, \quad (11)$$

где константа зависит только от m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения

$$e(x) = \left\{ \zeta : |\zeta - x| \leq \frac{\omega(x)}{2} \right\}, \\ b(x) = \left\{ \zeta : |\zeta - x| \leq \omega(x) \right\}.$$

По известной лемме о покрытии шарами [59; гл. III, § 4] существует последовательность шаров $E = \{e(x_n)\}$, $x_n \in G$, покрывающая G и имеющая конечную кратность $k_E(x) \leq \text{const}$, где константа зависит только от m . Рассмотрим соответствующую систему шаров $B = \{b(x_n)\}$. По следствию к предложению 8.1 кратность $k_B(x)$ системы B в точке x допускает оценку (9). По лемме ω^+ полунепрерывна сверху; по той же лемме ω^- полунепрерывна снизу и положительна. Поэтому отношение ω^+/ω^- полунепрерывно сверху. Отсюда, в частности, следует, что отношение ω^+/ω^- ограничено на любом компакте $K \subset G$. Из неравенства (9) следует, что $\sup_{x \in K} k_B(x) < \infty$. Это

влечет, что каждый компакт $K \subset G$ может пересекаться лишь с конечным числом шаров из B . Действительно, в противном случае из бесконечного множества шаров из B , пересекающихся с K , можно извлечь последовательность шаров $b(x_n)$, сходящуюся к некоторому шару положительного радиуса с центром в некоторой точке x_0 ; при этом радиусы шаров $b(x_n)$ ограничены снизу положительным числом, равным $\inf_K \omega$. Ясно, что точка x_0 содержится в бесконечном множестве шаров из B , что невозможно. Пусть σ – положительная бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^m$, удовлетворяющая условию $\sigma(x) = 0$ при $|x| \geq 1$ и $\sigma(x) \geq 1$ при $|x| \leq 1/2$. Рассмотрим функции

$$\chi_n(x) = \sigma\left(\frac{x - x_n}{\omega(x_n)}\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

χ_n – финитная неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция с носителем в $b(x_n)$. В шаре $e(x_n)$ функция χ_n принимает значения, большие или равные 1. Рассмотрим ряд

$$\chi = \sum \chi_n.$$

Ряд сходится по той причине, что каждый компакт пересекается с конечным числом носителей $b(x_n)$ функций χ_n . По той же причине ряд можно дифференцировать почленно; значит, χ – бесконечно дифференцируемая функция. Кроме того, χ неотрицательна. При $x \in G$ существует $e(x_n)$, $x \in e(x_n)$, и потому $\chi(x) \geq \chi_n(x) \geq 1$. Таким образом, $\chi \geq 1$ на G . В силу условия (10) носители χ_n не пересекаются с g . Поэтому $\chi = 0$ на g .

Оценим $\left|\frac{\partial \chi}{\partial x_i}\right|$ в точке x . Поскольку носитель $\frac{\partial \chi_n}{\partial x_i}$ лежит в $b(x_n)$, имеем

$$\left|\frac{\partial \chi}{\partial x_i}\right|(x) \leq \sum_n \left|\frac{\partial \chi_n}{\partial x_i}\right|(x) = \sum_{x \in b(x_n)} \left|\frac{\partial \chi_n}{\partial x_i}\right|(x).$$

Из выражения (12) для χ_n следует $\frac{\partial \chi_n}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \frac{1}{\omega(x_n)}$, откуда

$$\left|\frac{\partial \chi_n}{\partial x_i}\right| \leq \frac{l}{\omega(x_n)}, \quad \text{где } l = \max_i \sup_{\mathbb{R}^m} \left|\frac{\partial \sigma}{\partial x_i}\right|.$$

Продолжая оценку, получим

$$\left|\frac{\partial \chi}{\partial x_i}\right|(x) \leq l \sum_{x \in b(x_n)} \frac{1}{\omega(x_n)}.$$

Далее, $\omega(x_n) \geq \omega^-(x)$ при $x \in b(x_n)$. Поэтому

$$\left|\frac{\partial \chi}{\partial x_i}\right|(x) \leq \frac{l}{\omega^-(x)} \sum_{x \in b(x_n)} 1 = lk_B(x) \frac{1}{\omega^-(x)}.$$

Используя оценку (9) для $k_B(x)$, получаем

$$\left|\frac{\partial \chi}{\partial x_i}\right|(x) \leq lk_E 2^{2m} \left(\frac{\omega^+(x)}{\omega^-(x)}\right)^m \frac{1}{\omega^-(x)}. \quad (13)$$

Отсюда следует оценка (11). Однако функция χ может быть не равной 1 на G . Мы подправим эту функцию следующим образом. Пусть $\varphi(t)$ – бесконечно дифференцируемая неубывающая функция на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая условию: $\varphi(t) = 0$ при $t \leq 0$ и $\varphi(t) = 1$ при $t \geq 1$. Рассмотрим функцию $\hat{\chi}(x) = \varphi(\chi(x))$. Эта функция принимает значения из $[0, 1]$, бесконечно дифференцируема и $\hat{\chi} = 0$ на g (ибо $\chi = 0$ на g), $\hat{\chi} = 1$ на G (ибо $\chi \geq 1$ на G). Далее, $\frac{\partial \hat{\chi}}{\partial x_i} = \varphi' \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_i}$, откуда $\left| \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial x_i} \right| \leq L \left| \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \right|$, где $L = \max |\varphi'|$. Используя последнее неравенство и (13), имеем

$$\left| \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial x_i} \right| \leq L \left| \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \right| \leq (Ll) 2^{2m} k_E \left(\frac{1}{\omega^-(x)} \right) \cdot \left(\frac{\omega^+(x)}{\omega^-(x)} \right)^m. \quad (14)$$

Для завершения доказательства остается заметить, что оценка вида (11) для $\hat{\chi}$ следует из (14) и неравенства

$$|\text{grad } \hat{\chi}| \leq m \max_i \left| \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial x_i} \right|.$$

Функция σ , заданная на $\mathbb{R}^m$, имеет *ограниченное колебание*, если для любого $l > 0$

$$\sup_{|x_1 - x_2| \leq l} |\sigma(x_1) - \sigma(x_2)| < \infty.$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть выполнено условие: для любого $x \in G$

$$\ln \text{dist}(x, g) \geq -\sigma(x),$$

где $\sigma(x)$ – положительная непрерывная функция ограниченного колебания.

Тогда существует бесконечно дифференцируемая функция χ , разделяющая g и G и такая, что

$$|\text{grad } \chi|(x) \leq \text{const } e^{\sigma(x)}, \quad (15)$$

где константа зависит только от m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\omega(x) = \exp(-\sigma(x))$, $\omega_0 = \sup_x \omega(x)$, $\omega^+(x) = \sup_{\zeta} \{\omega(\zeta) : |x - \zeta| \leq \omega(\zeta)\}$, $\omega^-(x) = \inf_{\zeta} \{\omega(\zeta) : |x - \zeta| \leq \omega(\zeta)\}$. Оценим $\omega^+(x)$. Если $|x - \zeta| \leq \omega(\zeta)$, то $|x - \zeta| \leq \omega_0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \omega^+(x) &\leq \sup_{\zeta} \{\omega(\zeta) : |x - \zeta| \leq \omega_0\} \\ &\leq \omega(x) \exp \sup_{\zeta} \{(\sigma(x) - \sigma(\zeta)) : |x - \zeta| \leq \omega_0\} = \text{const } \omega(x). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \omega^-(x) &\geq \inf_{\zeta} \{\omega(\zeta) : |x - \zeta| \leq \omega_0\} \\ &\geq \omega(x) \exp \inf_{\zeta} \{(\sigma(x) - \sigma(\zeta)) : |x - \zeta| \leq \omega_0\} = \text{const } \omega(x), \end{aligned}$$

где константы положительны. Таким образом,

$$\omega^+(x)/\omega^-(x) \leq \text{const}, \quad \omega^-(x) \geq \text{const } \omega(x).$$

Согласно предложению 8.2 существует бесконечно дифференцируемая функция χ , градиент которой удовлетворяет неравенству (11). Используя полученные выше оценки для $\omega^+(x)/\omega^-(x)$ и $\omega^-(x)$, получаем требуемое неравенство (15).

§ 9. Существование проекторов Дирихле в случае выпуклых q -областей

1. Пусть Ω – выпуклая q -область; W – инвариантное подпространство в $H(\Omega)$, допускающее спектральный синтез; I – аннуляторный подмодуль подпространства W ; Λ – квазиспектральное множество подпространства W . Используя обозначение п. 1 § 6, можем написать: $W = W(\Lambda, \Omega)$. Согласно предложению 6.2 возможность аналитического продолжения элементов из W в более широкую q -область Ω' эквивалентна существованию проектора Дирихле

$$p: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda, \Omega').$$

В этом параграфе мы исследуем задачу существования общего проектора Дирихле

$$p: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \Omega'), \quad (1)$$

где Λ' – часть Λ , отделенная от $\Lambda'' = \Lambda \setminus \Lambda'$ замкнутым множеством Γ , вдоль которого выполняется специальная оценка снизу, Ω' – выпуклая q -область, определенным образом зависящая от Ω . Теорема 9.1 дает условия существования проектора Дирихле (1) в терминах оценок “снизу” для независимой системы q -функций экспоненциального типа $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$, локально принадлежащих I в точках $\lambda \in \Lambda$. Теорема 9.1 доказывается методом, восходящим к К. Кисельману [38] и использующим оценки Л. Хёрмандера [36] для решений неоднородных уравнений Коши–Римана.

Теорема 9.2 представляет собою упрощенный вариант теоремы 9.1.

2. Терминология и обозначения.

Чтобы сформулировать главный результат статьи, нам понадобятся специальные понятия.

1°. Пусть Γ – замкнутое множество в $\mathbb{C}^n$, дополнение $\Gamma^{(c)} = \mathbb{C}^n \setminus \Gamma$ которого состоит из не менее чем двух компонент связности. Для фиксированной компоненты связности $e \subset \Gamma^{(c)}$ обозначим $E_e = \Gamma^{(c)} \setminus e$ объединение всех компонент связности $\Gamma^{(c)}$, отличных от e . Определим на $\Gamma^{(c)}$ функцию $T_\Gamma(z)$, полагая $T_\Gamma(z) = \text{dist}(z, E_e)$ при $z \in e$.

Множество Γ разделяет два множества Λ', Λ'' , если существует разбиение $\Gamma^{(c)}$ на два открытых множества Z', Z'' таких, что $\Lambda' \subset Z', \Lambda'' \subset Z''$.

Ясно, что каждое из множеств Z', Z'' представляет собою объединение некоторого семейства компонент связности $\Gamma^{(c)}$.

Из определения следует: если Γ разделяет Λ', Λ'' , то $\text{dist}(z', \Lambda'') \geq T_\Gamma(z')$ при $z' \in \Lambda', \text{dist}(z'', \Lambda') \geq T_\Gamma(z'')$ при $z'' \in \Lambda''$.

Множество Γ окружает множество Λ , если существует разбиение $\Gamma^{(c)}$ на два открытых *непустых* множества Z', Z'' , одно из которых, скажем, Z' , содержит Λ . В этом случае будем также говорить, что Γ есть *окружение* Λ .

2°. *Опорной функцией q -компакта $D = (D_1, \dots, D_q)$ называется q -функция*

$$H_D(\lambda) = (H_{D_1}(\lambda), \dots, H_{D_q}(\lambda)),$$

где $H_{D_i}(\lambda)$ – опорная функция компакта D_i в смысле комплексного анализа.

Понятие определяющего компакта целой функции экспоненциального типа было введено в § 1, п. 4. Пусть $u = (u_1, \dots, u_q)$ – целая q -функция экспоненциального типа (т.е. все компоненты – целые функции экспоненциального типа). Выпуклый q -компакт

$D = (D_1, \dots, D_q)$ называется *определяющим для q -функции u* , если D_i – определяющий компакт для u_i , $i = 1, \dots, q$. То, что D – определяющий q -компакт для u , равносильно следующему: для любого $\varepsilon > 0$ существует константа C такая, что выполняется неравенство

$$|u(\lambda)| \leq C \exp(H_D(\lambda) + \varepsilon|\lambda|), \quad (2)$$

где $H_D(\lambda)$ – опорная функция q -компакта D ; при этом неравенство (2) следует трактовать как сокращенную запись q неравенств:

$$|u_i(\lambda)| \leq C \exp(H_{D_i}(\lambda) + \varepsilon|\lambda|), \quad i = 1, \dots, q.$$

Рассмотрим систему $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ из k q -функций экспоненциального типа. Выпуклый q -компакт D является *определяющим для системы $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$* , если D является определяющим для каждой q -функции $u^{(i)}$, $i = 1, \dots, k$.

3. Формулировка теоремы для выпуклых q -областей.

В этом пункте предполагается, что Ω – выпуклая q -область. Рассмотрим часть Λ' квазиспектрального множества Λ инвариантного подпространства W . Будем предполагать, что замкнутое множество $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ разделяет Λ' и Λ'' ; если при этом Λ'' пусто, т.е. $\Lambda' = \Lambda$, то Γ окружает Λ (п. 2). Пусть I – аннуляторный подмодуль подпространства W ; $I(\lambda)$ – локальный подмодуль (см. § 2, п. 2), порождаемый I в точке λ ;

$$u^{(1)} = (u_1^{(1)}, \dots, u_q^{(1)}), \dots, u^{(q)} = (u_1^{(q)}, \dots, u_q^{(q)}) \quad (3)$$

– независимая система q -функций экспоненциального типа; D – определяющий q -компакт системы $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$; Δ – определитель размера $q \times q$, состоящий из векторов-столбцов $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$; Δ_{ij} – алгебраическое дополнение элемента, стоящего на пересечении i -й строки и j -го столбца. В случае $q = 1$ система (3) сводится к одной функции u , причем $\Delta_{ij} = 1$, $\Delta = u$.

Напомним, что для множества $L \subset \mathbb{C}^n$ и множества направлений $\Theta \subset S^{2n-1}$ $\text{conv}_\Theta L$ обозначает Θ -выпуклую оболочку L (п. 4 § 1). Если $L = (L_1, \dots, L_q)$ – q -множество, то $\text{conv}_\Theta L := (\text{conv}_\Theta L_1, \dots, \text{conv}_\Theta L_q)$. Для неограниченного множества $L \subset \mathbb{C}^n$ Θ_L обозначает предельное множество направлений этого множества (п. 4 § 4); $\Theta_L^* = \{\tau \in S^{2n-1} : \bar{\tau} \in \Theta_L\}$ – множество сопряженных направлений.

ТЕОРЕМА 9.1. Пусть выполняются условия:

- а) $\ln T_\Gamma(z) \geq -\sigma(z)$, $z \in \Gamma^{(c)}$, где $\sigma(z)$ – положительная функция ограниченного колебания (§ 8, п. 2);
- б)

$$u^{(1)}, \dots, u^{(q)} \in I(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda; \quad (4)$$

- в) для некоторого выпуклого q -компакта $d = (d_1, \dots, d_q)$ и некоторого выпуклого компакта $\omega \subset \mathbb{C}^n$ выполняются оценки

$$\ln \left| \frac{\Delta_{ij}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right| + H_{d_i}(\lambda) + \sigma(\lambda) \leq H_\omega(\lambda) + o(|\lambda|), \quad (5)$$

$\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in \Gamma$, $i, j = 1, \dots, q$;

- г) выполняется включение

$$D + \omega \subset \Omega.$$

Тогда существует проектор Дирихле

$$p: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \Omega'), \quad (6)$$

где $\Omega' = \text{conv}_{\Theta_{\Gamma}^*} \text{Int } d \cap \text{conv}_{\Theta_{Z'}^*} \Omega$, Z' – объединение компонент связности $\Gamma^{(c)}$, пересекающихся с Λ' .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие в) следует понимать в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ существует константа C такая, что всюду в Γ выполняются неравенства

$$\ln \left| \frac{\Delta_{ij}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right| + H_{d_i}(\lambda) + \sigma(\lambda) \leq H_{\omega}(\lambda) + \varepsilon|\lambda| + C,$$

$i, j = 1, \dots, q$. Отсюда, между прочим, следует, что функции $\Delta_{ij}(\lambda)/\Delta(\lambda)$ голоморфны в некоторой окрестности Γ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $q = 1$ система $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$ сводится к одной функции u экспоненциального типа, удовлетворяющей условию

$$u \in I(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda,$$

а неравенства (5) – к оценке снизу

$$\ln |u(\lambda)| \geq H_d(\lambda) - H_{\omega}(\lambda) + \sigma(\lambda) + o(|\lambda|),$$

$\lambda \rightarrow \infty, \lambda \in \Gamma$.

4. Вспомогательные леммы.

ЛЕММА 1. Пусть D – определяющий q -компакт системы $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$. Если для этой системы вдоль множества Γ выполняются оценки (5), то

$$d \subset \text{conv}_{\Theta_{\Gamma}^*}(D + \omega).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $C > 0$ такая, что неравенства

$$\ln \left| \frac{\Delta_{ij}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right| + H_{d_i}(\lambda) + \sigma(\lambda) \leq H_{\omega}(\lambda) + \varepsilon|\lambda| + C, \quad i, j = 1, \dots, q,$$

выполняются на всем Γ . Тем более на том же множестве выполняются неравенства

$$\ln \left| \frac{\Delta_{ij}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right| + H_{d_i}(\lambda) \leq H_{\omega}(\lambda) + \varepsilon|\lambda| + C, \quad i, j = 1, \dots, q. \quad (7)$$

По известному правилу разложения определителя по строкам имеем

$$\sum_{j=1}^q \frac{\Delta_{ij}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} u_i^{(j)}(\lambda) = 1, \quad i = 1, \dots, q.$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{q} \leq \max_j \left| \frac{\Delta_{ij}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right| \max_j |u_i^{(j)}(\lambda)|. \quad (8)$$

Согласно свойству определяющего q -компакта существует константа C_ε такая, что

$$|u_i^{(j)}(\lambda)| \leq C_\varepsilon \exp(H_{D_i}(\lambda) + \varepsilon|\lambda|), \quad i, j = 1, \dots, q. \quad (9)$$

Используя (7), (9), продолжим неравенство (8):

$$\frac{1}{q} \leq \text{const} \cdot \exp(-H_{d_i}(\lambda) + H_\omega(\lambda) + H_{D_i}(\lambda) + 2\varepsilon|\lambda|).$$

Перепишем это неравенство в виде

$$H_{d_i}(\lambda) \leq H_{D_i+\omega}(\lambda) + 2\varepsilon|\lambda| + \text{const}, \quad \lambda \in \Gamma, \quad (10)$$

$i = 1, \dots, q$. Пусть $\tau_0 \in \Theta_\Gamma$. Существует последовательность точек $\lambda_n \in \Gamma$, $\lambda_n \rightarrow \infty$, такая, что $\tau_n = \lambda_n/|\lambda_n| \rightarrow \tau_0$. Используя неравенство (10), имеем

$$\begin{aligned} |\lambda_n| H_{d_i}(\tau_0) &= |\lambda_n| (H_{d_i}(\tau_0) - H_{d_i}(\tau_n)) + |\lambda_n| H_{d_i}(\tau_n) \\ &\leq |\lambda_n| (H_{d_i}(\tau_0) - H_{d_i}(\tau_n)) + H_{D_i+\omega}(\lambda_n) + 2\varepsilon|\lambda_n| + \text{const} \\ &\leq |\lambda_n| (H_{d_i}(\tau_0) - H_{d_i}(\tau_n)) + |\lambda_n| (H_{D_i+\omega}(\tau_n) - H_{D_i+\omega}(\tau_0)) \\ &\quad + |\lambda_n| H_{D_i+\omega}(\tau_0) + 2\varepsilon|\lambda_n| + \text{const}. \end{aligned} \quad (11)$$

В силу равномерной непрерывности $H_{d_i}(\lambda)$ и $H_{D_i+\omega}(\lambda)$ на сфере S^{2n-1}

$$H_{d_i}(\tau_0) - H_{d_i}(\tau_n) \rightarrow 0, \quad H_{D_i+\omega}(\tau_n) - H_{D_i+\omega}(\tau_0) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Поделим крайние члены в цепочке неравенств (11) на λ_n и устремим n к бесконечности. Совершая предельный переход, получим

$$H_{d_i}(\tau_0) \leq H_{D_i+\omega}(\tau_0) + 2\varepsilon.$$

Это неравенство справедливо при любом $i = 1, \dots, q$, любом $\varepsilon > 0$ и любом $\tau_0 \in \Theta_\Gamma$. Следовательно,

$$H_{d_i}(\tau) \leq H_{D_i+\omega}(\tau) \quad \forall \tau \in \Theta_\Gamma.$$

В терминах опорных функций вещественного анализа эти неравенства записываются в виде

$$H_{d_i}^{(r)}(\tau) \leq H_{D_i+\omega}^{(r)}(\tau) \quad \forall \tau \in \Theta_\Gamma^*, \quad i = 1, \dots, q,$$

или, что то же самое, в виде

$$H_d^{(r)}(\tau) \leq H_{D+\omega}^{(r)}(\tau) \quad \forall \tau \in \Theta_\Gamma^*.$$

В геометрических терминах это равносильно включению

$$\text{conv}_{\Theta_\Gamma^*} d \subset \text{conv}_{\Theta_\Gamma^*} (D + \omega).$$

Тем более будет выполняться включение

$$d \subset \text{conv}_{\Theta_\Gamma^*} (D + \omega).$$

ЛЕММА 2. Пусть Ω – выпуклая q -область, M – неограниченное множество в $\mathbb{C}^n$ с множеством предельных направлений Θ_M . Тогда для любого q -компакта

$$K' \subset \text{conv}_{\Theta_M^*} \Omega \quad (12)$$

существуют q -компакт $K \subset \Omega$ и константы $\varepsilon > 0$, $c < \infty$ такие, что

$$H_{K'}(z) \leq H_K(z) - \varepsilon|z| + c \quad (13)$$

при $z \in M$; здесь $H_{K'}$, H_K – опорные функции q -компактов K' , K в смысле комплексного анализа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_q)$, $K' = (K'_1, \dots, K'_q)$, $M^* = \{z \in \mathbb{C}^n : \bar{z} \in M\}$. Очевидно, множество предельных направлений M^* совпадает с Θ_M^* . Включение (12) означает, что

$$K'_i \subset \text{conv}_{\Theta_M^*} \Omega_i, \quad i = 1, \dots, q.$$

Согласно предложению 4.5 существуют компакты $K_i \subset \Omega_i$ и константы $\varepsilon_i, c_i > 0$ такие, что

$$H_{K'_i}^{(r)}(z) \leq H_{K_i}^{(r)}(z) - \varepsilon_i|z| + c_i \quad \forall z \in M^*, \quad (14)$$

где $H_{K'_i}^{(r)}$, $H_{K_i}^{(r)}$ – опорные функции компактов K'_i , K_i в смысле вещественного анализа. В терминах опорных функций комплексного анализа неравенства (14) переписываются в виде

$$H_{K'_i}(z) \leq H_{K_i}(z) - \varepsilon_i|z| + c_i \quad \forall z \in M, \quad i = 1, \dots, q.$$

Эти неравенства будут выполняться тем более, если ε_i заменить на $\varepsilon = \min \varepsilon_i$, а c_i – на $c = \max c_i$. Остается отметить, что неравенство (13) есть сокращенная запись последних q неравенств.

5. Доказательство теоремы 9.1.

Если $\text{Int } d = \emptyset$, то в соответствии с соглашением п. 1 §6 проектор Дирихле (6) существует; поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $\text{Int } d \neq \emptyset$. Дальнейшие рассуждения разобьем на 6 пунктов.

1°. Пусть I, I' – аннуляторные подмодули подпространств W, W' соответственно. Согласно предложению 7.1 нужно построить непрерывный мономорфизм Дирихле

$$q: P'/I' \rightarrow P/I.$$

Для этого согласно предложению 7.2 достаточно для любого выпуклого q -компакта $K' \subset \Omega'$ указать выпуклый q -компакт K со следующим свойством: для любой q -функции $f' \in P'$ существует q -функция $f \in P$, удовлетворяющая условиям:

- 1) $f \equiv f' \pmod{I(\lambda)} \quad \forall \lambda \in \Lambda', \quad f \equiv 0 \pmod{I(\lambda)} \quad \forall \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'.$
- 2) $\|f\|_K \leq \text{const} \|f'\|_{K'},$ где константа не зависит от f, f' ;

2°. Фиксируем выпуклый q -компакт $K' \subset \Omega'$. Ясно, что

$$K' \subset \text{conv}_{\Theta_{Z'}^*} \Omega, \quad (15)$$

$$K' \subset \text{conv}_{\Theta_\Gamma^*} \text{Int } d.$$

По лемме 1

$$d \subset \text{conv}_{\Theta_\Gamma^*} (D + \omega).$$

Отсюда, используя условие γ) теоремы, имеем

$$\text{Int } d \subset d \subset \text{conv}_{\Theta_\Gamma^*} (D + \omega) \subset \text{conv}_{\Theta_\Gamma^*} \Omega.$$

Значит, $\text{conv}_{\Theta_\Gamma^*} \text{Int } d \subset \text{conv}_{\Theta_\Gamma^*} \Omega$. Следовательно,

$$K' \subset \text{conv}_{\Theta_\Gamma^*} \Omega. \quad (16)$$

Применяя лемму 2 к включениям (15), (16), заключаем, что существуют q -компакты $K_1, K_2 \subset \Omega$ такие, что

$$H_{K'}(z) \leq H_{K_1}(z) - \varepsilon_1 |z| + C_1 \quad \forall z \in Z', \quad (17)$$

$$H_{K'}(z) \leq H_{K_2}(z) - \varepsilon_2 |z| + C_2 \quad \forall z \in \Gamma. \quad (18)$$

Пусть K – выпуклый q -компакт в Ω , содержащий одновременно K_1 и K_2 . Тогда $H_{K_1}(z), H_{K_2}(z) \leq H_K(z)$ и неравенства (17), (18) дают

$$H_{K'}(z) \leq H_K(z) - \varepsilon |z| + C, \quad z \in Z' \cup \Gamma, \quad (19)$$

где $\varepsilon = \min[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$, $C = \max[C_1, C_2]$. Заметим, что, поскольку $D + \omega$ компактно вложено в Ω , q -компакт K можно выбрать таким образом, что

$$D + \omega \in K. \quad (20)$$

Итак, по q -компакту $K' \subset \Omega'$ можем подобрать q -компакт $K \subset \Omega$ так, что выполняются условия (19), (20).

3°. Замкнутое множество Γ разделяет Λ' и Λ'' , т.е. $\Lambda' \subset Z'$, $\Lambda'' \subset Z''$, где Z' , Z'' – непересекающиеся открытые множества, составленные из компонент связности $\Gamma^{(c)}$. В качестве Z'' возьмем объединение *всех* компонент связности $\Gamma^{(c)}$, не пересекающихся с Λ' . Далее, по условию

$$\ln T_\Gamma(z) \geq -\sigma(z), \quad z \in \Gamma^{(c)}, \quad (21)$$

где $\sigma(z)$ – положительная функция ограниченного колебания. Из условия (21) следует (см. п. 1), что для любой точки $z \in Z'$

$$\ln \text{dist}(z, Z'') \geq -\sigma(z).$$

По следствию к предложению 8.2 существует положительная бесконечно дифференцируемая функция χ , разделяющая Z'' и Z' , т.е.

$$\chi(z) = \begin{cases} 1, & z \in Z', \\ 0, & z \in Z'', \end{cases}$$

и такая, что

$$|\operatorname{grad} \chi|(z) \leq \operatorname{const} e^{\sigma(z)}. \quad (22)$$

4°. Фиксируем q -функцию $f' \in P'$. Наша цель – построить q -функцию f , которая удовлетворяет условиям 1), 2) п. 1°. Используя независимость системы $u^{(1)}, \dots, u^{(q)} \in I$, участвующей в условии б) теоремы, напомним представление

$$f' = \sum_{j=1}^q \frac{\Delta_j(f')}{\Delta} u^{(j)}.$$

Здесь Δ – определитель, составленный из векторов-столбцов $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$; $\Delta_j(f')$ – определитель, полученный из Δ заменой j -го столбца столбцом f' . Рассмотрим q -функцию

$$\widehat{f} = \chi f' = \sum_{j=1}^q l_j u^{(j)}, \quad (23)$$

где $l_j = \chi \frac{\Delta_j(f')}{\Delta}$. Ясно, что q -функция $\widehat{f}$ совпадает с f' на Z' , равна нулю на Z'' , и $|\widehat{f}| \leq |f'|$ везде в $\mathbb{C}^n$; более того, $\widehat{f}$ является голоморфной на $Z' \cup Z''$ и удовлетворяет условиям

$$\widehat{f} \equiv f' \pmod{I(\lambda)}, \quad \lambda \in \Lambda'; \quad \widehat{f} \equiv 0 \pmod{I(\lambda)}, \quad \lambda \in \Lambda''. \quad (24)$$

Неравенство (19) влечет неравенство

$$H_{K'}(z) \leq H_K(z) + C, \quad z \in Z' \cup \Gamma,$$

которое может быть расписано покомпонентно:

$$H_{K'_i}(z) \leq H_{K_i}(z) + C, \quad z \in Z' \cup \Gamma, \quad i = 1, \dots, q.$$

Пользуясь этими неравенствами и тем фактом, что $\widehat{f} = 0$ вне $Z' \cup \Gamma$, имеем

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}\|_K &= \sum_{i=1}^q \sup_{\mathbb{C}^n} \frac{|\widehat{f}_i(z)|}{\exp H_{K_i}(z)} \leq \operatorname{const} \sum_{i=1}^q \sup_{Z' \cup \Gamma} \frac{|f'_i(z)|}{\exp H_{K'_i}(z)} \\ &\leq \operatorname{const} \sum_{i=1}^q \sup_{\mathbb{C}^n} \frac{|f'_i(z)|}{\exp H_{K'_i}(z)} = \operatorname{const} \|f'\|_{K'}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\|\widehat{f}\|_K \leq \operatorname{const} \|f'\|_{K'}, \quad (25)$$

где константа не зависит от $\widehat{f}, f'$.

5°. Сравнения (24) и неравенство (25) означают, что q -функция $\widehat{f}$ удовлетворяет требованиям 1), 2) п. 1°. К сожалению, функция $\widehat{f}$ не является целой, ее аналитичность нарушается вдоль Γ . Цель дальнейших рассуждений – подправить $\widehat{f}$ так, чтобы она стала целой и чтобы при этом сохранились условия (24), (25). Будем действовать по следующему плану. Заменяем коэффициенты l_j в представлении (23) на разности $l_j - \widehat{l}_j$, где $\widehat{l}_j$ – бесконечно дифференцируемые функции, на которые наложены следующие требования:

- 1) $\widehat{l}_j$ голоморфны вне Γ ;
- 2) разности $l_j - \widehat{l}_j$ – целые функции;
- 3) $\widehat{l}_j$ столь “малы”, что функция

$$f = \sum_{j=1}^q (l_j - \widehat{l}_j) u^{(j)} \quad (26)$$

наследует неравенство (25).

В силу того, что $\widehat{l}_j$ голоморфны вне Γ , а q -функции $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$ удовлетворяют условию (4), q -функция f наследует также условие (24). Таким образом, задача сводится к построению функций $\widehat{l}_j$ с перечисленными свойствами. Мы это осуществим, беря в качестве $\widehat{l}_j$ решения с оценками уравнений Коши–Римана $\bar{\partial} \widehat{l}_j = \omega_j, j = 1, \dots, q$, где

$$\omega_j = \sum_i \frac{\bar{\partial} l_j}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i$$

– дифференциальная форма с коэффициентами

$$\omega_{ji} = \frac{\bar{\partial} l_j}{\partial \bar{z}_i} = \frac{\Delta_j(f')}{\Delta} \cdot \frac{\bar{\partial}}{\partial \bar{z}_i} \chi.$$

Из условия в) теоремы следует, что отношения $\Delta_j(f')/\Delta$ голоморфны в окрестности Γ ; кроме того, $\frac{\bar{\partial} \chi}{\partial \bar{z}_i}$ – бесконечно дифференцируемые функции, обращающиеся в нуль вне Γ . Поэтому ω_j – дифференциальные формы на $\mathbb{C}^n$ класса C^∞ , обращающиеся в нуль вне Γ . Отметим также, что формы ω_j являются замкнутыми. Для дифференциальных форм $\omega_j = \sum \omega_{ji} d\bar{z}_i$ будем использовать стандартное обозначение

$$|\omega_j| = \sqrt{\sum_{i=1}^q |\omega_{ji}|^2}.$$

Оценим рост $|\omega_j|$ вдоль Γ . Используя оценку (22) для $\text{grad } \chi$, имеем

$$\begin{aligned} |\omega_j|(\lambda) &= \left| \frac{\Delta_j(f')(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right| \cdot |\bar{\partial} \chi(\lambda)| \leq \left| \frac{\Delta_j(f')(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right| \cdot |\text{grad } \chi|(\lambda) \\ &\leq \text{const} \cdot \exp \sigma(\lambda) \cdot \left| \frac{\Delta_j(f')(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right|, \end{aligned} \quad (27)$$

где константа зависит только от размерности и от σ . Далее,

$$\left| \frac{\Delta_j(f')(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right| \leq \sum_{i=1}^q \left| \frac{\Delta_{ij}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right| \cdot |f'_i(\lambda)|.$$

Из неравенств (27) и условия в) теоремы следует при $\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} |\omega_j|(\lambda) &\leq \text{const} e^{\sigma(\lambda) + o(|\lambda|)} \sum_{i=1}^q |f'_i(\lambda)| \exp(-H_{d_i}(\lambda) + H_\omega(\lambda) - \sigma(\lambda)) \\ &\leq e^{o(|\lambda|)} \sum_{i=1}^q \frac{|f'_i(\lambda)|}{\exp H_{K'_i}(\lambda)} \exp(-H_{d_i}(\lambda) + H_\omega(\lambda) + H_{K'_i}(\lambda)) \\ &\leq \|f'\|_{K'} e^{o(|\lambda|)} \sum_{i=1}^q \exp(H_{K'_i}(\lambda) + H_\omega(\lambda) - H_{d_i}(\lambda)). \end{aligned} \quad (28)$$

Далее, q -компакт K' принадлежит $\text{conv}_{\Theta_\Gamma^*} \text{Int } d$. По лемме 2 существуют q -компакт $K_0 \subset \text{Int } d$ и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$H_{K'}(\lambda) \leq H_{K_0}(\lambda) - \varepsilon|\lambda| + \text{const}$$

при $\lambda \in \Gamma$. Так как $K_0 \subset \text{Int } d$, то $H_{K_0}(\lambda) \leq H_d(\lambda)$; поэтому при $\lambda \in \Gamma$ имеем

$$H_{K'}(\lambda) \leq H_d(\lambda) - \varepsilon|\lambda| + \text{const}.$$

Продолжая оценку (28), получаем

$$\begin{aligned} |\omega_j|(\lambda) &\leq \text{const} \|f'\|_{K'} \exp\{o(|\lambda|) + H_\omega(\lambda) - \varepsilon|\lambda|\} \\ &\leq \text{const} \|f'\|_{K'} \exp(H_\omega(\lambda) - (\varepsilon/2)|\lambda|). \end{aligned} \quad (29)$$

Эта оценка верна при $\lambda \in \Gamma$. Но $\omega_j = 0$ вне Γ . Поэтому оценка (29) верна на всем $\mathbb{C}^n$. Из этой оценки следует

$$\int_{\mathbb{C}^n} |\omega_j|^2(\lambda) e^{-2H_\omega(\lambda)} ds \leq \text{const} \|f'\|_{K'}^2, \quad (30)$$

где ds – элемент меры Лебега.

Согласно известной оценке Л. Хёрмандера [36; теорема 4.4.2] существует решение $\widehat{l}_j$ уравнения $\bar{\partial} \widehat{l}_j = \omega_j$ такое, что

$$\int_{\mathbb{C}^n} \frac{|\widehat{l}_j(\lambda)|^2 e^{-2H_\omega(\lambda)}}{(1 + |\lambda|^2)^2} ds \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{C}^n} |\omega_j|^2(\lambda) e^{-2H_\omega(\lambda)} ds.$$

Продолжая это неравенство с помощью неравенства (30), получим

$$\int_{\mathbb{C}^n} \frac{|\widehat{l}_j(\lambda)|^2 e^{-2H_\omega(\lambda)}}{(1 + |\lambda|^2)^2} ds \leq \text{const} \|f'\|_{K'}^2. \quad (31)$$

В формуле (26) для f мы будем брать в качестве $\widehat{l}_j$ эти решения.

6°. Оценим q -функцию $f = (f_1, \dots, f_q)$. Обозначим через $e(\lambda)$ шар с центром в λ единичного радиуса. $|e(\lambda)|$ обозначает объем этого шара. В силу субгармоничности $|f_i|^2$ имеем

$$|f_i(\lambda)| \leq \frac{1}{|e(\lambda)|^{1/2}} \left(\int_{e(\lambda)} |f_i|^2 ds \right)^{1/2}.$$

Компоненты q -функций $f = (f_1, \dots, f_q)$, $\widehat{f} = (\widehat{f}_1, \dots, \widehat{f}_q)$, $u^{(j)} = (u_1^{(j)}, \dots, u_q^{(j)})$ связаны соотношениями (см. (26))

$$f_i = \widehat{f}_i - \sum_{j=1}^q \widehat{l}_j u_i^{(j)}, \quad i = 1, \dots, q.$$

Используя неравенство Минковского, получаем

$$\begin{aligned} |f_i(\lambda)| &\leq \frac{1}{|e(\lambda)|^{1/2}} \left(\int_{e(\lambda)} |f_i|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{|e(\lambda)|^{1/2}} \left(\int_{e(\lambda)} |\widehat{f}_i|^2 ds \right)^{1/2} + \frac{1}{|e(\lambda)|^{1/2}} \sum_{j=1}^q \left(\int_{e(\lambda)} |\widehat{l}_j u_i^{(j)}|^2 ds \right)^{1/2} \\ &= J_i^0(\lambda) + \sum_{j=1}^q J_i^j(\lambda). \end{aligned}$$

Напомним, что K_i обозначает i -ю компоненту q -компакта K . Имеем

$$\begin{aligned} J_i^0(\lambda) &= \frac{1}{|e(\lambda)|^{1/2}} \left(\int_{e(\lambda)} (|\widehat{f}_i(\zeta)| \exp(-H_{K_i}(\zeta)))^2 \exp(2H_{K_i}(\zeta)) ds \right)^{1/2} \\ &\leq \exp\left(\max_{\zeta \in e(\lambda)} H_{K_i}(\zeta)\right) \cdot \|\widehat{f}_i\|_{K_i} \\ &\leq \text{const} \exp(H_{K_i}(\lambda)) \|\widehat{f}\|_K \leq \text{const} \exp(H_{K_i}(\lambda)) \|f'\|_{K'}. \end{aligned} \quad (32)$$

В последних двух неравенствах мы воспользовались полуаддитивностью $H_{K_i}(\lambda)$ и неравенством (25). Оценим $J_i^{(j)}(\lambda)$. Имеем

$$\begin{aligned} |J_i^{(j)}(\lambda)| &= \frac{1}{|e(\lambda)|^{1/2}} \left(\int_{e(\lambda)} |\widehat{l}_j|^2 |u_i^{(j)}|^2 ds \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{|e(\lambda)|^{1/2}} \left(\int_{e(\lambda)} \frac{|\widehat{l}_j(\zeta)|^2}{(1+|\zeta|^2)^2} |u_i^{(j)}(\zeta)|^2 (1+|\zeta|^2)^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (33)$$

В силу компактности вложения $D + \omega \Subset K$ (см. п. 2°) существует $\delta > 0$ такое, что

$$H_{D+\omega}(\lambda) \leq H_K(\lambda) - \delta|\lambda|, \quad (34)$$

а поскольку D — определяющий q -компакт системы $u^{(1)}, \dots, u^{(a)}$, справедлива оценка

$$|u_i^{(j)}(\lambda)(1+|\lambda|^2)| \leq \text{const} \cdot \exp(H_{D_i}(\lambda) + \delta|\lambda|).$$

Используя равенства (33) и полуаддитивность $H_{D_i}(\lambda)$, $H_\omega(\lambda)$, $|\lambda|$, оценим

$$\begin{aligned} |J_i^{(j)}(\lambda)| &\leq \text{const} \cdot \exp(H_{D_i}(\lambda) + \delta|\lambda|) \cdot \left(\int_{e(\lambda)} \frac{|\widehat{l}_j(\zeta)|^2}{(1 + |\zeta|^2)^2} ds_\zeta \right)^{1/2} \\ &\leq \text{const} \cdot \exp(H_{D_i}(\lambda) + H_\omega(\lambda) + \delta|\lambda|) \cdot \left(\int_{e(\lambda)} \frac{|\widehat{l}_j(\zeta)|^2 e^{-2H_\omega(\zeta)}}{(1 + |\zeta|^2)^2} ds_\zeta \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Заметим, что $H_{D_i}(\lambda) + H_\omega(\lambda) = H_{D_i+\omega}(\lambda)$. С помощью неравенств (31), (34) получаем

$$|J_i^{(j)}(\lambda)| \leq \text{const} \cdot \exp H_{K_i}(\lambda) \|f'\|_{K'}. \quad (35)$$

Соединение неравенств (32), (35) дает

$$|f_i(\lambda)| \leq \text{const} \|f'\|_{K'} \exp H_{K_i}(\lambda).$$

Это неравенство справедливо при любом $i = 1, \dots, q$. Поэтому

$$\|f\|_K = \sum_{i=1}^q \sup_{\lambda \in \mathbb{C}^n} \frac{|f_i(\lambda)|}{\exp H_{K_i}(\lambda)} \leq \text{const} \|f'\|_{K'},$$

где константа не зависит от f, f' . Итак, цель, поставленная в п. 1° доказательства, достигнута: для любого элемента $f' \in P'$ существует элемент $f \in P$, связанный с f' условиями 1), 2) п. 1°.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 9.2. Пусть выполняются условия а), б) и в) теоремы 9.1 и, кроме того, выполняется условие

г)

$$\text{Int } d \subset \text{conv}_{\Theta_{Z'}^*} \Omega. \quad (36)$$

Тогда существует проектор Дирихле

$$p: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \Omega''), \quad (37)$$

где $\Omega'' = \text{conv}_{\Theta_{\Gamma \cup Z'}^*} \text{Int } d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение (36) влечет

$$\text{conv}_{\Theta_{Z'}^*} \text{Int } d \subset \text{conv}_{\Theta_{Z'}^*} \Omega.$$

Используя это включение, имеем

$$\Omega'' = \text{conv}_{\Theta_{\Gamma \cup Z'}^*} \text{Int } d = \text{conv}_{\Theta_\Gamma^*} \text{Int } d \cap \text{conv}_{\Theta_{Z'}^*} \text{Int } d \subset \text{conv}_{\Theta_\Gamma^*} \text{Int } d \cap \text{conv}_{\Theta_{Z'}^*} \Omega = \Omega'.$$

Согласно предложению 6.8 существование проектора Дирихле (37) следует из существования проектора Дирихле (6).

§ 10. Существование проекторов Дирихле в случае невыпуклых q -областей

1. Пусть Ω – открытое q -множество, W – инвариантное подпространство в $H(\Omega)$, допускающее спектральный синтез, I – аннуляторный подмодуль W . Так как W допускает спектральный синтез, то I – обильный подмодуль (§ 2, п. 2). $I(\lambda)$ – локальный подмодуль, порождаемый I в точке λ (§ 2, п. 2).

Далее, пусть Λ – квазиспектральное множество подпространства W ; Λ' – часть Λ ; $\Lambda'' = \Lambda \setminus \Lambda'$; Γ – замкнутое множество, разделяющее Λ' , Λ'' ; $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$ – независимая система q -функций экспоненциального типа; D – определяющий q -компакт системы $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$; определители Δ, Δ_{ij} – те же, что и в условии в) теоремы 9.1.

ТЕОРЕМА 10.1. Пусть выполняются следующие условия:

- 1) $\ln T_\Gamma(z) \geq -\sigma(z)$, $z \in \Gamma^{(c)}$, где $\sigma(z)$ – положительная функция ограниченного колебания;
- 2) имеют место включения

$$u^{(1)}, \dots, u^{(q)} \in I(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda; \quad (1)$$

- 3) для некоторого выпуклого q -компакта $d = (d_1, \dots, d_q)$ и некоторого выпуклого компакта $\omega \subset \mathbb{C}^n$ выполняются оценки

$$\ln \left| \frac{\Delta_{ij}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right| + H_{d_i}(\lambda) + \sigma(\lambda) \leq H_\omega(\lambda) + o(|\lambda|), \quad (2)$$

$$i, j = 1, \dots, q.$$

Тогда существует проектор Дирихле

$$p: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \Omega'), \quad (3)$$

где

$$\Omega' = \text{conv}_{(A, B)} \Omega, \quad \text{если } \Lambda' = \Lambda, \quad u \quad (4)$$

$$\Omega' = \text{conv}_{(A, B)}((\Omega \ominus A) + B), \quad \text{если } \Lambda' \neq \Lambda. \quad (5)$$

Здесь $A = D + \omega$, $B = \text{conv}_{\Theta_\Gamma^*} d \cap \text{conv}_{\Theta_{Z'}^*}(D + \omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. Сначала докажем существование проектора Дирихле при дополнительных условиях

$$D + \omega \subset \Omega, \quad (6)$$

$$\text{Int}(D + \omega) \neq \emptyset, \quad (7)$$

$$\text{Int } d \neq \emptyset. \quad (8)$$

Рассмотрим убывающую последовательность выпуклых q -областей

$$\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \dots,$$

сходящуюся к $D + \omega$. Положим $H_n = H(\Omega_n)$; $P_n = P(\Omega_n)$ – модуль, ассоциированный с Ω_n ; $W_n = W(\Lambda, \Omega_n)$ – инвариантное подпространство в H_n , допускающее спектральный синтез с тем же квазиспектром (см. § 2, п. 6) и квазиспектральным множеством, что и W ; I_n – аннуляторный подмодуль подпространства W_n .

Так как W_n допускает спектральный синтез, то подмодуль I_n является обильным (в P_n); более того, по предложению 2.4 Λ является квазиулевым множеством этого подмодуля. Утверждаем, что при любом $n = 1, 2, \dots$ q -функции $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$ удовлетворяют условию

$$u^{(1)}, \dots, u^{(q)} \in I_n(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda, \quad (9)$$

где $I_n(\lambda)$ – локальный подмодуль, порождаемый I_n в точке λ .

Действительно, по условию (1) $u^{(i)} \in I(\lambda)$, $i = 1, \dots, q$; так как W и W_n имеют одинаковые квазиспектры со спектральным множеством Λ , то по предложению 2.5 $I(\lambda) = I_n(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$; включения (9) следуют отсюда очевидным образом.

При любом $n = 1, 2, \dots$ подпространство W_n удовлетворяет условиям а)–г) теоремы 9.1. Действительно, условие 1) совпадает с условием а); система $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$ удовлетворяет условию (9), совпадающему с условием б); условие 3) совпадает с условием в); включение (6) обеспечивает условие г). Применяя теорему 9.1 к подпространствам W_n , заключаем, что для каждого $n = 1, 2, \dots$ существует проектор Дирихле

$$p'_n: W(\Lambda, \Omega_n) \rightarrow W(\Lambda', B_n),$$

где $B_n = \text{conv}_{\Theta_\Gamma^*} \text{Int } d \cap \text{conv}_{\Theta_{Z'}^*} \Omega_n$. Но $\text{Int}(D + \omega) \subset \Omega_n$. По предложению 6.8 существуют проекторы Дирихле

$$p_n: W(\Lambda, \Omega_n) \rightarrow W(\Lambda', B^0), \quad (10)$$

где $B^0 = \text{conv}_{\Theta_\Gamma^*} \text{Int } d \cap \text{conv}_{\Theta_{Z'}^*} \text{Int}(D + \omega)$. По предложению 6.15 существование проекторов (10) влечет существование проектора Дирихле

$$p: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda, \widehat{\Omega}), \quad (11)$$

где $\widehat{\Omega} = \text{conv}_{(A, B^0)} \Omega$, если $\Lambda' = \Lambda$, и $\widehat{\Omega} = \text{conv}_{(A, B^0)}((\Omega \ominus A) + B^0)$, если $\Lambda' \neq \Lambda$. Положим

$$\begin{aligned} B_1^0 &= \text{conv}_{\Theta_\Gamma^*} \text{Int } d, & B_1 &= \text{conv}_{\Theta_\Gamma^*} d, \\ B_2^0 &= \text{conv}_{\Theta_{Z'}^*} \text{Int}(D + \omega), & B_2 &= \text{conv}_{\Theta_{Z'}^*} (D + \omega). \end{aligned}$$

По предложению 4.2 замыкания $\overline{B}_1^0, \overline{B}_2^0$ множеств B_1^0, B_2^0 совпадают с B_1, B_2 соответственно. Поэтому

$$\overline{B}^0 = \overline{B}_1^0 \cap \overline{B}_2^0 = B_1 \cap B_2 = B.$$

По свойству 2 геометрической разности (см. § 5, п. 1) $(\Omega \ominus A) + B^0 = (\Omega \ominus A) + B$, а по свойству 8 нестандартной выпуклости (§ 5, п. 2) (A, B^0) -выпуклая оболочка любого открытого q -множества совпадает с его (A, B) -выпуклой оболочкой. Поэтому q -множество $\widehat{\Omega}$ совпадает с q -множеством Ω' , определенным по формулам (4), (5), а проектор (11) совпадает с проектором Дирихле (3).

Итак, при дополнительных условиях (6)–(8) утверждение теоремы доказано.

2°. Откажемся от условий (7), (8) и докажем утверждение теоремы при условии (6). Таким образом, d и $D + \omega$ могут иметь пустые внутренности. Рассмотрим убывающую последовательность замкнутых шаров $b_1 \supset b_2 \supset \dots$ с центром в начале координат и с положительными радиусами, сходящимися к 0. Полагаем $d_n = d + b_n$, $\omega_n = \omega + b_n$. Заметим, что $\text{Int } d_n \neq \emptyset$, $\text{Int}(D + \omega_n) \neq \emptyset$, $n = 1, 2, \dots$. Поскольку $D + \omega$ компактно принадлежит Ω , радиусы шаров b_n можно выбрать столь малыми, чтобы $D + \omega_n \subset \Omega$, $n = 1, 2, \dots$. Итак, ω_n, d_n удовлетворяют условиям, аналогичным (6)–(8):

$$D + \omega_n \subset \Omega, \quad \text{Int}(D + \omega_n) \neq \emptyset, \quad \text{Int } d_n \neq \emptyset.$$

Пусть $H_{b_n}(\lambda)$ — опорная функция b_n в смысле комплексного анализа. Прибавим $H_{b_n}(\lambda)$ к обеим частям неравенств (2). Мы получим аналогичные неравенства, в которых ω заменено на ω_n , а d — на $d_n = d + \omega_n$. Из вышеизложенного следует, что $D + \omega_n, d_n$ удовлетворяют условиям п. 1°, при которых утверждение теоремы уже доказано. Это позволяет заключить, что для каждого $n = 1, 2, \dots$ существует проектор Дирихле

$$\hat{p}_n: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \hat{\Omega}_n), \quad (12)$$

где $\hat{\Omega}_n = \text{conv}_{(A_n, B_n)} \Omega$, если $\Lambda' = \Lambda$, и

$$\hat{\Omega}_n = \text{conv}_{(A_n, B_n)}((\Omega \ominus A_n) + B_n), \quad (13)$$

если $\Lambda' \neq \Lambda$. Здесь $A_n = D + \omega_n$, $B_n = \text{conv}_{\Theta_\Gamma^*} d_n \cap \text{conv}_{\Theta_{Z'}^*}(D + \omega_n)$.

Далее будем рассматривать случаи $\Lambda' = \Lambda$, $\Lambda' \neq \Lambda$ отдельно.

3°. Случай $\Lambda' = \Lambda$.

Напомним, что $A = D + \omega$, $B = \text{conv}_{\Theta_\Gamma^*} d \cap \text{conv}_{\Theta_{Z'}^*}(D + \omega)$. Так как $d \subset d_n$, $\omega \subset \omega_n$, то $B \subset B_n$ и в силу свойства 5 нестандартной выпуклости (§ 5, п. 2)

$$\text{conv}_{(A_n, B)} \Omega \subset \text{conv}_{(A_n, B_n)} \Omega.$$

Поэтому по предложению 6.8 существование проектора Дирихле (12) влечет существование проектора Дирихле

$$\hat{\hat{p}}_n: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \hat{\hat{\Omega}}_n), \quad (14)$$

где $\hat{\hat{\Omega}}_n = \text{conv}_{(A_n, B)} \Omega$, причем это верно при любом $n = 1, 2, \dots$. Последовательность q -компактов A_n , $n = 1, 2, \dots$, убывает и сходится к A . По предложению 5.3 последовательность $\hat{\hat{\Omega}}_n$, возрастая, сходится к $\text{conv}_{(A, B)} \Omega$. В силу предложения 6.11 существование проекторов Дирихле (14) влечет существование проектора (3). В случае $\Lambda' = \Lambda$ при наличии включения (6) теорема доказана.

4°. Случай $\Lambda' \neq \Lambda$.

Будем исходить из того, что существуют проекторы Дирихле (12), где $\hat{\Omega}_n$ определяются по формуле (13). Прежде всего, заметим, что $B \subset B_n$, следовательно, в силу свойства 5 нестандартной выпуклости (см. § 5, п. 2) имеем

$$\text{conv}_{(A_n, B)}((\Omega \ominus A_n) + B) \subset \text{conv}_{(A_n, B_n)}((\Omega \ominus A_n) + B_n) = \hat{\Omega}_n.$$

По предложению 6.8 существование проектора Дирихле (12) влечет существование проектора Дирихле

$$\widehat{p}_n : W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \widehat{\Omega}_n), \quad (15)$$

где $\widehat{\Omega}_n = \text{conv}_{(A_n, B)}((\Omega \ominus A_n) + B)$. Это верно при любом $n = 1, 2, \dots$. По свойству 1 геометрической разности q -множество $(\Omega \ominus A_n) + B$ является открытым. Открытым будет и q -множество $\widehat{\Omega}_n$ (см. следствие в п. 3 §5). Далее, по свойству 3 геометрической разности (§5, п. 1) возрастающая последовательность q -множеств $(\Omega \ominus A_n) + B$ сходится к $(\Omega \ominus A) + B$. По предложению 5.5 последовательность множеств $\widehat{\Omega}_n = \text{conv}_{(A_n, B)}((\Omega \ominus A_n) + B)$ сходится к $\Omega' = \text{conv}_{(A, B)}((\Omega \ominus A) + B)$.

По предложению 6.11 существование проекторов Дирихле (15) влечет существование проекторов Дирихле

$$p : W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \Omega').$$

При условии (6) утверждение теоремы доказано.

5°. Приступим к доказательству в общем случае.

Предположим, что Ω вообще не содержит сдвигов $A = D + \omega$. В этой ситуации $\text{conv}_{(A, B)} \Omega = \Omega$ (см. §5, п. 2, замечание 1) и $\text{conv}_{(A, B)}((\Omega \ominus A) + B) = \emptyset$, ибо $\Omega \ominus A = \emptyset$. В случае $\Lambda' = \Lambda$ проектором Дирихле будет тождественное отображение пространства $W(\Lambda, \Omega)$ на себя; в случае $\Lambda' \neq \Lambda$ проектор Дирихле существует по соглашению (см. §6, п. 1).

Пусть Ω содержит некоторый сдвиг A , скажем, $A + c \subset \Omega$. Положим $D_c = D + c$, $d_c = d + c$, $A_c = D_c + \omega$, $B_c = \text{conv}_{\Theta_\Gamma^*} d_c \cap \text{conv}_{\Theta_{Z'}^*}(D_c + \omega)$.

Включение $A + c \subset \Omega$ можно записать в виде

$$D_c + \omega \subset \Omega. \quad (16)$$

Рассмотрим систему

$$u^{(1c)}(\lambda) = u^{(1)}(\lambda) \exp \langle c, \lambda \rangle, \quad \dots, \quad u^{(qc)}(\lambda) = u^{(q)}(\lambda) \exp \langle c, \lambda \rangle. \quad (17)$$

Легко проверить, что q -компакт D_c будет определяющим для системы (17). Точно так же, как по системе $u^{(1)}, \dots, u^{(q)}$ составлялись определители Δ , Δ_{ij} , составим по системе (17) определители $\Delta^{(c)}$, $\Delta_{ij}^{(c)}$. Легко проверить, что условие 2) теоремы 10.1 можно записать в виде

$$\ln \left| \frac{\Delta_{ij}^{(c)}(\lambda)}{\Delta^{(c)}(\lambda)} \right| + H_{d_{ic}}(\lambda) + \sigma(|\lambda|) \leq H_\omega(\lambda) + o(|\lambda|), \quad (18)$$

$\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in \Gamma$, $i, j = 1, \dots, q$. Здесь d_{ic} — i -я компонента q -компакта d_c .

Соотношения (16), (18) означают, что q -компакты D_c, d_c удовлетворяют условиям, аналогичным тем, которым удовлетворяли q -компакты D, d в пп. 2°, 3°. Это позволяет заключить, что утверждение теоремы сохраняется при замене D на D_c и d на d_c ; именно, существует проектор Дирихле

$$p_c: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \widehat{\Omega}_c), \quad (19)$$

где $\widehat{\Omega}_c = \text{conv}_{(A_c, B_c)} \Omega$, если $\Lambda' = \Lambda$, и $\widehat{\Omega}_c = \text{conv}_{(A_c, B_c)}((\Omega \ominus A_c) + B_c)$, если $\Lambda' \neq \Lambda$. Теперь заметим, что

$$(\Omega \ominus A_c) + B_c = (\Omega \ominus (A + c)) + B + c = (\Omega \ominus A) + B;$$

$$A_c = D_c + \omega = A + c;$$

$$B_c = \text{conv}_{\Theta_1^*} d_c \cap \text{conv}_{\Theta_{Z'}^*} (D_c + \omega) = \text{conv}_{\Theta_1^*} d \cap \text{conv}_{\Theta_{Z'}^*} (D + \omega) + c = B + c.$$

Отсюда следует, что (A_c, B_c) -выпуклость эквивалентна (A, B) -выпуклости. Из вышеизложенного следует, что $\widehat{\Omega}_c = \text{conv}_{(A, B)} \Omega$, если $\Lambda' = \Lambda$, и $\widehat{\Omega}_c = \text{conv}_{(A, B)}((\Omega \ominus A) + B)$, если $\Lambda' \neq \Lambda$. Таким образом, проектор Дирихле (19) совпадает с проектором Дирихле (3), о котором идет речь в утверждении теоремы. Теорема доказана полностью.

2. Теорема 10.1 влечет многочисленные следствия, которые в своей совокупности могут составить предмет отдельного исследования. Мы ограничимся выводом из теоремы 10.1 ряда утверждений, ведущих к теореме об аналитическом продолжении, сформулированной в §1, п. 6. Прежде всего, отметим, что из формулировки теоремы 10.1 можно устранить функцию $\sigma(z)$, точнее говоря, справедлив следующий вариант теоремы 10.1.

ТЕОРЕМА 10.2. Пусть выполняются следующие условия:

1)

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ z \in \Gamma^{(c)}}} \frac{\ln T_\Gamma(z)}{|z|} \geq 0; \quad (20)$$

2) $u^{(1)}, \dots, u^{(q)} \in I(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda;$

3) для некоторого выпуклого q -компакта $d = (d_1, \dots, d_q)$ и некоторого выпуклого компакта $\omega \subset \mathbb{C}^n$ выполняются оценки

$$\ln \left| \frac{\Delta_{ij}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right| + H_{d_i}(\lambda) \leq H_\omega(\lambda) + o(|\lambda|), \quad (21)$$

$$\lambda \in \Gamma, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

Тогда существует проектор Дирихле

$$p: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \Omega'), \quad (22)$$

где $\Omega' = (A, B)$ -выпуклая оболочка Ω , если $\Lambda' = \Lambda$, и $\Omega' = (A, B)$ -выпуклая оболочка $(\Omega \ominus A) + B$, если $\Lambda' \neq \Lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$(\ln T_{\Gamma}(z))^{-} = \begin{cases} 0, & \text{если } \ln T_{\Gamma}(z) \geq 0, \\ -\ln T_{\Gamma}(z), & \text{если } \ln T_{\Gamma}(z) < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\ln T_{\Gamma}(z) \geq -(\ln T_{\Gamma}(z))^{-}, \quad (23)$$

и в силу (20)

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ z \in \Gamma^{(c)}}} \frac{(\ln T_{\Gamma}(z))^{-}}{|z|} = 0. \quad (24)$$

Пусть $\sigma(t)$ – вогнутая функция при $-\infty < t < +\infty$, удовлетворяющая условиям: $\sigma(t) = o(t)$ при $t \rightarrow \infty$, $(\ln T_{\Gamma}(z))^{-} \leq \sigma(|z|)$, $z \in \Gamma^{(c)}$. Такую функцию можно построить в силу соотношения (24). В силу (23) $\ln T_{\Gamma}(z) \geq -\sigma(|z|)$; кроме того, в силу вогнутости $\sigma(t)$ функция $\sigma(|z|)$ имеет ограниченное колебание. Это значит, что выполнено условие 1) теоремы 10.1.

Добавим к обеим частям неравенств (21) функцию $\sigma(|\lambda|)$. Тогда, используя соотношение $\sigma(|\lambda|) = o(|\lambda|)$, можно записать эти неравенства в виде неравенств (2). Значит, выполнено условие 3) теоремы 10.1. Наконец, условие 2) теоремы 10.1 совпадает с условием 2) теоремы 10.2. Таким образом, все условия теоремы 10.1 выполнены. Согласно утверждению этой теоремы существует проектор Дирихле (22).

Рассмотрим случай $q = 1$. Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{C}^n$, W – инвариантное подпространство в $H(\Omega)$, допускающее спектральный синтез, Λ – квазиспектральное множество подпространства W , разделенное на части Λ' , Λ'' замкнутым множеством Γ , I – аннуляторный подмодуль подпространства W , $I(\lambda)$ – локальный подмодуль, порождаемый I в точке λ . Полагая в формулировке теоремы 10.2 $q = 1$, получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 10.3. Пусть выполняются следующие условия:

1)

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ z \in \Gamma^{(c)}}} \frac{\ln T_{\Gamma}(z)}{|z|} \geq 0;$$

2) $u \in I(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$;

3) $\ln |u(\lambda)| + H_{\omega}(\lambda) \geq H_d(\lambda) + o(|\lambda|)$, $\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in \Gamma$.

Тогда существует проектор Дирихле

$$p: W(\Lambda, \Omega) \rightarrow W(\Lambda', \Omega'), \quad (25)$$

где

$$\Omega' = \text{conv}_{(A, B)} \Omega, \quad (26)$$

если $\Lambda' = \Lambda$, и

$$\Omega' = \text{conv}_{(A, B)}((\Omega \ominus A) + B), \quad (27)$$

если $\Lambda' \neq \Lambda$. Здесь $A = D + \omega$, $B = \text{conv}_{\Theta_{\Gamma}^*} d \cap \text{conv}_{\Theta_{\Gamma'}^*}(D + \omega)$.

Положим в формулировке этой теоремы $d = d_0 + \omega$. Тогда условие 3) примет вид

$$\ln |u(\lambda)| \geq H_{d_0}(\lambda) + o(|\lambda|),$$

а в выражении для B d заменится на $d_0 + \omega$. Таким образом, переобозначая d_0 буквой d , получаем утверждение.

ТЕОРЕМА 10.4. Пусть выполняются условия:

1)

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ z \in \Gamma^{(c)}}} \frac{\ln T_{\Gamma}(z)}{|z|} \geq 0;$$

2) $u \in I(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$;

3) $\ln |u(\lambda)| \geq H_d(\lambda) + o(|\lambda|), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \Gamma$.

Тогда для любого выпуклого компакта $\omega \subset \mathbb{C}^n$ существует проектор Дирихле (25), где Ω' определяется по формулам (26), (27) и $A = D + \omega$, $B = \text{conv}_{\Theta_{\Gamma}^*}(d + \omega) \cap \text{conv}_{\Theta_{Z'}^*}(D + \omega)$.

Применим эту теорему при $\Lambda' = \Lambda$ и при условии, что замкнутое множество Γ окружает Λ . Мы получим, что при выполнении условий 1)–3) теоремы 10.4 каждый элемент $f \in W$ допускает аналитическое продолжение в (A, B) -выпуклую оболочку Ω .

Положим $B' = \text{conv}_{\Theta_{\Gamma \cup Z'}^*}(d + \omega)$. Предполагая, что

$$d \subset D, \tag{28}$$

имеем

$$B' = \text{conv}_{\Theta_{\Gamma}^*}(d + \omega) \cap \text{conv}_{\Theta_{Z'}^*}(d + \omega) \subset \text{conv}_{\Theta_{\Gamma}^*}(d + \omega) \cap \text{conv}_{\Theta_{Z'}^*}(D + \omega) = B.$$

По свойству 5 нестандартной выпуклости (§5, п. 2)

$$\text{conv}_{(A, B')} \Omega \subset \text{conv}_{(A, B)} \Omega,$$

и, следовательно, если элемент $f \in W$ допускает аналитическое продолжение в $\text{conv}_{(A, B)} \Omega$, то он тем более допускает аналитическое продолжение в $\text{conv}_{(A, B')} \Omega$.

Таким образом, при выполнении условий 1)–3) теоремы 10.4 и дополнительном условии (28) каждый элемент $f \in W$ допускает аналитическое продолжение в $\text{conv}_{(A, B')} \Omega$. Этот факт составляет содержание теоремы об аналитическом продолжении, анонсированной в §1, п. 6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Schwartz. Théorie générale des fonctions moyenne-périodique // Ann. of Math. (2). 1947. V. 48. №4. P. 857–929.
- [2] И. Ф. Красичков-Терновский. Инвариантные подпространства аналитических функций. I: Спектральный анализ на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 87 (129). №4. С. 459–489.

- [3] И. Ф. Красичков-Терновский. Инвариантные подпространства аналитических функций. II: Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 88 (130). № 1. С. 3–30.
- [4] И. Ф. Красичков-Терновский. Инвариантные подпространства аналитических функций. III: О распространении спектрального синтеза // Матем. сб. 1972. Т. 88 (130). № 3. С. 331–352.
- [5] И. Ф. Красичков-Терновский. Спектральный синтез аналитических функций на системах выпуклых областей // Матем. сб. 1980. Т. 111 (153). № 1. С. 3–41.
- [6] И. Ф. Красичков-Терновский. Спектральный синтез аналитических функций на системах выпуклых областей. Распространение синтеза // Матем. сб. 1980. Т. 112 (154). № 1. С. 94–114.
- [7] И. Ф. Красичков-Терновский. Спектральный синтез аналитических функций на системах неограниченных выпуклых областей // Матем. сб. 1980. Т. 111 (153). № 3. С. 384–401.
- [8] И. Ф. Красичков-Терновский. Для каждого инвариантного подпространства, допускающего спектральный синтез, существует метод аппроксимации // Сиб. матем. журн. 1981. Т. 22 (154). № 3. С. 74–90.
- [9] I. F. Krasičkov-Ternovskii. Spectral synthesis on a system of unbounded domains starlike in a common direction // Anal. Math. 1993. V. 19. № 3. P. 217–223.
- [10] B. Malgrange. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1955–1956. V. 6. P. 271–355.
- [11] L. Ehrenpreis. Mean periodic functions. I: Varieties whose annihilator ideals are principal // Amer. J. Math. 1955. V. 77. P. 293–328.
- [12] Р. С. Юлмухаметов. Однородные уравнения свертки // Докл. АН СССР. 1991. Т. 316. № 2. С. 312–315.
- [13] А. С. Кривошеев, В. В. Напалков. Комплексный анализ и операторы свертки // УМН. 1992. Т. 47. № 6. С. 3–58.
- [14] А. Б. Шишкин. Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Теорема двойственности // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 9. С. 143–160.
- [15] И. Ф. Красичков-Терновский. Спектральный синтез и локальное описание для многих переменных // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. № 4. С. 101–130.
- [16] В. В. Напалков. Уравнения свертки в многомерных пространствах. М.: Наука, 1982.
- [17] А. С. Кривошеев. Аналитическое продолжение функций из инвариантных подпространств в выпуклых областях комплексного пространства // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 2. С. 77–102.
- [18] L. Ehrenpreis. Appendix to the paper: “Mean periodic functions I” // Amer. J. Math. 1955. V. 77. P. 731–733.
- [19] J. Hadamard. Essai sur l’étude des fonctions données par leur développement de Taylor // J. Math. Pures Appl. Sér. (4). 1892. V. 4 (8). P. 101–106.
- [20] E. Fabry. Sur les points singuliers d’une fonction donnée par son développement de Taylor // Ann. École Norm. Sup. (3). 1896. V. 13. P. 367–399.
- [21] G. Pólya. Eine Verallgemeinerung des Fabryschen Lückensatzes // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 1927. V. 2. P. 187–195.
- [22] A. Ostrowski. Über die analytische Fortsetzung von Taylorschen und Dirichletschen Reihen // Math. Ann. 1955. V. 129. P. 1–43.
- [23] V. Bernstein. Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet. Paris: Gauthier-Villars, 1933.
- [24] G. Pólya. Über die Existenz unendlich vieler singulärer Punkte auf der Konvergenzgeraden gewisser Dirichlet’scher Reihen // Sitzungber. Preuß. Akad. Wiss. 1923. P. 45–50.
- [25] А. Ф. Леонтьев. О классе функций, определенных рядом полиномов Дирихле // УМН. 1948. Т. 3. № 4. С. 3–58.
- [26] А. Ф. Леонтьев. Ряды полиномов Дирихле и их обобщения // Труды МИАН. 1951. Т. 39.

- [27] J.-P. Kahane. Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement, relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1953–1954. V. 5. P. 39–130.
- [28] А. Ф. Леонтьев. О сходимости последовательностей полиномов Дирихле // Докл. АН СССР. Т. 108. № 1. С. 23–26.
- [29] А. Ф. Леонтьев. Новое доказательство одной теоремы о сходимости последовательностей полиномов Дирихле // УМН. 1957. Т. 12. № 3. С. 165–170.
- [30] А. Ф. Леонтьев. О свойствах последовательностей полиномов Дирихле, сходящихся на интервале мнимой оси // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. № 2. С. 261–328.
- [31] L. Schwartz. Étude des sommes d'exponentielles. Paris: Hermann, 1959.
- [32] A. Bailllette. Approximation de fonctions par des sommes d'exponentielles // C. R. Acad. Sci. Paris. 1959. V. 249. № 23. P. 2470–2471.
- [33] A. Bailllette. Fonctions approchables par des sommes d'exponentielles // J. Anal. Math. 1962–1963. V. 10. P. 91–115.
- [34] И. Ф. Красичков. О сходимости полиномов Дирихле // Сиб. матем. журн. 1966. Т. 7. № 5. С. 1039–1058.
- [35] И. Ф. Красичков-Терновский. Инвариантные подпространства аналитических функций. Аналитическое продолжение // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37. № 4. С. 931–945.
- [36] Л. Хёрмандер. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968.
- [37] P. Schapira. Équations aux dérivées partielles dans l'espace des hyperfonctions // Lecture Notes in Math. 1968. V. 71. P. 38–45.
- [38] C. O. Kiselman. Prolongement des solutions d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants // Bull. Soc. Mat. France. 1969. V. 97. P. 329–356.
- [39] L. Ehrenpreis. Fourier analysis in several complex variables. New York: Wiley, 1970. (Pure Appl. Math. V. 17.)
- [40] В. П. Паламонов. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Наука, 1967.
- [41] A. Sebbar. Prolongement des solutions holomorphes de certains opérateurs différentiels d'ordre infini à coefficients constants // Lecture Notes in Math. 1980. V. 822. P. 199–220.
- [42] A. Meril, D. S. Struppa. Convolutors in spaces of holomorphic functions // Lecture Notes in Math. 1987. V. 1276. P. 253–275.
- [43] А. С. Кривошеев. Об индикаторе целых функций и продолжении решений однородного уравнения свертки // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 8. С. 81–108.
- [44] Ж. Себастьян-и-Сильва. О некоторых классах локально-выпуклых пространств, важных в приложениях // Математика. Сб. переводов. 1957. Т. 1. № 1. С. 60–77.
- [45] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматгиз, 1959.
- [46] И. Ф. Красичков-Терновский. Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. I // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 1. С. 44–66.
- [47] H. Cartan. Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes // Bull. Soc. Math. France. 1950. V. 78. № 4. P. 29–64.
- [48] Ж. Дьедонне, Л. Шварц. Двойственность в пространствах (F) и (LF) // Математика. Сб. переводов. 1958. Т. 2. № 2. С. 77–102.
- [49] Р. Рокафеллар. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
- [50] В. Г. Болтянский. О некоторых классах выпуклых множеств // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 1. С. 19–22.
- [51] В. Г. Болтянский. Теория Хелли для H -выпуклых множеств // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 2. С. 249–252.
- [52] Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли. Теорема Хелли. М.: Мир, 1968.
- [53] В. Г. Болтянский, П. С. Солтан. Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств. Кишинев: Штиинца, 1978.

- [54] В. Г. Болтянский, Э. Д. Баладзе. Проблема Секефальви-Надя в комбинаторной геометрии. М.: Наука, 1997.
- [55] Р. Энгелькинг. Общая топология. М.: Мир, 1986.
- [56] Л. С. Понтрягин. Линейные дифференциальные игры преследования // Матем. сб. 1980. Т. 112. № 3. С. 307–330.
- [57] S. Banach. Théorie des opérations linéaires. Warszawa: Subwncji Funduszu Narodowej, 1932.
- [58] А. Робертсон, В. Робертсон. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
- [59] Н. С. Ландкоф. Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
Уфа
E-mail: kra@imat.rb.ru

Поступила в редакцию
17.07.2001