Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Д. Пустыльников, Обобщенные цепные дроби и эргодическая теория, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 1, 113–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm594>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 16:55:38

УДК 511.335+511.336+517.987.5

Посвящаю А. Д. Брюно в связи с его 60-летием

ОБОБЩЕННЫЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ И ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Л. Д. Пустыльников

В работе построена новая теория обобщенных цепных дробей, которая применяется для чисел, многомерных векторов, принадлежащих вещественному пространству, и для бесконечномерных векторов с целочисленными координатами. В основе теории лежит концепция, обобщающая процедуру построения классических цепных дробей и существенно использующая эргодическую теорию. Один из вариантов теории связан с дифференциальными уравнениями. В конечномерном случае введенные конструкции применяются для решения проблем анализа и теории чисел об оценках тригонометрических сумм и остаточного члена в законе распределения дробных частей значений многочлена, поставленных Г. Вейлем, и в задаче о характеристизации алгебраических и трансцендентных чисел с помощью обобщенных цепных дробей. Бесконечномерные обобщенные цепные дроби применяются для оценок сумм символов Лежандра и для получения новых результатов в классической проблеме о распределении квадратичных вычетов и невычетов по простому модулю. В процессе их построения проведено исследование эргодических свойств одного класса бесконечномерных динамических систем, которые представляют самостоятельный интерес.

Библиография: 65 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение, концепция обобщения цепных дробей и описание основных результатов	114
Глава 1. Многомерные обобщенные цепные дроби, суммы Вейля и распределение дробных частей значений многочлена	123
Обозначения	123
§ 1. Разложение вектора в обобщенную цепную дробь, отвечающую отображению и вектору	123
§ 2. Подходящие дроби, отвечающие отображению и вектору	128
§ 3. Оценки сумм Вейля и остаточного члена в законе распределения дробных частей значений многочлена	129
§ 4. Оценка остаточного члена в законе совместного распределения дробных частей значений многочлена	132
Глава 2. Обобщенные цепные дроби и дифференциальные уравнения	134
§ 1. Разложение вектора в обобщенную цепную дробь, отвечающую вектору и системе дифференциальных уравнений	135

§ 2. Характеризация алгебраических чисел	136
Глава 3. Обобщенные цепные дроби, связанные с преобразованием Гаусса	139
§ 1. Построение ω -цепных дробей	140
§ 2. Построение ω -подходящих дробей	140
§ 3. Единственность представления чисел в виде ω -цепной дроби	141
§ 4. Свойства ω -подходящих дробей	141
§ 5. ω -остатки и их свойства	144
§ 6. Аппроксимационные теоремы	145
§ 7. Характеризация квадратичных иррациональностей и чисел, не являющихся квадратичными иррациональностями, с помощью ω -цепных дробей	147
§ 8. Характеризация произвольных алгебраических и трансцендентных чисел с помощью ω -цепных дробей	148
Глава 4. Бесконечномерные обобщенные цепные дроби, суммы символов Лежандра и распределение квадратичных вычетов и невычетов	150
§ 1. Общие определения и обозначения	150
§ 2. Эргодические свойства отображения $\bar{A}$	151
§ 3. Разложение бесконечномерного вектора с целочисленными координатами в обобщенную цепную дробь	154
§ 4. Бесконечномерные обобщенные подходящие дроби и их свойства	157
§ 5. Оценки сумм символов Лежандра и распределение квадратичных вычетов и невычетов по простому модулю	158
Список литературы	162

Введение, концепция обобщения цепных дробей и описание основных результатов

Обычные классические цепные дроби позволяют аппроксимировать вещественные числа с помощью рациональных, тогда как обобщенные цепные дроби призваны для аппроксимации более сложных объектов элементами некоторого подмножества в соответствующем пространстве. Алгоритм разложения числа в правильную цепную дробь [1] обладает многими замечательными свойствами [2], например:

- а) он имеет простую структуру,
- б) он дает наилучшие рациональные приближения к числу,
- в) он периодичен для квадратичных иррациональностей.

Цепные дроби применяются во многих областях математики, механики, физики и в других областях науки. С ними связано происхождение сложных, глубоких, качественных явлений, имеющих большое значение для этих областей. Например, необходимое и достаточное условие для приводимости конформного отображения в окрестности неподвижной точки (условие Брюно [3]), дающее окончательное решение клас-

сической теоретико-функциональной проблемы центра [3], [4], формулируется с помощью алгоритма цепных дробей.

Начиная с Эйлера было предложено много различных многомерных обобщений цепных дробей на векторы (Дирихле, Якоби, Перрон, Пуанкаре, Гурвиц, Клейн, Минковский, Золотарев, Вороной и многие другие [5]–[16]). Количество работ, посвященных этой теме, весьма велико. Отметим некоторые работы, выполненные относительно недавно и в самое последнее время: [2], [17]–[38]. Большинство многомерных обобщений цепных дробей можно ориентировочно разбить на 4 группы:

- I. Матричные (Эйлер, Якоби, Пуанкаре, Перрон, Бернштейн и др.);
- II. Ассоциированные с квадратичной формой (Эрмит, Золотарев, Шарв, Вороной и др.);
- III. Параллелепипедные (Минковский и его последователи);
- IV. Многогранные (Клейн и его последователи).

Ни один из этих алгоритмов не обладает всеми тремя свойствами, аналогичными свойствам а)–в) для обычных цепных дробей. При этом алгоритмы группы I обладают свойством а), но только в отдельных случаях имеют свойства типа б) или в) (для многомерных обобщений аналог свойства в) есть периодичность или эквивалентное ей свойство для иррациональностей высшего порядка). Глубокий анализ различных обобщений дан в фундаментальном труде [16] и в недавней работе [2], в которой наиболее известные матричные алгоритмы Эйлера, Якоби, Пуанкаре, Бруна и еще два алгоритма авторов были подвергнуты качественному сравнению с точки зрения справедливости для них вышеуказанных свойств а)–в). Многие проблемы математики и физики приводят к новым обобщениям цепных дробей, в которых проявляются другие свойства обычных цепных дробей. Упомянем обобщения, связанные с эргодической теорией [27], [32]–[35], [37]–[40], дифференциальными уравнениями [41; с. 50], [35], [42; приложение II], с динамическими системами и физическими приложениями [39], [43]–[45].

Разложение числа x в обычную цепную дробь символически представляется в виде выражения $x = [a^{(0)}, \dots, a^{(m)}]$, если цепная дробь конечная, и в виде $x = [a^{(0)}, a^{(1)}, \dots]$, если цепная дробь бесконечная. Здесь неполные частные $a^{(0)}, a^{(1)}, \dots$ – целые числа, определяемые с помощью рекуррентной процедуры, на k -м ($k = 0, 1, \dots$) шаге которой осуществляются следующие три операции [1]:

- 1) взятие целой части $a^{(k)} = [x^{(k)}]$ числа $x^{(k)}$, найденного на $(k - 1)$ -м шаге, где $a^{(0)} = [x]$;
- 2) сравнение дробной части $\delta^{(k)} = \{x^{(k)}\}$ числа $x^{(k)}$ с числом нуль;
- 3) прекращение процесса, если $\delta^{(k)} = 0$, и определение числа $x^{(k+1)}$ с помощью отображения $\Gamma: \delta^{(k)} \rightarrow x^{(k+1)} = 1/\delta^{(k)}$, если $\delta^{(k)} \neq 0$.

Отметим, что отображение $\bar{\Gamma}: \delta \rightarrow 1/\delta \bmod 1$ единичной окружности $0 \leq \delta < 1$, полученное из Γ проекцией на эту окружность, есть отображение Гаусса. Поэтому говорят, что обычные (классические) цепные дроби связаны с отображением Гаусса.

Концепция обобщения цепной дроби на векторы x , найденная и разработанная в последнее время в связи с некоторыми задачами анализа и теории чисел (см. [32]–[38]), состоит в обобщении указанных трех операций 1)–3), лежащих в основе алгоритма обычных цепных дробей. При этом для того, чтобы обобщить операцию 1), необхо-

можно определить целую часть $[x]$ от вектора x , чтобы обобщить операцию 2), необходимо определить дробную часть вектора x и заменить число нуль произвольным вектором ω , который предполагается заранее заданным, а для того, чтобы обобщить операцию 3), необходимо вместо соотношений $\delta^{(k)} = 0, \delta^{(k)} \neq 0$ рассматривать соответственно соотношения $\delta^{(k)} = \omega, \delta^{(k)} \neq \omega$, а вместо отображения Γ задать некоторое отображение A , определенное на всех векторах $\delta^{(k)}$, кроме, быть может, $\delta^{(k)} = \omega$. Таким образом, процесс разложения вектора x в обобщенную цепную дробь зависит от выбора отображения A и вектора ω . Поэтому такая обобщенная дробь называется (A, ω) -цепной дробью и символически представляется в виде выражения $x = [a^{(0)}, \dots, a^{(m)}]_{A, \omega}$, если эта дробь конечная, и в виде $x = [a^{(0)}, a^{(1)}, \dots]_{A, \omega}$, если дробь бесконечная. Здесь векторы $a^{(0)}, a^{(1)}, \dots$ играют роль неполных частных, и поэтому их можно называть (A, ω) -неполными частными.

Рассматриваемое обобщение наиболее близко к обычным цепным дробям в случае, когда x – вещественное число, а операции 1)–3) для обычных и обобщенных цепных дробей отличаются только тем, что в операциях 2) и 3) вместо числа нуль берется число ω , удовлетворяющее условию $0 \leq \omega < 1$, а вместо соотношений $\delta^{(k)} = 0, \delta^{(k)} \neq 0$ рассматриваются соответственно соотношения $\delta^{(k)} = \omega, \delta^{(k)} \neq \omega$. Такие дроби также связаны с отображением Гаусса, зависят только от числа ω , и поэтому они называются ω -цепными дробями и символически обозначаются в виде

$$x = [a^{(0)}, \dots, a^{(m)}]_{\omega} \quad (1)$$

или в виде

$$x = [a^{(0)}, a^{(1)}, \dots]_{\omega}, \quad (2)$$

если ω -цепная дробь соответственно конечная или бесконечная. Оказывается, что уже в этом ближайшем к классическому случаю обобщении, которому посвящена глава 3 данной работы, проявляется новый подход, имеющий значение для других гораздо более общих случаев и для их применений (главы 1, 2, 4) и позволяющий с новой точки зрения рассматривать свойства обычных цепных дробей. Это связано с тем, что одно и то же число x в зависимости от ω допускает различные разложения в ω -цепную дробь, часть из которых могут быть конечными, а часть – бесконечными. Например, в случае, когда $x = (\sqrt{5} + 1)/2$, имеем:

$$x = \begin{cases} [1]_{\omega}, & \text{если } \omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \\ [1, 1, \dots]_{\omega}, & \text{если } \omega \neq \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \end{cases}$$

Поэтому наиболее важное значение для всей теории обобщенных цепных дробей, изложенной в этой работе, имеет изучение множества тех ω , для которых (A, ω) -цепная дробь – конечная. При этом свойство периодичности обычных цепных дробей для квадратичных иррациональностей оказывается эквивалентным следующему утверждению (теорема 9 § 7 гл. 3): иррациональное число x является квадратичной иррациональностью тогда и только тогда, когда значения ω на полуинтервале $0 \leq \omega < 1$, для которых ω -цепная дробь числа x – конечная, образуют конечное множество Ω_x . Число x является алгебраическим числом степени n тогда и только тогда, когда Ω_x состоит

только из алгебраических чисел степени n , принадлежащих расширению поля рациональных чисел, полученному присоединением числа x (теорема 11 § 8 гл. 3). В случае же трансцендентных чисел x множество Ω_x состоит только из трансцендентных чисел (теорема 12 § 8 гл. 3). Множество Ω_x не может быть произвольной последовательностью, состоящей из попарно различных чисел. Например, если число x не является квадратичной иррациональностью, то множество $\bar{\Omega}_x$, составленное из всех предельных точек последовательности Ω_x , не может состоять из конечного числа чисел, отличных от нуля и чисел вида $1/m$, где m – целое число (теорема 10 § 7 гл. 3). Известная проблема теории чисел о том, существует ли алгебраическое число, не являющееся квадратичной иррациональностью, у которого в разложении в цепную дробь все неполные частные ограничены, эквивалентна следующей проблеме: существует ли алгебраическое число, не являющееся квадратичной иррациональностью, такое, что нуль не принадлежит множеству $\bar{\Omega}_x$? Многие фундаментальные свойства, касающиеся обычных цепных дробей, подходящих к ним дробей p_n/q_n и теории остатков (см. [1]), допускают обобщения в теории ω -цепных дробей (§§ 2–6 гл. 3). В §§ 2, 3 главы 3 построены ω -подходящие дроби $\mathcal{S}_\omega^{(n)} = p_\omega^{(n)}/q_\omega^{(n)}$ к ω -цепным дробям, которые при $\omega = 0$ совпадают с обычными подходящими дробями p_n/q_n , так что $p_0^{(n)} = p_n$, $q_0^{(n)} = q_n$. При этом классические соотношения

$$p_n = a^{(n)}p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a^{(n)}q_{n-1} + q_{n-2} \quad (3)$$

между числителями и знаменателями подходящих дробей к обычной цепной дроби $x = [a^{(0)}, a^{(1)}, \dots]$ обобщаются на ω -цепные дроби (теорема 4 § 4 гл. 3) так, что

$$\begin{cases} p_\omega^{(n)} = a^{(n)}p_\omega^{(n-1)} + p_\omega^{(n-2)} + (a^{(n)} - a^{(n-1)}) \sum_{k=-1}^{n-2} (-\omega)^{n-k-1} p_\omega^{(k)}, \\ q_\omega^{(n)} = a^{(n)}q_\omega^{(n-1)} + q_\omega^{(n-2)} + (a^{(n)} - a^{(n-1)}) \sum_{k=0}^{n-2} (-\omega)^{n-k-1} q_\omega^{(k)}, \end{cases} \quad (4)$$

и при всех ω , для которых выполнено равенство $a^{(n)} = a^{(n-1)}$, соотношения (4), выражающие числитель и знаменатель ω -подходящей дроби $\mathcal{S}_\omega^{(n)}$ через числители и знаменатели ω -подходящих дробей $\mathcal{S}_\omega^{(k)}$ с $k < n$, совпадают с соотношениями (3). Разложения в ω -цепную дробь применяются только для иррациональных чисел x , так как для рациональных x они ничего нового по сравнению с обычными дробями не привносят. Аппарат ω -цепных дробей для $\omega \neq 0$ позволяет более детально охарактеризовать иррациональные числа и отсортировать среди них те числа, принадлежащие расширению поля рациональных чисел с помощью числа ω , которые играют такую же роль, как рациональные числа в множестве всех вещественных чисел.

Результаты главы 3 опубликованы в [36].

Классические цепные дроби глубоко связаны с эргодической теорией, которая в данном случае применяется к отображению Гаусса [46], [47], [40], и этот аспект имеет важное значение в многомерном (глава 1) и бесконечномерном (глава 4) вариантах теории (A, ω) -цепных дробей.

В главе 1 данной работы строится теория (A, ω) -цепных дробей для векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$, принадлежащих n -мерному вещественному пространству $\mathbb{R}_n$. В этом случае указанные выше операции 1)–3) обобщаются следующим образом: целая часть $[x]$ и дробная часть $\{x\}$ вектора x суть n -мерные векторы $[x] = ([x]_1, \dots, [x]_n)$, $\{x\} = (\{x\}_1, \dots, \{x\}_n)$ с координатами $[x]_s = [x_s]$, $\{x\}_s = \{x_s\}$ ($s = 1, \dots, n$), являющимися целыми и дробными частями соответствующих координат вектора x , $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ – вектор, принадлежащий n -мерному единичному тору

$$T_n = \{y_1, \dots, y_n : 0 \leq y_1 < 1, \dots, 0 \leq y_n < 1\},$$

а в качестве A используются некоторые отображения A_n, B_n (примеры 1 и 2 § 1 гл. 1), которые проектируются на T_n в виде строго эргодических преобразований $\bar{A}$, известных под названиями “групповой сдвиг” и “сложный косой сдвиг” на торе [48], [49]. Гомеоморфизм компактного метрического пространства называется строго эргодическим, если он имеет единственную борелевскую, нормированную, инвариантную меру. Эквивалентное же определение строгой эргодичности состоит в том, что для непрерывной функции и эргодического преобразования эргодическая теорема Биркгофа справедлива всюду [48].

Выбор отображений A_n и B_n здесь не случаен: именно они (и особенно B_n) играют важную роль для таких проблем анализа и теории чисел, как получение сильных оценок сумм Вейля и остаточного члена в законе распределения дробных частей значений многочлена [50], [51], а теория (A, ω) -цепных дробей, построенная с их помощью и примененная к вектору, составленному из коэффициентов многочлена, дает адекватные условия для справедливости этих оценок (§§ 3, 4 гл. 1). Эти же преобразования были использованы в работе [52], где доказана центральная предельная теорема в распределении дробных частей значений многочленов.

Благодаря эргодическим свойствам отображения $\bar{A}$ так построенные (A, ω) -цепные дроби однозначно определяют векторы x , чьи разложения они являются (теорема 2 § 1 гл. 1), а роль рациональных чисел, принадлежащих полуинтервалу $[0, 1)$, в классической теории здесь играют элементы счетного всюду плотного множества в T_n , лежащие на траектории вектора ω под действием отображения $\hat{A}$, обратного к $\bar{A}$, и эти элементы задают необходимое и достаточное условие, при котором (A, ω) -цепные дроби являются конечными (теорема 1 § 1 гл. 1). Так же, как и в случае одномерных ω -цепных дробей, для приложений важное значение имеет изучение множества тех $\omega \in T_n$, при которых (A, ω) -цепная дробь вектора x – конечная. На этот счет в работе доказана теорема 4 (§ 1 гл. 1), в силу которой в любом множестве $\Omega \subset T_n$, имеющем положительную лебегову меру, для почти всех $x \in \mathbb{R}_n$ (в смысле меры Лебега в $\mathbb{R}_n$) найдется такой вектор $\omega \in \Omega$, что (A, ω) -цепная дробь вектора x – конечная, а если мера Лебега границы Ω равна нулю, то сформулированное выше утверждение справедливо для всех $x \in \mathbb{R}_n$.

Это – тонкая теорема, доказательство которой использует строгую эргодичность отображения $\bar{A}$ и глубокие результаты теории слабой сходимости вероятностных мер [53]. В § 2 главы 1 естественным образом определены (A, ω) -подходящие дроби $S^{(\nu)}$ ($\nu = 0, 1, \dots$), аналогичные классическим подходящим дробям, и доказано, что (A, ω) -подходящие дроби аппроксимируют исходный вектор x в том смысле, что

векторы x и $\{x\}$ являются предельными точками соответственно последовательности $S^{(\nu)}$ в случае $A = A_n$ и последовательности $\{S^{(\nu)}\}$ в случае $A = B_n$ (теоремы 5 и 6 §2 гл. 1).

Главной же целью построения теории (A, ω) -цепных дробей в главе 1 является ее применение для решения проблем, поставленных Г. Вейлем, об оценках тригонометрических сумм и об исследовании остаточного члена в законе распределения дробных частей значений многочлена [54]. В частности, в теоремах 7 и 8 (§3 гл. 1) для многочлена $f(x) = a_1x + \dots + a_nx^n$ с иррациональным коэффициентом a_n получены сильные оценки сумм Вейля и остаточного члена в законе распределения дробных частей значений многочлена, зависящие от того, как вектор $a = (a_1, \dots, a_{n-1})$ разлагается в (A, ω) -цепную дробь, и от его аппроксимации (A, ω) -подходящими дробями. При этом в качестве отображения A взято конкретное преобразование $A = A'$ (определение 8 §3 гл. 1), действующее в пространстве $\mathbb{R}_{n-1}$.

Аналогичный результат получен в теореме 9 (§4 гл. 1) для оценки остаточного члена в законе совместного распределения дробных частей значений многочлена, и при его доказательстве используется отображение $A = A^*$ (определение 10 §4 гл. 1), имеющее такой же вид, как и A' , но действующее в пространстве $\mathbb{R}_n$. Во всех этих оценках показатель степени $1 - \rho$ при главном члене $P^{1-\rho}$ может быть выбран сколь угодно близким к значению $1/2$, если степень n многочлена $f(x)$ достаточно большая. Смысл теорем 7–9 состоит в том, что на торе строится такое множество Ω (множества $\Gamma_{n-1}^{(\rho)}$ и $\hat{\Gamma}_{n-1}^{(\rho)}$ из определения 7 в §3 и множество Γ_ρ из определения 9 в §4), что если при некотором $\omega \in \Omega$ (A, ω) -цепная дробь вектора a – конечная (а это справедливо для почти всех $a \in \mathbb{R}_{n-1}$) и содержит ν членов, то оценки сверху выражением $c(n, \nu)P^{1-\rho}$ (здесь $c(n, \nu)$ – константа, зависящая только от n и ν , а P – растущий параметр) справедливы при всех натуральных P , а если при $\omega \in \Omega$ (A, ω) -цепная дробь вектора a – бесконечная, то оценки сверху этим выражением справедливы для $P \leq q$, где число q определяется в результате аппроксимации вектора a конечной (A, ω) -подходящей дробью, содержащей ν членов, причем если $\nu \rightarrow \infty$, то и число $q \rightarrow \infty$. В связи с этим отметим, что из работы [55] следует, что для сумм Вейля полученные результаты по существу нельзя улучшить, так как при $n \geq 2$ и любом $\rho > 0$ множество векторов $a = (a_1, \dots, a_n) \in T_n$, у которых все коэффициенты a_j ($j = 1, \dots, n$) – иррациональные числа и для которых неравенство

$$\left| \sum_{x=1}^P e^{2\pi i(a_1x + \dots + a_nx^n)} \right| < P^{1-\rho}$$

не выполняется для бесконечного числа значений P , содержит пересечение счетного числа открытых всюду плотных множеств на T_n . Доказательство теорем 7–9 главы 1 существенно использует работу [50], где подобные результаты получены при условиях на коэффициенты многочлена, которые формулируются в терминах отображения тора, совпадающего с $\bar{A}$ для $A = A'$ и $A = A^*$. Отметим, что в фундаментальных работах И. М. Виноградова [56], [57] об оценках сумм Вейля и остаточного члена в законе распределения дробных частей значений многочлена используются условия на коэффициенты многочлена, основанные на их аппроксимации с помощью обычных цепных дробей. Подобный подход применялся в работах Г. И. Архипова, А. А. Карацубы и

В. Н. Чубарикова (см. [58]) об оценках кратных тригонометрических сумм и остаточного члена в совместном распределении дробных частей значений многочленов. Здесь же мы аппроксимируем сразу весь вектор, составленный из коэффициентов многочлена, но для этого используем обобщенные цепные дроби.

Что касается аналога свойства периодичности, то построенные в главе 1 обобщения цепных дробей этим свойством не обладают (теорема 3 § 1), и это обстоятельство также связано со строгой эргодичностью отображения $\bar{A}$. Тем не менее, дальнейшее обобщение теории (A, ω) -цепных дробей, предложенное в главе 2 и включающее конструкцию главы 1 как частный случай, позволяет охарактеризовать алгебраические числа из определенного класса, имеющие произвольную степень, с помощью конечных обобщенных цепных дробей (аналог свойства периодичности).

В главе 2 данной работы представлена еще более общая, чем во введении и в главе 1, концепция построения обобщенных цепных дробей для n -мерных векторов $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n$, в которой роль отображения A играет его инфинитезимальный аналог, порождающий семейство отображений A_τ , зависящее от параметра α и задаваемое с помощью некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь τ – вещественное число, удовлетворяющее неравенствам $0 \leq \tau \leq 1$, A_τ – отображения тора T_n в $\mathbb{R}_n$, а определенные в главе 2 непрерывные дроби названы (A_τ, ω) -цепными дробями, где $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}_n$. Система уравнений, которой удовлетворяет семейство A_τ , такова, что при $\tau = 1$ отображение A_τ совпадает с отображением $A = B_n$, введенным в главе 1 (следствие 1 § 1 гл. 2). Поэтому в частном случае, когда $\omega \in T_n$, а параметр α , входящий в систему дифференциальных уравнений для A_τ , есть иррациональное число, теория бесконечных (A_τ, ω) -цепных дробей есть часть теории (A, ω) -цепных дробей из главы 1. В то же время существенные особенности имеют те результаты теории (A_τ, ω) -цепных дробей, которые связаны с разложением вектора в конечную (A_τ, ω) -цепную дробь (теорема 1 § 1 гл. 2), и особенно в ситуации, когда координаты векторов x , ω и параметр α – рациональные или целые числа (§ 2 гл. 2). В этих случаях однопараметрическая система A_τ имеет траектории, которые переходят в периодические при проекции на тор T_n , и можно в терминах (A_τ, ω) -цепных дробей охарактеризовать алгебраические числа произвольной степени, принадлежащие определенному классу, включающему все квадратичные иррациональности t из полуинтервала $0 \leq t < 1$ (теорема 3 § 2 гл. 2), а также в терминах (A_τ, ω) -цепных дробей сформулировать утверждение, эквивалентное последней теореме Ферма (теорема 4 § 2 гл. 2), доказанной в [59].

Результаты глав 1 и 2 опубликованы в [32], [33], [35] и [37].

Глава 4 данной работы в связи с приложениями к классической проблеме о распределении квадратичных вычетов и невычетов посвящена варианту теории (A, ω) -цепных дробей, который охватывается вышеуказанной концепцией, основанной на операциях 1)–3), но который применяется к бесконечномерным векторам $x = (x_1, x_2, \dots)$ с целочисленными координатами x_n ($n = 1, 2, \dots$) и зависит от некоторой последовательности $p = (p_1, p_2, \dots)$, состоящей из натуральных, взаимно простых чисел p_n ($n = 1, 2, \dots$). Для того чтобы применить эту концепцию, в первую очередь нужно определить целую и дробную части такого вектора x . Это делается с помощью последовательности p следующим образом: целая часть x есть бесконечномерный вектор $[[x]] = ([x]_1, [[x]]_2, \dots)$ с координатами $[[x]]_n = [x_n/p_n]$, а дробная часть x есть

бесконечномерный вектор $\{\{x\}\} = (\{\{x\}\}_1, \{\{x\}\}_2, \dots)$ с координатами $\{\{x\}\}_n = x_n - p_n[[x]]_n$, где $n = 1, 2, \dots$, а $[x_n/p_n]$ — целая часть числа x_n/p_n . Из этого определения следует, что вектор $\{\{x\}\}$ принадлежит бесконечномерному тору T , который есть прямое произведение счетного числа дискретных окружностей $S_n = \{0, \dots, p_n - 1\}$, состоящих из вычетов $0, \dots, p_n - 1$ по модулю p_n . Поэтому в связи с общей концепцией (операции 1)–3)) естественно предположить, что вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$, который участвует в определении (A, ω) -цепной дроби, должен также принадлежать этому тору T , а отображение A должно быть выбрано так, чтобы при проекции на тор T оно переходило в эргодическое преобразование $\bar{A}$ относительно некоторой инвариантной меры mes . Мера mes на T определяется как прямое произведение мер μ_n на дискретных окружностях S_n так, что мера μ_n каждого элемента окружности S_n равна p_n^{-1} , и она есть продолжение меры mes , заданной на цилиндрах $C_{k_1, \dots, k_s}$, которая равна мере $\mu_{k_1, \dots, k_s}$ соответствующего множества $c_{k_1, \dots, k_s}$ на торе $T_{k_1, \dots, k_s}$ (определения 1, 2 и замечание 1 § 2 гл. 4). Отображение же A в связи с приложениями к теории чисел (§ 5, 6 гл. 4) имеет вид

$$A: x = (x_1, x_2, \dots) \rightarrow x' = (x'_1, x'_2, \dots),$$

где $x'_n = x_n + \gamma_n$, а число γ_n взаимно просто с p_n ($n = 1, 2, \dots$). Согласно этому определению отображение

$$\bar{A}: \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \rightarrow \bar{\omega} = (\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots)$$

тора T в себя задается сравнениями $\bar{\omega}_n = \omega_n + \gamma_n \bmod p_n$ ($n = 1, 2, \dots$), $\bar{A}$ сохраняют меру mes на T , и важная задача, имеющая самостоятельное значение, состоит в изучении эргодических свойств отображения $\bar{A}$ на торе T . Это исследование проведено в § 2 главы 4, где доказано (теорема 1), что преобразование $\bar{A}$ эргодично на T , а для характеристической функции любого цилиндра эргодическая теорема Биркгофа справедлива всюду (а не только почти всюду). При этом главное условие для эргодичности $\bar{A}$, которое используется в теореме 1, это взаимная простота любых двух чисел, входящих в последовательность $p = (p_1, p_2, \dots)$, и при каждом n взаимная простота числа p_n и числа γ_n , входящего в определение отображения A . В противном случае отображение $\bar{A}$ может быть не эргодическим.

Благодаря теореме 1 и ее следствию, согласно которому любая траектория преобразования $\bar{A}$ в естественном смысле всюду плотна на T , всю теорию (A, ω) -цепных дробей для бесконечномерных векторов x с целочисленными координатами и указанным отображением A и вектором $\omega \in T$ (§ 3, 4 гл. 4) можно построить аналогично теории (A, ω) -цепных дробей из главы 1, и в этой теории справедливы все основные результаты главы 1. Введенные обобщенные дроби названы в главе 4 (A, p, ω) -цепными дробями в связи с тем, что они дополнительно зависят от последовательности p . Эти дроби также могут быть как конечными, так и бесконечными (§ 3), для бесконечных дробей также можно построить теорию подходящих дробей (§ 4), а свойство конечности (A, p, ω) -цепных дробей справедливо для почти всех относительно меры mes векторов $x \in T$ при некотором ω , принадлежащем подмножеству тора T положительной меры mes , и для всех $x \in T$ при некотором ω , принадлежащем цилиндру (теорема 5 § 3 гл. 4).

Построенная теория в § 5 главы 4 применяется к задаче о распределении квадратичных вычетов и невычетов по простому модулю, восходящей к Эйлеру и Гауссу. Со времен Эйлера известно, что если $\tilde{p}$ – простое число, большее, чем 2, то среди вычетов $1, 2, \dots, \tilde{p} - 1$ количество квадратичных вычетов по модулю $\tilde{p}$ совпадает с количеством квадратичных невычетов по модулю $\tilde{p}$ (см. [60]). Проблема, связанная с хорошо известной гипотезой И. М. Виноградова [61], [62], окончательное решение которой в настоящее время не получено, состоит в доказательстве аналога этого утверждения при $\tilde{p} \rightarrow \infty$ для сколь угодно медленно возрастающих с ростом $\tilde{p}$ длин $r_{\tilde{p}}$ отрезков $X_{\tilde{p}} = (x_{\tilde{p}} + 1, \dots, x_{\tilde{p}} + r_{\tilde{p}})$ последовательно расположенных целых чисел $x_{\tilde{p}} + 1, \dots, x_{\tilde{p}} + r_{\tilde{p}}$. Это означает, что при $\tilde{p} \rightarrow \infty$ количество $Q'_{\tilde{p}}$ квадратичных вычетов и количество $Q''_{\tilde{p}}$ квадратичных невычетов по модулю $\tilde{p}$, содержащихся внутри отрезка $X_{\tilde{p}}$, имеют вид

$$Q'_{\tilde{p}} = \frac{r_{\tilde{p}}}{2} + o(r_{\tilde{p}}), \quad Q''_{\tilde{p}} = \frac{r_{\tilde{p}}}{2} + o(r_{\tilde{p}}), \quad (5)$$

где $\lim_{\tilde{p} \rightarrow \infty} o(r_{\tilde{p}})/r_{\tilde{p}} = 0$. Результатов, полученных в направлении решения указанной проблемы, весьма немного. Прежде всего отметим, что если последовательность $r_{\tilde{p}}$ ограничена при $\tilde{p} \rightarrow \infty$, то для бесконечного числа отрезков $X_{\tilde{p}}$ при $\tilde{p} \rightarrow \infty$ равенства (5) не справедливы [63]. Если же $r_{\tilde{p}} = [\tilde{p}^\varepsilon]$, то для $\varepsilon > 1/4$ равенства (5) доказаны в [64] для отрезков $X_{\tilde{p}}$ с любым значением $x_{\tilde{p}}$, причем первоначально это утверждение было доказано в [61] для $\varepsilon > 1/2$. Главным результатом главы 4 является теорема 8 (§ 5), в которой дано доказательство равенств (5) для сколь угодно медленно возрастающей функции $\psi(\tilde{p}) = r_{\tilde{p}}$, для любой подпоследовательности простых чисел p_n (вместо всех простых чисел $\tilde{p}$), скорость возрастания которой при $n \rightarrow \infty$ больше некоторой функции, зависящей от функции $\psi(\tilde{p})$, и для почти всех наборов отрезков X_{p_n} с точки зрения меры mes на торе T . При этом утверждение теоремы 8 касается любой совокупности отрезков X_{p_n} , но конкретные длины r_{p_n} этих отрезков определяются в результате разложения вектора $x = (x_{p_1}, x_{p_2}, \dots) \in T$, у которого n -я координата есть x_{p_n} , в (A, p, ω) -цепную дробь, для которой $A = A_*$ – некоторое конкретное бесконечномерное преобразование, $p = (p_1, p_2, \dots)$ – последовательность, состоящая из простых чисел p_n , а вектор $\omega \in \Omega$, где Ω – некоторое подмножество тора T , явно построенное в § 5 главы 4. Если при некотором $\omega \in \Omega$ (A_*, p, ω) -цепная дробь вектора x – конечная (это имеет место для почти всех $x \in T$), то равенства (5) справедливы для всех элементов p_n последовательности p , а если при $\omega \in \Omega$ (A_*, p, ω) -цепная дробь вектора x – бесконечная, то равенства (5) справедливы для некоторого начального отрезка чисел последовательности p , который определяется с помощью (A_*, p, ω) -подходящей дроби вектора x , причем длина этого начального отрезка стремится к бесконечности при увеличении длины аппроксимирующей вектор x подходящей дроби. Теорема 8 есть следствие теоремы 7 (§ 5 гл. 4) об оценках коротких сумм символов Лежандра с помощью (A, p, ω) -цепных дробей, имеющей самостоятельное значение.

Основные результаты главы 4 опубликованы в [34] и [38], а доказательство эргодичности преобразования $\bar{A}$ для важного частного случая $A = A_*$ дано в [65]. Это доказательство, а также доказательство более слабой теоремы о распределении квадратичных вычетов и невычетов, данное в [65], легко распространяются на случай произвольного отображения A и приводят к теоремам 7 и 8 главы 4.

Нумерация всех утверждений и обозначений в каждой главе работы – своя. Отметим, что при обозначении обобщенных цепных дробей в главах 1, 2 и 4 неполные

частные обозначаются буквами q с верхними индексами, а в главе 3 – буквами a с нижними индексами в отличие от равенств (1) и (2) из введения.

Глава 1. Многомерные обобщенные цепные дроби, суммы Вейля и распределение дробных частей значений многочлена

Обозначения

- 1) $\mathbb{R}_n$ – n -мерное вещественное линейное пространство.
- 2) T_n – n -мерный тор

$$T_n = \{y_1, \dots, y_n : 0 \leq y_1 < 1, \dots, 0 \leq y_n < 1\},$$

который является прямым произведением n окружностей длины 1.

- 3) mes – лебегова мера на T_n .
- 4) Выражение, согласно которому утверждение справедливо для почти всех точек $x \in \mathbb{R}_n$, означает, что оно справедливо для всех x из $\mathbb{R}_n$, кроме множества лебеговой меры нуль.
- 5) Для вещественного числа x символ $\{x\}$ обозначает дробную часть x , а символ $[x]$ – целую часть x .
- 6) Для вектора $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n$ символ $\{x\}$ обозначает вектор $\{x\} = (\{x_1\}, \dots, \{x_n\})$, у которого при $1 \leq s \leq n$ s -я координата есть $\{x_s\}$.
- 7) Если n, m – натуральные числа и $0 < m \leq n$, то символ $\binom{n}{m}$ есть число сочетаний из n элементов по m , а $\binom{n}{0} = 1$.

§ 1. Разложение вектора в обобщенную цепную дробь, отвечающую отображению и вектору

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n$, A – взаимно однозначное отображение $\mathbb{R}_n$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in T_n$. Представим x в виде обобщенной цепной дроби, отвечающей отображению A и вектору ω , которую мы будем называть (A, ω) -цепной дробью. Будем обозначать (A, ω) -цепную дробь вектора x в виде $x = [q^{(0)}, \dots, q^{(m)}]_{A, \omega}$, если она конечная, и в виде $x = [q^{(0)}, q^{(1)}, \dots]_{A, \omega}$, если она бесконечная. Пусть $q^{(0)} = (q_1^{(0)}, \dots, q_n^{(0)})$ – вектор такой, что $q_s^{(0)} = [x_s]$ при $s = 1, \dots, n$. Полагаем $x = x^{(0)} = q^{(0)} + \delta^{(0)}$. Если $\delta^{(0)} = \omega$, то процесс построения цепной дроби на этом заканчивается и $x = [q^{(0)}]_{A, \omega}$. Если же $\delta^{(0)} \neq \omega$, то полагаем $x^{(1)} = A\delta^{(0)}$. Предположим теперь, что при некотором целом $k \geq 0$ построены n -мерные векторы $q^{(0)}, q^{(1)}, \dots, q^{(k)}$ с целочисленными координатами и n -мерные векторы $x^{(0)}, \dots, x^{(k+1)}$ такие, что при $s = 0, \dots, k$ $x^{(s)} = q^{(s)} + \delta^{(s)}$ и $\delta^{(s)} \neq \omega$. Пусть $q^{(k+1)} = (q_1^{(k+1)}, \dots, q_n^{(k+1)})$ – такой вектор, что $q_\nu^{(k+1)} = [x_\nu^{(k+1)}]$ при $\nu = 1, \dots, n$, и полагаем $x^{(k+1)} = q^{(k+1)} + \delta^{(k+1)}$. Если $\delta^{(k+1)} = \omega$, то процесс построения (A, ω) -цепной дроби заканчивается и $x = [q^{(0)}, \dots, q^{(k+1)}]_{A, \omega}$. Если же $\delta^{(k+1)} \neq \omega$, то полагаем $x^{(k+2)} = A\delta^{(k+1)}$.

Если $\delta^{(k)} \neq \omega$ для всех $k \geq 0$, то $x = [q^{(0)}, q^{(1)}, \dots]_{A, \omega}$ и (A, ω) -цепная дробь вектора x – бесконечная. Представление вектора x в виде (A, ω) -цепной дроби полностью описано. Из конструкции (A, ω) -цепной дроби следует, что достаточно иметь отображение $A: T_n \setminus \omega \rightarrow \mathbb{R}_n$. В частном случае, когда x – число ($n = 1$), $\omega = 0$, а $A = \Gamma$ –

отображение множества $T_1 \setminus 0$, имеющее вид $\Gamma: y \rightarrow 1/y$, (A, ω) -цепная дробь совпадает с обычной. Далее мы рассмотрим некоторые новые примеры отображений A , для которых описанная выше конструкция представляет интерес с точки зрения приложений к анализу и теории чисел.

ПРИМЕР 1. Пусть $n \geq 1$, отображение $A = A_n$ имеет вид $A_n: y = (y_1, \dots, y_n) \rightarrow y' = (y'_1, \dots, y'_n)$, где $y'_\nu = y_\nu + \gamma_\nu$ ($\nu = 1, \dots, n$), а числа $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ таковы, что если $m, m_1, \dots, m_n$ — целые числа, то равенство $m_1\gamma_1 + \dots + m_n\gamma_n = m$ возможно только в случае $m_1 = \dots = m_n = 0$.

ПРИМЕР 2. Пусть $n > 1$, а отображение $A = B_n$ имеет вид $B_n: y = (y_1, \dots, y_n) \rightarrow y' = (y'_1, \dots, y'_n)$, где

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_1 + \kappa_1, \\ y'_\nu &= y_\nu + \kappa_\nu + \sum_{j=1}^{\nu-1} a_{\nu j} y_j \quad (\nu = 2, \dots, n), \end{aligned}$$

κ_1 — иррациональное число, $a_{\nu j}$ — целые числа, $a_{\nu j} \neq 0$.

В дальнейшем будем предполагать, что отображение A совпадает с одним из отображений A_n или B_n , указанных в примерах 1, 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Введем отображение $\bar{A}$ тора T_n , которое совпадает с A , если равенства для y'_ν ($\nu = 1, \dots, n$) в примерах 1 и 2 рассматривать как сравнения по модулю 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. $\hat{A}$ — отображение тора T_n , обратное к отображению $\bar{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Отображение тора T_n , сохраняющее меру Лебега на T_n , называется строго эргодичным, если оно эргодично и эргодическая теорема Биркгофа для любой непрерывной функции на T_n справедлива для всех точек из T_n .

ЛЕММА. Если отображение A совпадает с преобразованиями A_n или B_n , введенными в примерах 1 и 2, то соответствующие отображения $\bar{A}$ и $\hat{A}$ на торе T_n определены, строго эргодичны и любая траектория $\bar{A}$ и $\hat{A}$ на T_n всюду плотна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование отображений $\bar{A}$ и $\hat{A}$ для преобразований $A = A_n$ и $A = B_n$ следует из определений A_n и B_n в примерах 1, 2, а утверждения о строгой эргодичности и всюду плотности траекторий в этих случаях доказаны в [49] и [48].

ТЕОРЕМА 1. (A, ω) -цепная дробь вектора x конечна тогда и только тогда, когда вектор $\{x\}$ принадлежит траектории $\hat{A}^k \omega$ ($k = 0, 1, \dots$), где $\hat{A}^k$ — k -я степень $\hat{A}$ ($\hat{A}^0$ — тождественное отображение на T_n).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что (A, ω) -цепная дробь $x = [q^{(0)}, \dots, q^{(m)}]_{A, \omega}$ вектора $x \in \mathbb{R}_n$ — конечная. В силу определения 1, предыдущей леммы и построения (A, ω) -цепной дроби при $k = 0, \dots, m$ имеем: $\delta^{(k)} = \bar{A}^k \{x\}$, $\delta^{(m)} = \bar{A}^m \{x\} = \omega$. Поэтому согласно определению 2 и лемме $\{x\} = \hat{A}^m \omega$.

Обратно, пусть при некотором целом $m \geq 0$ $\{x\} = \hat{A}^m \omega$, а при любом неотрицательном целом $s < m$ $\hat{A}^s \omega \neq \{x\}$. Тогда $\delta^{(m)} = \omega$, а при $s < m$ $\delta^{(s)} \neq \omega$, что и доказывает конечность (A, ω) -цепной дроби вектора x .

ТЕОРЕМА 2. *Разным n -мерным векторам соответствуют разные (A, ω) -цепные дроби.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ и $\bar{\bar{x}} = (\bar{\bar{x}}_1, \dots, \bar{\bar{x}}_n)$ – два различных n -мерных вектора. Полагаем $\bar{x} = \bar{q} + \bar{\delta}$, $\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{q}} + \bar{\bar{\delta}}$, где $\bar{q} = (\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n)$, $\bar{\bar{q}} = (\bar{\bar{q}}_1, \dots, \bar{\bar{q}}_n)$, $\bar{q}_\nu = [\bar{x}_\nu]$, $\bar{\bar{q}}_\nu = [\bar{\bar{x}}_\nu]$ ($\nu = 1, \dots, n$), $\bar{\delta} = (\bar{\delta}_1, \dots, \bar{\delta}_n)$, $\bar{\bar{\delta}} = (\bar{\bar{\delta}}_1, \dots, \bar{\bar{\delta}}_n)$.

Пусть разложение в (A, ω) -цепную дробь хотя бы одного из векторов $\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}$ конечно. Если $\bar{q} \neq \bar{\bar{q}}$, то утверждение теоремы 2 следует из построения (A, ω) -цепной дроби. Если $\bar{q} = \bar{\bar{q}}$, то согласно условию теоремы 2 $\bar{\delta} \neq \bar{\bar{\delta}}$. Предполагая же, что (A, ω) -цепные дроби векторов $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$ совпадают, в силу теоремы 1 имеем: $\bar{\delta} = \bar{\bar{\delta}} = \hat{A}^k \omega$, где k – некоторое натуральное число. Полученное противоречие доказывает теорему 2 в случае, когда (A, ω) -цепная дробь хотя бы одного из векторов $\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}$ конечна. Пусть теперь (A, ω) -цепные дроби векторов $\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}$ бесконечны, $\bar{x} = [\bar{q}^{(0)}, \bar{q}^{(1)}, \dots]_{A, \omega}$, $\bar{\bar{x}} = [\bar{\bar{q}}^{(0)}, \bar{\bar{q}}^{(1)}, \dots]_{A, \omega}$. Предполагая, что (A, ω) -цепные дроби $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$ совпадают, получим, что $\bar{q}^{(k)} = \bar{\bar{q}}^{(k)}$ при всех целых $k \geq 0$, $\bar{q} = \bar{\bar{q}}$, и, следовательно, $\bar{\delta} \neq \bar{\bar{\delta}}$. Пусть s – такое наименьшее натуральное число, что $\bar{\delta}_s \neq \bar{\bar{\delta}}_s$. Рассмотрим сначала случай, когда отображение $A = A_n$ (пример 1). При $k = 0, 1, \dots$ введем векторы $\bar{\delta}^{(k)} = \bar{A}^k \bar{\delta} = (\bar{\delta}_1^{(k)}, \dots, \bar{\delta}_n^{(k)})$, $\bar{\bar{\delta}}^{(k)} = \bar{A}^k \bar{\bar{\delta}} = (\bar{\bar{\delta}}_1^{(k)}, \dots, \bar{\bar{\delta}}_n^{(k)})$, $\bar{x}^{(k)} = \bar{q}^{(k)} + \bar{\delta}^{(k)} = (\bar{x}_1^{(k)}, \dots, \bar{x}_n^{(k)})$, $\bar{\bar{x}}^{(k)} = \bar{\bar{q}}^{(k)} + \bar{\bar{\delta}}^{(k)} = (\bar{\bar{x}}_1^{(k)}, \dots, \bar{\bar{x}}_n^{(k)})$ ($\bar{A}$ – тождественное отображение). Из определения (A, ω) -цепной дроби и определения отображения A_n в примере 1 следует, что

$$\begin{aligned} \bar{x}^{(k)} &= A \bar{\delta}^{(k-1)} = \bar{\delta}^{(k-1)} + \gamma, \quad \bar{\bar{x}}^{(k)} = A \bar{\bar{\delta}}^{(k-1)} = \bar{\bar{\delta}}^{(k-1)} + \gamma, \\ \bar{q}_s^{(k)} &\leq \bar{x}_s^{(k)} < \bar{q}_s^{(k)} + 1, \quad \bar{\bar{q}}_s^{(k)} \leq \bar{\bar{x}}_s^{(k)} < \bar{\bar{q}}_s^{(k)} + 1, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\bar{x}_s^{(k)} - \bar{\bar{x}}_s^{(k)} = \bar{\delta}_s - \bar{\bar{\delta}}_s, \quad (2)$$

где $k = 1, 2, \dots, \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Предположим для определенности, что

$$\bar{\delta}_s > \bar{\bar{\delta}}_s. \quad (3)$$

В силу леммы и определения векторов $\bar{\delta}^{(k)}$ существует такое натуральное число k_0 , что

$$\bar{\delta}_s^{(k_0)} < \bar{\delta}_s - \bar{\bar{\delta}}_s. \quad (4)$$

Но так как при всех $k \geq 1$

$$\bar{x}_s^{(k)} = \bar{q}_s^{(k)} + \bar{\delta}_s^{(k)}, \quad \bar{\bar{x}}_s^{(k)} = \bar{\bar{q}}_s^{(k)} + \bar{\bar{\delta}}_s^{(k)} = \bar{q}_s^{(k)} + \bar{\bar{\delta}}_s^{(k)},$$

то в силу (1)–(3) имеем: $\bar{\delta}_s^{(k_0)} - \bar{\bar{\delta}}_s^{(k_0)} = \bar{\delta}_s - \bar{\bar{\delta}}_s > 0$, что противоречит (4). Таким образом, теорема 2 доказана для случая, когда $A = A_n$.

Предположим теперь, что отображение $A = B_n$ (пример 2). Если наименьшее натуральное число s , для которого $\bar{\delta}_s \neq \bar{\bar{\delta}}_s$, удовлетворяет равенству $s = 1$, то, применяя приведенное выше доказательство, относящееся к отображению $A = A_n$ для

$n = 1$, мы в силу определения преобразования B_n в примере 2 придем к противоречию с предположением, что (A, ω) -цепные дроби $\bar{x}$ и $\overline{\bar{x}}$ совпадают. Поэтому рассмотрим случай $s > 1$ и для определенности будем предполагать, что справедливо неравенство (3). Так же, как и в доказательстве этой теоремы, для случая $A = A_n$ введем $\bar{\delta}^{(k)}, \overline{\bar{\delta}}^{(k)}, \bar{x}^{(k)}, \overline{\bar{x}}^{(k)}$ при $k = 0, 1, \dots$. При этом из предположения о том, что (A, ω) -цепные дроби $\bar{x}$ и $\overline{\bar{x}}$ совпадают, следуют неравенства (1), а из предположения о том, что s – наименьшее число, для которого $\bar{\delta}_s \neq \overline{\bar{\delta}}_s$, и из определения преобразования B_n в примере 2 следуют равенства (2). Применяя теперь лемму к отображению $\overline{B}_s: y = (y_1, \dots, y_s) \rightarrow (\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_s)$ тора T_s , имеющему вид

$$\overline{y}_1 = y_1 + \kappa_1 \pmod{1}, \quad \overline{y}_\nu = y_\nu + \kappa_\nu + \sum_{j=1}^{\nu-1} a_{\nu j} y_j \pmod{1} \quad (\nu = 2, \dots, s),$$

получим, что существует такое натуральное число k_0 , что выполнено неравенство (4). Поэтому, повторяя доказательство теоремы 2 для случая $A = A_n$, мы из (1)–(4) получим противоречие с предположением о равенстве (A, ω) -цепных дробей векторов $\bar{x}$ и $\overline{\bar{x}}$. Теорема 2 доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Бесконечная (A, ω) -цепная дробь $x = [q^{(0)}, q^{(1)}, \dots]_{A, \omega}$ вектора x не может быть периодической, т.е. не существует таких натуральных чисел k_0 и h , что для любого натурального числа $k \geq k_0$ выполнено равенство $q^{(k+h)} = q^{(k)}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. бесконечная (A, ω) -цепная дробь $x = [q^{(0)}, q^{(1)}, \dots]_{A, \omega}$ такова, что $q^{(k+h)} = q^{(k)}$ при $k \geq k_0$. Рассмотрим преобразования $\bar{A}, \tilde{A} = \bar{A}^h$ тора T_n , где $\bar{A}^h$ есть h -я степень $\bar{A}$. Из эргодической теории следует [48], что любая степень отображения $\bar{A}$ также строго эргодична. Поэтому в силу леммы отображение $\tilde{A}$ строго эргодично, и, следовательно, любая его траектория всюду плотна на T_n . Далее, из определений A_n и B_n в примерах 1 и 2 следует, что существует такое $\varepsilon > 0$, что для любых точек $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in T_n$, $\overline{\bar{x}} = (\overline{\bar{x}}_1, \dots, \overline{\bar{x}}_n) \in T_n$, у которых $0 \leq \bar{x}_1 < \varepsilon$, $1 - \varepsilon \leq \overline{\bar{x}}_1 < 1$, их образы $\overline{y} = (\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_n) = A\bar{x}$, $\overline{\overline{y}} = (\overline{\overline{y}}_1, \dots, \overline{\overline{y}}_n) = \tilde{A}\overline{\bar{x}}$ при отображении A удовлетворяют следующему условию:

$$[\overline{y}_1] \neq [\overline{\overline{y}}_1]. \quad (5)$$

Введем точки $\delta = \{x\}$, $\delta^{(k)} = \bar{A}^k \delta$ и два множества $\overline{M} \subset T_n$, $\overline{\overline{M}} \subset T_n$ такие, что

$$\begin{aligned} \overline{M} &= \{y = (y_1, \dots, y_n) : 0 \leq y_1 < \varepsilon\}, \\ \overline{\overline{M}} &= \{y = (y_1, \dots, y_n) : 1 - \varepsilon \leq y_1 < 1\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где ε – число, указанное выше, для которого справедливо неравенство (5). Так как траектория $\tilde{A}^m \delta^{(k)}$ ($m = 1, 2, \dots$) всюду плотна на T_n , то существуют такие натуральные числа $\bar{n}$ и $\overline{\bar{n}}$, что

$$\bar{A}^{h\bar{n}} \delta^{(k)} = \tilde{A}^{\bar{n}} \delta^{(k)} \in \overline{M}, \quad \bar{A}^{h\overline{\bar{n}}} \delta^{(k)} = \tilde{A}^{\overline{\bar{n}}} \delta^{(k)} \in \overline{\overline{M}}. \quad (7)$$

Но из построения (A, ω) -цепной дроби следует, что векторы

$$q^{(h\bar{n}+k+1)} = (q_1^{(h\bar{n}+k+1)}, \dots, q_n^{(h\bar{n}+k+1)}), \quad q^{(h\bar{\bar{n}}+k+1)} = (q_1^{(h\bar{\bar{n}}+k+1)}, \dots, q_n^{(h\bar{\bar{n}}+k+1)}),$$

входящие в (A, ω) -цепную дробь $x = [q^{(0)}, q^{(1)}, \dots]_{A, \omega}$, связаны с векторами

$$\begin{aligned} x^{(h\bar{n}+k+1)} &= (x_1^{(h\bar{n}+k+1)}, \dots, x_n^{(h\bar{n}+k+1)}) = A\bar{A}^{h\bar{n}}\delta^{(k)}, \\ x^{(h\bar{\bar{n}}+k+1)} &= (x_1^{(h\bar{\bar{n}}+k+1)}, \dots, x_n^{(h\bar{\bar{n}}+k+1)}) = A\bar{A}^{h\bar{\bar{n}}}\delta^{(k)} \end{aligned}$$

с помощью следующих равенств:

$$q_\nu^{(h\bar{n}+k+1)} = [x_\nu^{(h\bar{n}+k+1)}], \quad q_\nu^{(h\bar{\bar{n}}+k+1)} = [x_\nu^{(h\bar{\bar{n}}+k+1)}],$$

$\nu = 1, \dots, n$. Поэтому в силу (5), (6) и (7) $q_1^{(h\bar{n}+k+1)} \neq q_1^{(h\bar{\bar{n}}+k+1)}$, $q^{(h\bar{n}+k+1)} \neq q^{(h\bar{\bar{n}}+k+1)}$, что противоречит предположению о периодичности бесконечной (A, ω) -цепной дроби вектора x . Теорема 3 доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\Omega \subset T_n$, Ω – измеримое по Лебегу множество, имеющее положительную меру. Тогда выполняются следующие утверждения:

- 1) для почти всех $x \in \mathbb{R}_n$ существует такое $\omega = \omega(x) \in \Omega$, что (A, ω) – цепная дробь вектора x – конечная;
- 2) утверждение 1) справедливо для всех $x \in \mathbb{R}_n$, если лебегова мера границы Ω равна 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\chi(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \in \Omega, \\ 0, & \text{если } y \notin \Omega. \end{cases}$$

Применяя эргодическую теорему Биркгофа и лемму к преобразованию $\bar{A}$ и функции $\chi(y)$, для почти всех $x \in \mathbb{R}_n$ получим:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi(\bar{A}^k \{x\}) = \text{mes } \Omega > 0. \quad (8)$$

Поэтому утверждение 1) следует из определения 2 и теоремы 1. Для доказательства утверждения 2) достаточно показать, что предел в (8) существует для всех $\delta = \{x\} \in T_n$. Для любой точки $\delta \in T_n$ обозначим через $\sigma_\delta^{(N)}$ меру, сосредоточенную в точках $\bar{A}^k \delta$ ($1 \leq k \leq N$), такую, что $\sigma_\delta^{(N)}(\bar{A}^k \delta) = 1/N$. Так как T_n – метрический компакт, а в силу леммы отображение $\bar{A}$ строго эргодично, то мера $\sigma_\delta^{(N)}$ слабо сходится к мере Лебега [48]. Поэтому из общей теории сходимости вероятностных мер [53] следует, что если лебегова мера границы Ω равна нулю, то сходимость в (8) имеет место для всех $\delta \in T_n$. Теорема 4 доказана.

§ 2. Подходящие дроби, отвечающие отображению и вектору

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $x = [q^{(0)}, q^{(1)}, \dots]_{A, \omega}$ есть (A, ω) -цепная дробь вектора x . При $\nu = 0, 1, \dots$ введем (A, ω) -подходящие дроби $S^{(\nu)} = [q^{(0)}, \dots, q^{(\nu)}]_{A, \omega}$ вектора x следующим образом:

$$S^{(0)} = q^{(0)} + \omega, \\ S^{(\nu)} = q^{(0)} + A^{-1}(\dots(q^{(\nu-2)} + A^{-1}(q^{(\nu-1)} + A^{-1}(q^{(\nu)} + \omega))) \dots), \quad \nu > 0, \quad (9)$$

где A^{-1} – отображение, обратное к A , правая часть в (9) обозначает конечную итерационную процедуру, состоящую из ν шагов, в которой на первом шаге находится величина $S^{(\nu)}(1) = q^{(\nu-1)} + A^{-1}(q^{(\nu)} + \omega)$, а при целом k , удовлетворяющем условию $1 < k \leq \nu$, на k -м шаге находится $S^{(\nu)}(k) = q^{(\nu-k)} + A^{-1}S^{(\nu)}(k-1)$ и затем полагается $S^{(\nu)} = S^{(\nu)}(\nu)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть (A, ω) -цепная дробь вектора x – бесконечная и $S^{(\nu)}$ ($\nu = 0, 1, \dots$) – (A, ω) -подходящие дроби вектора x . Тогда если $A = A_n$, то x – предельная точка последовательности $S^{(\nu)}$, а если $A = B_n$, то $\{x\}$ – предельная точка последовательности $\{S^{(\nu)}\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Можно показать, что, если $A = B_n$, то более сильное утверждение о том, что x – предельная точка последовательности $S^{(\nu)}$, не справедливо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = A_n$, $\delta = \{x\}$, а при $\nu = 0, 1, \dots$ введем векторы $\delta^{(\nu)} = \overline{A}^\nu \delta$. Из построения (A, ω) -цепной дроби следует, что при любом $\nu > 0$ вектор x можно представить в виде следующего выражения:

$$x = q^{(0)} + A^{-1}(\dots(q^{(\nu-2)} + A^{-1}(q^{(\nu-1)} + A^{-1}(q^{(\nu)} + \delta^{(\nu)}))) \dots), \quad (10)$$

которое обозначает конечную итерационную процедуру, состоящую из ν шагов, в которой на первом шаге находится величина $\beta_1^{(\nu)} = q^{(\nu-1)} + A^{-1}(q^{(\nu)} + \delta^{(\nu)})$, а при целом k с условием $1 < k \leq \nu$ на k -м шаге находится величина $\beta_k^{(\nu)} = q^{(\nu-k)} + A^{-1}\beta_{k-1}^{(\nu)}$. Но в силу определения преобразования A_n в примере 1 §1 из равенств (9) и (10) следует, что

$$x - S^{(\nu)} = \delta^{(\nu)} - \omega.$$

Поэтому утверждение теоремы 5 для случая $A = A_n$ следует из леммы §1, согласно которой ω есть предельная точка последовательности $\delta^{(\nu)}$.

Пусть теперь $A = B_n$. В силу равенства (9) и определения отображения B_n в примере 2 §1 имеем:

$$\{x\} - \{S^{(\nu)}\} = \{x\} - \widehat{A}^\nu \omega,$$

где $\nu = 0, 1, \dots$, а $\widehat{A}^\nu$ есть ν -я степень отображения, введенного в определении 2 §1. Поэтому утверждение теоремы 5 для случая $A = B_n$ следует из леммы §1, согласно которой траектория $\widehat{A}^\nu \omega$ всюду плотна на T_n . Теорема 5 доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_s > 0$ ($s = 1, \dots, n$). Введем множество $U_\varepsilon(x) = \{y = (y_1, \dots, y_n) : |y_s - x_s| < \varepsilon_s; s = 1, \dots, n\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $x \in \mathbb{R}_n$, $\varepsilon_s > 0$ ($s = 1, \dots, n$), N – натуральное число, а $S^{(\nu)}$ ($\nu = 0, 1, \dots$) есть (A, ω) -подходящая дробь вектора x . Введем величины $\mathcal{D}_{N,\varepsilon}(x)$ и $\tilde{\mathcal{D}}_{N,\varepsilon}(x)$ следующим образом: $\mathcal{D}_{N,\varepsilon}(x)$ – количество таких чисел ν в ряду $1, \dots, N$, что $S^{(\nu)} \in U_\varepsilon(x)$, а $\tilde{\mathcal{D}}_{N,\varepsilon}(x)$ – количество таких чисел ν в ряду $1, \dots, N$, что $\{S^\nu\} \in U_\varepsilon(\{x\})$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть x разлагается в бесконечную (A, ω) -цепную дробь. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что если $\varepsilon_s \leq \varepsilon_0$ ($s = 1, \dots, n$), то: если $A = A_n$, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{D}_{N,\varepsilon}(x)}{N} = 2^n \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n,$$

а если $A = B_n$, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\mathcal{D}}_{N,\varepsilon}(x)}{N} = 2^n \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства теоремы 5 следует, что величины $\mathcal{D}_{N,\varepsilon}(x)$ и $\tilde{\mathcal{D}}_{N,\varepsilon}(x)$ совпадают соответственно с величинами $Q_{N,\varepsilon}(x)$ и $\tilde{Q}_{N,\varepsilon}(x)$, которые определяются следующим образом: $Q_{N,\varepsilon}(x)$ есть количество таких чисел ν в ряду $1, \dots, N$, что $\delta^{(\nu)} \in U_\varepsilon(\omega)$, где при $\nu = 0, 1, \dots$ $\delta^{(\nu)}$ – величины, введенные в доказательстве теоремы 5, а $\tilde{Q}_{N,\varepsilon}(x)$ есть количество таких ν в ряду $1, \dots, N$, что $\hat{A}^\nu \omega \in U_\varepsilon(\{x\})$. Применяя теперь эргодическую теорему Биркгофа к преобразованиям $\bar{A}$ и $\hat{A}$ на торе T_n и к характеристическим функциям $\chi(y)$ и $\tilde{\chi}(y)$ множеств $U_\varepsilon(\omega) \subset T_n$, $U_\varepsilon(\{x\}) \subset T_n$ соответственно, в силу леммы §1 получим:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \tilde{Q}_{N,\varepsilon}(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{\chi}(\hat{A}^k \omega) = \int_{T_n} \tilde{\chi}(y) dy = 2^n \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \\ &= \int_{T_n} \chi(y) dy = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi(\bar{A}^k \delta^{(0)}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Q_{N,\varepsilon}(x). \end{aligned}$$

Теорема 6 доказана.

§3. Оценки сумм Вейля и остаточного члена в законе распределения дробных частей значений многочлена

Для формулировок теорем 7 и 8 нам требуется ввести ряд объектов:

n, P, k – натуральные числа, удовлетворяющие условиям $n > 3, P \geq 2, k \geq 1$;

a_n – вещественное число;

ρ – вещественное число, удовлетворяющее условию $0 < \rho < \frac{1}{2}$;

z – комплексное число;

$H_P^{(k)}$ – линейное отображение $H_P^{(k)}: T_k \rightarrow T_P$, имеющее следующий вид: если $y^{(k)} = (y_1^{(k)}, \dots, y_k^{(k)}) \in T_k$, $H_P^{(k)} y^{(k)} = y^{(P)} = (y_1^{(P)}, \dots, y_P^{(P)}) \in T_P$, то при $1 \leq j \leq P$

$$y_j^{(P)} = \sum_{s=1}^k j^s y_s^{(k)} \pmod{1};$$

$K_{P,k}^{(\rho)} = \{z : |z| > (k!)^{\frac{1}{2k}} P^{1-\rho}\}$ – дополнение к замкнутому кругу на комплексной плоскости;

i – мнимая единица;

при $m = 1, \dots, P^2$ введем следующие объекты:

$\varphi_P^{(m)}$ – функция на T_P такая, что если $y^{(P)} = (y_1^{(P)}, \dots, y_P^{(P)}) \in T_P$, то $\varphi_P^{(m)}(y^{(P)}) = \sum_{j=1}^P e^{2\pi i(m a_n j^n + y_j^{(P)})}$,

$\psi_{n-1,P}^{(m)}$ – функция на T_{n-1} такая, что, если $y^{(n-1)} \in T_{n-1}$, то $\psi_{n-1,P}^{(m)}(y^{(n-1)}) = \varphi_P^{(m)}(H_P^{(n-1)} y^{(n-1)})$,

$\Pi_{P,\rho}^{(m)} = (\psi_{n-1,P}^{(m)})^{-1} K_{P,n-1}^{(\rho)}$ – полный прообраз множества $K_{P,n-1}^{(\rho)}$ относительно отображения $\psi_{n-1,P}^{(m)}$ на торе T_{n-1} ,

$\Pi_{P,\rho}^{(m,m)} = \bigcup_{g_1, \dots, g_{n-1}=0}^{m-1} \Omega_{g_1, \dots, g_{n-1}}^{(m)}$, где теоретико-множественная сумма берется по всем целым $g_1, \dots, g_{n-1}$, которые независимо друг от друга принимают значения $0, \dots, m-1$, а $\Omega_{g_1, \dots, g_{n-1}}^{(m)}$ – область, которая получается из области $\Pi_{P,\rho}^{(m)}$ путем преобразования, переводящего точку $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \Pi_{P,\rho}^{(m)}$ в точку $(\{\frac{\alpha_1 + g_1}{m}\}, \dots, \{\frac{\alpha_{n-1} + g_{n-1}}{m}\})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Введем множества

$$\Gamma_{n-1}^{(\rho)} = T_{n-1} \setminus \Pi_{n-1}^{(\rho)}, \quad \widehat{\Gamma}_{n-1}^{(\rho)} = T_{n-1} \setminus \widehat{\Pi}_{n-1}^{(\rho)}$$

на торе T_{n-1} , где

$$\Pi_{n-1}^{(\rho)} = \bigcup_{P=2}^{\infty} \Pi_{P,\rho}^{(1)}, \quad \widehat{\Pi}_{n-1}^{(\rho)} = \bigcup_{P=2}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{P^2} \Pi_{P,\rho}^{(m,m)}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Введем отображение A' пространства $\mathbb{R}_{n-1}$ такое, что если $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}_{n-1}$, то $A'x = x' = (x'_1, \dots, x'_{n-1}) \in \mathbb{R}_{n-1}$, где

$$x'_s = \sum_{j=0}^{n-s-1} \binom{s+j}{j} x_{s+j} + \binom{n}{n-s} a_n, \quad 1 \leq s \leq n-1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отображение A' имеет вид преобразования B_{n-1} , введенного в примере 2 §1, если переменные $x_1, \dots, x_{n-1}$ перенумеровать в обратном порядке, и поэтому если число a_n иррациональное, то для него справедливы все результаты предыдущих параграфов.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $f(x) = a_1 x + \dots + a_n x^n$ – вещественный многочлен, a_n – иррациональное число, P – натуральное число, ρ – любое число, удовлетворяющее условию $0 < \rho < \frac{1}{2}$, $n_0 = 1 + \frac{2}{1-2\rho}$, $S_P = \sum_{j=1}^P e^{2\pi i f(j)}$. Тогда при $n > n_0$ выполняются следующие утверждения:

- 1) если существует такое $\omega \in \Gamma_{n-1}^{(\rho)}$, что (A', ω) -цепная дробь вектора $a = (a_1, \dots, a_{n-1})$ – конечная и имеет вид

$$a = [q^{(0)}, \dots, q^{(\nu)}]_{A', \omega}, \quad (11)$$

то при всех $P \geq 2$

$$|S_P| \leq (\nu + 1 + ((n-1)!)^{\frac{1}{2(n-1)}}) P^{1-\rho}, \quad (12)$$

а множество точек a , для которых справедливы (11) и (12), имеет в $\mathbb{R}_{n-1}$ дополнение нулевой лебеговой меры;

- 2) если при $\omega \in \Gamma_{n-1}^{(\rho)}$ вектор $a = (a_1, \dots, a_{n-1})$ разлагается в бесконечную (A', ω) -цепную дробь $a = [q^{(0)}, q^{(1)}, \dots]_{A', \omega}$, а $S^{(\nu)} = (S_1^{(\nu)}, \dots, S_{n-1}^{(\nu)}) = [q^{(0)}, \dots, q^{(\nu)}]_{A', \omega}$ — такая (A', ω) -подходящая дробь, что при $j = 1, \dots, n-1$

$$|\{a_j\} - \{S_j^{(\nu)}\}| \leq \frac{q^{-j-\rho}}{2\pi(n-1)},$$

то оценка (12) справедлива при $2 \leq P \leq q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определений множества $\Gamma_{n-1}^{(\rho)}$ и отображения A' (определения 7, 8) отображение $\hat{A}$, обратное к $\bar{A}'$, имеет следующий вид:

$$\hat{A}: y = (y_1, \dots, y_{n-1}) \rightarrow \hat{y} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{n-1}),$$

где при $1 \leq s \leq n-1$

$$\hat{y}_s = \sum_{j=0}^{n-s-1} \binom{s+j}{j} (-1)^j y_{s+j} + \binom{n}{n-s} (-1)^{n-s} a_n \pmod{1},$$

а множество $\Gamma_{n-1}^{(\rho)}$ и отображение $\hat{A}$ совпадают с множеством Γ_{n-1} и отображением $\hat{A}_{n-1}(a_n)$, которые были введены в [50] (гл. I, теорема 3 §4 и §1). Поэтому утверждения теоремы 7 непосредственно следуют из равенства $\{S^{(\nu)}\} = \hat{A}^\nu \omega$, теоремы 1 §1 настоящей работы и теоремы 5 из [50] (§4 гл. I). Теорема 7 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В силу теоремы 6 §2 утверждение 2) теоремы 7 справедливо для любого сколь угодно большого q .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В работе [55] доказано, что при $n \geq 2$ и любом $\rho > 0$ множество векторов $a = (a_1, \dots, a_n) \in T_n$, у которых все коэффициенты a_j ($j = 1, \dots, n$) иррациональные и для которых неравенство $|S_P| < P^{1-\rho}$ не выполняется для бесконечного числа чисел P , содержит пересечение счетного числа открытых всюду плотных множеств на T_n . Это утверждение показывает, что результаты теоремы 7 принципиально нельзя улучшить, так как случай 2) этой теоремы имеет место.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $f(x) = a_1x + \dots + a_nx^n$ — вещественный многочлен; a_n — иррациональное число; P — натуральное число; σ и ρ — любые числа, удовлетворяющие условиям $0 < \sigma \leq 1$, $0 < \rho < \frac{1}{2}$; $n_0 = 2 + \frac{4}{1-2\rho}$; $\rho_1 = \frac{1+6\rho}{10-4\rho}$; $\mathcal{D}_P(\sigma) -$

количество тех k в ряду $1, \dots, P$, для которых $\{f(k)\} < \sigma$. Тогда при $n > n_0$ выполняются следующие утверждения:

- 1) если существует такое $\omega \in \widehat{\Gamma}_{n-1}^{(\rho_1)}$, что (A', ω) -цепная дробь вектора $a = (a_1, \dots, a_{n-1})$ – конечная и имеет вид

$$a = [q^{(0)}, \dots, q^{(\nu)}]_{A', \omega}, \quad (13)$$

то при всех $P \geq 2$

$$|\mathcal{D}_P(\sigma) - P\sigma| \leq (c + \nu)P^{1-\rho}, \quad (14)$$

где $c = c(n)$ – константа, не зависящая от

$$a_1, \dots, a_n, \sigma \text{ и } P;$$

множество точек $a = (a_1, \dots, a_{n-1})$, для которых справедливы (13) и (14), имеет в $\mathbb{R}_{n-1}$ дополнение нулевой лебеговой меры;

- 2) если при $\omega \in \widehat{\Gamma}_{n-1}^{(\rho_1)}$ вектор $a = (a_1, \dots, a_{n-1})$ разлагается в бесконечную (A', ω) -цепную дробь, а $S^{(\nu)} = (S_1^{(\nu)}, \dots, S_{n-1}^{(\nu)}) = [q^{(0)}, \dots, q^{(\nu)}]_{A', \omega}$ – такая (A', ω) -подходящая дробь вектора a , что

$$|a_j - S_j^{(\nu)}| \leq \frac{q^{-j-\rho_1-2}}{2\pi(n-1)} \quad (j = 1, \dots, n-1),$$

то оценка (14) справедлива при $2 \leq P \leq q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения числа ρ_1 в формулировке теоремы 8 имеем равенство $n_0 = 2 + \frac{4}{1-2\rho} = 1 + \frac{4}{1-2\rho_1}$, а из определения 7 следует, что $\widehat{\Gamma}_{n-1}^{(\rho_2)} = \widehat{\Gamma}_{n-1}(a_n, \rho)$, где $\rho_2 = \frac{\rho}{2} + \frac{1}{4}$, а $\Gamma_{n-1}(a_n, \rho)$ – множество, введенное в §1 главы 1 работы [50]. Поэтому если бы величина ρ_2 была равна ρ_1 , то теорема 8 непосредственно следовала бы из основной теоремы работы [50], в формулировке которой величина ρ_2 была обозначена, как ρ_1 . Однако доказательство основной теоремы в [50] (§5 гл. 1) сохраняется для любого числа ρ_1 , удовлетворяющего условию $\rho < \rho_1 < \frac{1}{2}$, что и доказывает теорему 8.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В силу теоремы 6 §2 утверждение 2) теоремы 8 справедливо при любом сколь угодно большом q .

§ 4. Оценка остаточного члена в законе совместного распределения дробных частей значений многочлена

Для формулировки теоремы 9 нам, помимо объектов, введенных в начале §3, потребуются следующие объекты:

r – натуральное число, удовлетворяющее условию $r < n$;

ν – величина, принимающая значения $\nu = 1, \dots, r$;

$\widehat{m}_1, \dots, \widehat{m}_r$ – целые числа, удовлетворяющие условию $|\widehat{m}_\ell| \leq P^2$ ($\ell = 1, \dots, r$);

$\widehat{m} = (\widehat{m}_1, \dots, \widehat{m}_r)$ – r -мерный вектор ;

$\kappa_1 = \sum_{\ell=1}^r \widehat{m}_\ell$, $\kappa_\delta = \sum_{\ell=2}^r \delta \ell^{\delta-1} \widehat{m}_\ell$ ($\delta = 2, \dots, n$);
 $a_{n+1}^* = \frac{a_n}{n+1}$, $\tau_{n-\nu+1}^{(\nu)} = \kappa_\nu \binom{n+1}{n+1-\nu} a_{n+1}^*$;
 $I^{(\nu)}$ – отображение, переводящее произвольный вектор $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}_n$ в вектор $\gamma^{(\nu)} = (\gamma_1^{(\nu)}, \dots, \gamma_{n-\nu}^{(\nu)}) \in \mathbb{R}_{n-\nu}$ с координатами $\gamma_s^{(\nu)} = |\gamma_{s+\nu}|$ ($s = 1, \dots, n - \nu$);
 $B^{(\nu)} = (b_{s,t}^{(\nu)})$ – квадратная матрица порядка $n - \nu$ ($s, t = 1, \dots, n - \nu$), у которой матричные элементы $b_{s,t}^{(\nu)}$ имеют вид

$$b_{s,t}^{(\nu)} = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq s - 1, \\ \kappa_{\nu+t-s}^* \binom{\nu+t}{s}, & \text{если } t \geq s, \end{cases}$$

где $\kappa_1^* = r$, $\kappa_\mu^* = \sum_{\ell=2}^r \mu \ell^{\mu-1}$ ($\mu = 2, \dots, n$);
 $\varphi_{\nu,P}^{(\widehat{m})}$ – функция на T_P такая, что если $y^{(P)} = (y_1^{(P)}, \dots, y_P^{(P)}) \in T_P$, то $\varphi_{\nu,P}^{(\widehat{m})}(y^{(P)}) = \sum_{k=1}^P \exp(2\pi i (\tau_{n-\nu+1}^{(\nu)} k^{n-\nu+1} + y_k^{(P)}))$;
 $\psi_{\nu,P}^{(\widehat{m})}$ – функция на $T_{n-\nu}$ такая, что если $y^{(n-\nu)} = (y_1^{(n-\nu)}, \dots, y_{n-\nu}^{(n-\nu)}) \in T_{n-\nu}$, то $\psi_{\nu,P}^{(\widehat{m})}(y^{(n-\nu)}) = \varphi_{\nu,P}^{(\widehat{m})}(H_P^{(n-\nu)} y^{(n-\nu)})$, где для $k = n - \nu$ отображение $H_P^{(n-\nu)}$ введено в начале § 3;
 множество $\Pi_{\nu,P,\rho}^{(\widehat{m})} = (\psi_{\nu,P}^{(\widehat{m})})^{-1} K_{P,n-\nu}^{(\rho)}$ – полный прообраз относительно отображения $\psi_{\nu,P}^{(\widehat{m})}$ множества $K_{P,n-\nu}^{(\rho)}$, введенного при $k = n - \nu$ в начале § 3;
 множество $\Pi_{\nu,P,\rho}^{(\widehat{m}, \widehat{m})}$, которое состоит из таких точек $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in T_n$, что вектор $(\tau_1^{(\nu)}, \dots, \tau_{n-\nu}^{(\nu)})$ с координатами

$$\tau_{n-\nu+1-s}^{(\nu)} = \left\{ \sum_{\mu=0}^{s-1} \kappa_{\nu+\mu} \binom{n+1-s+\mu}{n+1-s-\nu} \beta_{n+1-s+\mu} + \kappa_{\nu+s} \binom{n+1}{n+1-s-\nu} a_{n+1}^* \right\}$$

($s = 1, \dots, n - \nu$) принадлежит области $\Pi_{\nu,P,\rho}^{(\widehat{m})}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Введем множество

$$\Gamma_\rho = T_n \setminus \Pi_\rho \text{ на торе } T_n,$$

где

$$\Pi_\rho = \bigcup_{P=2}^{\infty} \bigcup_{\substack{|\widehat{m}_\ell| \leq P^2 \\ \ell=1, \dots, r}} \bigcup_{\substack{\nu=1 \\ \kappa_\nu \neq 0}}^r \Pi_{\nu,P,\rho}^{(\widehat{m}, \widehat{m})}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Из определения множеств $\Pi_{\nu,P,\rho}^{(\widehat{m}, \widehat{m})}$, Π_ρ и Γ_ρ следует, что множество Γ_ρ можно представить в виде $\Gamma_\rho = T_1 \times \Gamma_\rho^*$, где $\Gamma_\rho^* \subset T_{n-1}$, и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \Gamma_\rho$ тогда и только тогда, когда $(\beta_2, \dots, \beta_n) \in \Gamma_\rho^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Введем отображение $A^* = A^*(a_{n+1}^*)$ пространства $\mathbb{R}_n$, зависящее от параметра a_{n+1}^* , такое, что если $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n$, то $A^*x = x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, где $x_s^* = \sum_{j=0}^{n-s} \binom{s+j}{j} x_{s+j} + \binom{n+1}{n-s+1} a_{n+1}^*$, $1 \leq s \leq n$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$; a_n – иррациональное число; P и r – натуральные числа, $r \geq 2$; $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ и ρ – любые числа, удовлетворяющие условиям $0 < \sigma_k \leq 1$ ($k = 1, \dots, r$), $0 < \rho < \frac{1}{2}$; $\rho_1 = \frac{1+6\rho}{10-4\rho}$; $n_0 = r + \frac{2(1+2r)}{1-2\rho_1}$; $\mathcal{D}_P(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ – количество векторов $\mu_j = (\{f(j)\}, \dots, \{f(j+r-1)\})$ в последовательности $\mu_1, \dots, \mu_P$, принадлежащих множеству $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r : 0 \leq \alpha_1 < \sigma_1, \dots, 0 \leq \alpha_r < \sigma_r\}$. Тогда при $n > n_0$ выполняются следующие утверждения:

- 1) если существует такое $\omega \in \Gamma_{\rho_1}$, что вектор $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$ с координатами $a_s^* = \frac{a_s - 1}{s}$ ($s = 1, \dots, n$) разлагается в конечную (A^*, ω) -цепную дробь

$$a^* = [q^{(0)}, \dots, q^{(\nu)}]_{A^*, \omega}, \quad (15)$$

то при всех $P \geq 2$

$$|\mathcal{D}_P(\sigma_1, \dots, \sigma_r) - P\sigma_1 \dots \sigma_r| \leq (c^* + \nu)P^{1-\rho}, \quad (16)$$

где $c^* = c^*(n)$ – константа, не зависящая от $a_1, \dots, a_n, \sigma_1, \dots, \sigma_r$ и P , а для любого a_0 множество точек $a = (a_1, \dots, a_{n-1})$, для которых справедливы (15) и (16), имеет в $\mathbb{R}_{n-1}$ дополнение нулевой лебеговой меры;

- 2) если при $\omega \in \Gamma_{\rho_1}$ вектор $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$ разлагается в бесконечную (A^*, ω) -цепную дробь, а для некоторого целого $\nu \geq 0$ $S^{(\nu)} = (S_1^{(\nu)}, \dots, S_n^{(\nu)}) = [q^{(0)}, \dots, q^{(\nu)}]_{A^*, \omega}$ – такая (A^*, ω) -подходящая дробь вектора a^* , что при $\delta = 1, \dots, r$ координаты векторов $b^{(\delta)} = (b_1^{(\delta)}, \dots, b_{n-\delta}^{(\delta)}) = B^{(\delta)}I^{(\delta)}(\{a^*\} - \{S^{(\nu)}\})$ удовлетворяют неравенствам $b_s^{(\delta)} \leq \frac{q^{-s-\rho_1-2}}{2\pi(n-\delta)}$ ($s = 1, \dots, n-\delta$), то оценка (16) справедлива при $2 \leq P \leq q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если бы величина ρ_1 и вектор a^* , введенные в формулировке теоремы 9, совпадали соответственно с величиной ρ_1 и вектором $\hat{a}$, введенными в формулировке теоремы VI в [50] (§ 5 гл. II), то утверждения теоремы 9 следовали бы из утверждений теоремы VI в § 5 главы II из [50]. Однако доказательство теоремы VI из [50] сохраняется для любого числа ρ_1 , удовлетворяющего условию $\rho < \rho_1 < \frac{1}{2}$, и при замене вектора $\hat{a}$ из формулировки теоремы VI на вектор $\{a^*\}$, что доказывает теорему 9.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В силу теоремы 6 (§ 2) утверждение 2) теоремы 9 справедливо при любом сколь угодно большом q .

Глава 2. Обобщенные цепные дроби и дифференциальные уравнения

В этой главе мы изучаем дальнейшее обобщение конструкции (A, ω) -цепной дроби, в котором важную роль играют дифференциальные уравнения. Эти обобщенные дроби обозначаются, как (A_τ, ω) -цепные дроби, где A_τ – семейство отображений множества T_n в $\mathbb{R}_n$, зависящих от вещественного параметра τ , меняющегося на отрезке $0 \leq \tau \leq 1$, а $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}_n$. При этом предполагается, что $A_\tau: y(0) = (y_1(0), \dots, y_n(0)) \rightarrow y(\tau) = (y_1(\tau), \dots, y_n(\tau))$ – однопараметрическое семейство отображений, определенное с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{d\tau} = Y(y), \quad (1)$$

где $Y(y) = (Y_1(y), \dots, Y_n(y))$ – заданная вектор-функция, $y(0)$ – начальные данные, а $y(\tau)$ – решение системы (1) с начальными данными $y(0)$.

**§ 1. Разложение вектора в обобщенную цепную дробь,
отвечающую вектору и системе дифференциальных уравнений**

Опишем процесс разложения произвольного вектора $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n$ в (A_τ, ω) -цепную дробь. Такая дробь обозначается в виде $x = [q^{(0)}, \dots, q^{(m)}; t]_{A_\tau, \omega}$, если она конечная, и в виде $x = [q^{(0)}, q^{(1)}, \dots]_{A_\tau, \omega}$, если эта дробь бесконечная. Пусть $q^{(0)} = (q_1^{(0)}, \dots, q_n^{(0)})$ – такой вектор, что при $\nu = 1, \dots, n$ $q_\nu^{(0)} = [x_\nu]$. Полагаем $x = x^{(0)} = q^{(0)} + \delta^{(0)}$ и находим на отрезке $0 \leq \tau \leq 1$ решение $y(\tau)$ системы (1) с начальными данными $y(0) = \delta^{(0)}$. Если на полуинтервале $0 \leq \tau < 1$ существует такое τ_0 , что $y(\tau_0) = \omega$, то процесс построения цепной дроби завершен, эта дробь конечная и имеет вид $x = [q^{(0)}; t]_{A_\tau, \omega}$, где t – наименьшее значение τ на отрезке $[0, 1]$, для которого $y(\tau) = \omega$. Если же указанного значения τ_0 не существует, то полагаем $x^{(1)} = y(1)$.

Предположим теперь, что при некотором целом $k \geq 0$ построены n -мерные векторы $q^{(0)}, \dots, q^{(k)}$ с целочисленными координатами и n -мерные векторы $x^{(0)}, \dots, x^{(k+1)}$ такие, что при $s = 0, \dots, k$ $x^{(s)} = q^{(s)} + \delta^{(s)}$ и решение системы (1) с начальными данными $y(0) = \delta^{(s)}$ при $\tau \in [0, 1)$ удовлетворяет неравенству $y(\tau) \neq \omega$. Пусть $q^{(k+1)} = (q_1^{(k+1)}, \dots, q_n^{(k+1)})$ – вектор с координатами $q_\nu^{(k+1)} = [x_\nu^{(k+1)}]$ ($\nu = 1, \dots, n$). Полагаем $x^{(k+1)} = q^{(k+1)} + \delta^{(k+1)}$ и на отрезке $0 \leq \tau \leq 1$ рассмотрим решение $y(\tau)$ системы (1) с начальными данными $y(0) = \delta^{(k+1)}$. Если на полуинтервале $0 \leq \tau < 1$ найдется такое τ_{k+1} , что $y(\tau_{k+1}) = \omega$, то процесс построения цепной дроби завершен, эта дробь конечная и имеет вид $x = [q^{(0)}, \dots, q^{(k+1)}; t]_{A_\tau, \omega}$, где t – наименьшее значение τ на отрезке $[0, 1]$, для которого $y(\tau) = \omega$. Если же указанного значения τ_{k+1} не существует, то полагаем $x^{(k+2)} = y(1)$. Если при всех целых $k \geq 0$ в результате описанного процесса мы не получаем конечную дробь, то (A_τ, ω) -цепная дробь вектора x – бесконечная и имеет вид $x = [q^{(0)}, q^{(1)}, \dots]_{A_\tau, \omega}$. В частном случае, когда вектор $\omega \in T_n$, а (A_τ, ω) -цепная дробь – бесконечная или конечная с $t = 0$, теория (A_τ, ω) -цепных дробей совпадает с теорией (A, ω) -цепных дробей, изученных в главе 1, в которых $A = A_1$ ($\tau = 1$).

В настоящей работе в качестве системы (1) мы будем использовать следующую систему дифференциальных уравнений, зависящую от вещественного параметра $\alpha \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dy_s}{d\tau} &= (s+1)y_{s+1} \quad (s = 1, \dots, n-1); \\ \frac{dy_n}{d\tau} &= (n+1)\alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

При этом в основе теории (A_τ, ω) -цепных дробей и ее применений лежат лемма 1 и ее следствие 1.

ЛЕММА 1. *Решение системы (2) с начальными данными $y(0) = (y_1(0), \dots, y_n(0))$ имеет следующий вид:*

$$y_s(\tau) = \sum_{\nu=0}^{n-s} \binom{s+\nu}{\nu} \tau^\nu y_{s+\nu}(0) + \alpha \binom{n+1}{n+1-s} \tau^{n-s+1} \quad (s = 1, \dots, n). \quad (3)$$

Доказательство леммы легко получается с помощью индукции по s , начиная с $s = n$ и заканчивая $s = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Решение $y(\tau)$ системы (2) с начальными данными $y(0)$ при $\tau = 1$ удовлетворяет равенству $y(1) = A^*y(0)$, где $A^* = A^*(\alpha)$, преобразование $\mathbb{R}_n$, введенное в определении 10 (§4 гл. 1), которое зависит от параметра α (вместо параметра α_{n+1}^* в определении 10) и определяется с помощью соотношений $A^*: x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, где

$$x_s^* = \sum_{\nu=0}^{n-s} \binom{s+\nu}{\nu} x_{s+\nu} + \alpha \binom{n+1}{n+1-s}, \quad 1 \leq s \leq n. \quad (4)$$

В силу следствия 1 если $\omega \in T_n$, то теория бесконечных (A_τ, ω) -цепных дробей есть часть теории (A, ω) -цепных дробей. Поэтому далее мы рассмотрим только те результаты теории, которые связаны с разложением вектора в конечную (A_τ, ω) -цепную дробь. Следуя определениям 1 и 2 (§1 гл. 1), применительно к преобразованию A^* введем преобразование $\bar{A}$ тора T_n , которое совпадает с A^* , если равенства (4) рассматривать как сравнения по mod 1, и преобразование $\hat{A}$ тора T_n , обратное к преобразованию $\bar{A}$.

ТЕОРЕМА 1. (A_τ, ω) -цепная дробь вектора x – конечная тогда и только тогда, когда вектор $\{x\}$ принадлежит траекториям $\hat{A}^k y(\hat{s})$, где $y(\hat{s})$ – значение решения $y(s)$ системы (2) с начальными данными $y(0) = \omega$ в точке $\hat{s}$, удовлетворяющей неравенству $-1 < \hat{s} \leq 0$.

Доказательство теоремы 1 с учетом определения (A_τ, ω) -цепных дробей повторяет доказательство теоремы 1 (§1 гл. 1).

ТЕОРЕМА 2. Если (A_τ, ω) -цепная дробь хотя бы одного из двух различных векторов – конечная, то их (A_τ, ω) -цепные дроби различаются между собой.

Доказательство теоремы 2 следует из конструкции (A_τ, ω) -цепной дроби и теоремы 1.

§ 2. Характеризация алгебраических чисел

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. При $n \geq 2$ введем класс K_n , состоящий из таких вещественных алгебраических чисел t , которые удовлетворяют неравенству $0 \leq t < 1$ и являются корнем хотя бы одного многочлена $f(y) = f_0 + f_1 y + \dots + f_n y^n$ с вещественными, рациональными коэффициентами f_s ($s = 0, \dots, n$), у которого коэффициент $f_n \neq 0$, а среди коэффициентов $f_1, \dots, f_{n-1}$ отсутствуют два числа, имеющие разные знаки.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Класс K_2 содержит все алгебраические квадратичные иррациональности t , которые удовлетворяют неравенству $0 \leq t < 1$.

ТЕОРЕМА 3. 1) Если параметр α в системе (2), координата ω_1 вектора $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ и все координаты x_k ($k = 1, \dots, n$) вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$ – рациональные числа, а (A_τ, ω) -цепная дробь вектора x – конечная и имеет вид

$$x = [q^{(0)}, \dots, q^{(m)}; t]_{A_\tau, \omega}, \quad (5)$$

то число $t \in K_n$.

2) для любого числа $t \in K_n$ существуют рациональное число $\alpha \neq 0$, вектор $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, у которого координата ω_1 – рациональное число, и вектор x с рациональными координатами такие, что (A_τ, ω) -цепная дробь вектора x – конечная и имеет вид (5) с $m = 0$.

Доказательство. Согласно лемме 1 и следствию 1 в силу (5) координаты ω_s ($s = 1, \dots, n$) вектора ω имеют вид

$$\omega_s = \sum_{\nu=0}^{n-s} \binom{s+\nu}{\nu} t^\nu \delta_{s+\nu}^{(m)} + \alpha \binom{n+1}{n+1-s} t^{n-s+1}, \quad (6)$$

где $\delta_k^{(m)}$ ($k = 1, \dots, n$) – координаты вектора $\delta^{(m)} = (\delta_1^{(m)}, \dots, \delta_n^{(m)}) = \overline{A}^m \{x\}$. При этом в силу определения преобразования $\overline{A}$ и равенства (4), если все координаты вектора x и α – рациональные числа, то все координаты вектора $\delta^{(m)}$ – также рациональные числа. Поэтому если α и ω_1 – рациональные, то число t удовлетворяет следующему уравнению с рациональными коэффициентами:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} (\nu+1) t^\nu \delta_{1+\nu} + \alpha t^n (n+1) = \omega_1,$$

а так как $\delta_k^{(m)} \geq 0$ ($k = 1, \dots, n$), то в силу определения 1 число $t \in K_n$.

Утверждение 1) теоремы 3 доказано. Докажем утверждение 2).

Предположим, что число $t \in K_n$ и, следовательно, удовлетворяет уравнению $\beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_n t^n = 0$, в котором $\beta_n \neq 0$, все коэффициенты β_s ($s = 0, \dots, n$) – рациональные числа, а среди чисел $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ отсутствуют два числа, имеющие разные знаки. Найдем такое рациональное число $\gamma \neq 0$, чтобы числа $\alpha_s = \gamma \beta_s$ при $s = 1, \dots, n-1$ удовлетворяли неравенствам

$$0 \leq \alpha_s < s+1 \quad (s = 1, \dots, n-1), \quad (7)$$

и при этом число t есть корень уравнения

$$\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n = 0, \quad (8)$$

в котором $\alpha_0 = \gamma \beta_0$, $\alpha_n = \gamma \beta_n$. Полагаем $\alpha = \frac{\alpha_n}{n+1}$, в качестве вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$ возьмем вектор с координатами

$$x_1 = 0, \quad x_s = \frac{\alpha_{s-1}}{s} \quad (s = 2, \dots, n), \quad (9)$$

а в качестве вектора $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ рассмотрим вектор, у которого координата $\omega_1 = -\alpha_0$, а при $2 \leq s \leq n$ координаты

$$\omega_s = \sum_{\nu=0}^{n-s} \binom{s+\nu}{\nu} t^\nu x_{s+\nu} + \alpha t^{n-s+1} \binom{n+1}{n+1-s}. \quad (10)$$

Если теперь разложить вектор x в (A_τ, ω) -цепную дробь, то в силу (7), (9), (6) и (10) получим, что (A_τ, ω) -цепная дробь вектора x – конечная и имеет вид

$$x = [0; t^*]_{A_\tau, \omega}, \quad (11)$$

где $0 = (0, \dots, 0)$ – n -мерный вектор с нулевыми координатами, а t^* – число, удовлетворяющее неравенству $0 \leq t^* \leq t$ и являющееся корнем системы уравнений (6) относительно t , в которой $s = 1, \dots, n$; $m = 0$, $\delta_{s+\nu}^{(m)} = x_{s+\nu}$. Докажем, что $t^* = t$. Для этого рассмотрим уравнение (6), соответствующее $s = n$. Это уравнение линейное, имеет вид

$$\omega_n = \delta_n^{(m)} + \alpha(n+1)t \quad (12)$$

и совпадает с уравнением (10) при $s = n$, которому удовлетворяет число t . Но так как решение уравнения (12) – единственное, то из (11) следует утверждение 2) теоремы 3. Теорема 3 доказана.

Применим теорию (A_τ, ω) -цепных дробей в ситуации, когда все координаты вектора x – целые числа, а сама дробь конечная. В этом случае мы докажем теорему 4, состоящую из двух частей, причем вторая ее часть при $r \leq n-2$ (см. формулировку теоремы 4) эквивалентна последней теореме Ферма, доказанной в [59].

ТЕОРЕМА 4. *Предположим, что параметр α в системе (2) имеет вид $\alpha = 1$, все координаты вектора x – целые числа, (A_τ, ω) -цепная дробь вектора x – конечная, r – целое число, удовлетворяющее неравенству $1 \leq r \leq n$. Тогда выполнены следующие утверждения.*

1) (A_τ, ω) -цепная дробь вектора x имеет вид

$$x = [q^{(0)}; t]_{A_\tau, \omega}, \quad (13)$$

причем при фиксированном векторе ω число t не зависит от x .

2) Пусть $n \geq 3$; Ω – множество, состоящее из всех векторов $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, для которых число t в (13) – рациональное; Ω_r – множество на вещественной прямой, элементами которого являются все координаты ω_r всех векторов $\omega \in \Omega$; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – три отличных от нуля числа, принадлежащих множеству Ω_r . Тогда если $r \leq n-2$, то всегда выполнено неравенство $\sigma_1 + \sigma_2 \neq \sigma_3$, а если $r \geq n-1$, то существует бесконечное число троек $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, для которых справедливо равенство

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_3. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что (A_τ, ω) -цепная дробь вектора x имеет вид $x = [q^{(0)}, \dots, q^{(m)}; t]_{A_\tau, \omega}$. Так как x – вектор с целочисленными координатами, то $\{x\} = \vec{0} = (0, \dots, 0)$ – вектор с нулевыми координатами, и в силу теоремы 1 и определений преобразований $\bar{A}$ и $\hat{A}$ вектор $y(\hat{s})$, введенный в теореме 1, удовлетворяет равенству

$$y(\hat{s}) = \bar{A}^m \vec{0}, \quad (15)$$

где $\bar{A} = \bar{A}(\alpha)$. Подставляя в качестве α значение $\alpha = 1$, согласно (4) имеем равенство $\bar{A}\vec{0} = \vec{0}$, и поэтому из теоремы 1 и (15) следует, что $m = 0$ и справедливо равенство (13), в котором число t не зависит от вектора x . Утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2). В силу равенств $\alpha = 1$, $\{x\} = 0$, (13), (3) и определения (A_τ, ω) -цепной дроби имеем:

$$\omega_s = \binom{n+1}{n+1-s} t^{n-s+1} \quad (1 \leq s \leq n). \quad (16)$$

Поэтому если отличные от нуля числа $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ принадлежат Ω_r , то при $k = 1, 2, 3$ существуют такие три рациональных числа t_k , удовлетворяющие неравенствам $0 < t_k < 1$, и три вектора $\omega^{(k)} = (\omega_1^{(k)}, \dots, \omega_n^{(k)})$, у которых координата $\omega_r^{(k)} = \sigma_k$, что $x = [q^{(0)}; t_k]_{A_\tau, \omega^{(k)}}$, а из (14) и (16) следует равенство

$$t_1^{n-r+1} + t_2^{n-r+1} = t_3^{n-r+1}. \quad (17)$$

Так как согласно определению множества Ω_r числа t_1, t_2, t_3 – рациональные, то в силу последней теоремы Ферма [59] равенство (17) никогда не может быть выполнено при $r \leq n - 2$. Если же $r \geq n - 1$, то, как хорошо известно, равенство (17) справедливо для бесконечного числа троек, состоящих из рациональных чисел t_1, t_2, t_3 . Теорема 4 доказана.

Глава 3. Обобщенные цепные дроби, связанные с преобразованием Гаусса

Общая конструкция разложения произвольного n -мерного вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$ в обобщенную цепную дробь

$$x = [q^{(0)}, q^{(1)}, \dots]_{A, \omega}, \quad (1)$$

предложенная в главе 1, зависит от некоторого преобразования A n -мерного линейного пространства $\mathbb{R}_n$ и n -мерного вектора $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, принадлежащего n -мерному единичному тору $T_n = \{y_1, \dots, y_n : 0 \leq y_s < 1; s = 1, \dots, n\}$. Если же $n = 1$, $\omega = 0$, а отображение A имеет вид $A = \Gamma: x \rightarrow 1/x$ и проектируется на единичную окружность T_1 в виде отображения Гаусса $\bar{\Gamma}: y \rightarrow 1/y \bmod 1$, то (A, ω) -цепная дробь совпадает с обычной цепной дробью

$$x = [a_0, a_1, \dots], \quad (2)$$

где $a_k = q^{(k)}$ ($k = 0, 1, \dots$) – целое число, причем разложение (2) конечно тогда и только тогда, когда число x – рационально.

В данной главе мы изучаем частный случай общего понятия (A, ω) -цепной дроби (1), в котором $n = 1$, x – число, $A = \Gamma$, а число ω удовлетворяет неравенству $0 \leq \omega < 1$. Такую цепную дробь в случае, если она конечная, мы будем обозначать в виде

$$x = [a_0, \dots, a_m]_\omega \quad (3)$$

и называть конечной ω -цепной дробью, а в случае, если эта дробь бесконечная, мы будем обозначать ее в виде

$$x = [a_0, a_1, \dots]_\omega \quad (4)$$

и называть бесконечной ω -цепной дробью. Разложения же (3) и (4) в ω -цепную дробь мы будем применять только для иррациональных чисел x .

§ 1. Построение ω -цепных дробей

Пусть x – иррациональное число, а ω – произвольное число, удовлетворяющее неравенству $0 \leq \omega < 1$. Представим x в виде обобщенной цепной дроби, отвечающей числу ω , которую мы будем называть ω -цепной дробью.

Пусть $a_0 = [x]$ – целая часть x . Полагаем $x = x_0 = a_0 + \delta_0$. Если $\delta_0 = \omega$, то процесс построения ω -цепной дроби числа x на этом заканчивается, эта дробь конечная и $x = [a_0]_\omega$. Если же $\delta_0 \neq \omega$, то в силу того, что число x – иррациональное, имеем неравенство $\delta_0 \neq 0$ и полагаем $x_1 = 1/\delta_0$. Предположим теперь, что при некотором целом $k \geq 0$ построены целые числа $a_0, a_1, \dots, a_k$ и числа $x_0, \dots, x_{k+1}$ такие, что $x_s = a_s + \delta_s$ и $\delta_s \neq \omega$ при $s = 0, \dots, k$. Пусть $a_{k+1} = [x_{k+1}]$, и полагаем $x_{k+1} = a_{k+1} + \delta_{k+1}$. Если $\delta_{k+1} = \omega$, то процесс построения ω -цепной дроби числа x заканчивается, эта дробь конечная и $x = [a_0, \dots, a_{k+1}]_\omega$. Если же $\delta_{k+1} \neq \omega$, то в силу того, что число x – иррациональное, $\delta_{k+1} \neq 0$, и поэтому полагаем $x_{k+2} = 1/\delta_{k+1}$. Если при всех целых k выполнено неравенство $\delta_k \neq \omega$, то полагаем $x = [a_0, a_1, \dots]_\omega$ и ω -цепная дробь числа x – бесконечная. Представление x в виде ω -цепной дроби описано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\omega = 0$, то ω -цепная дробь совпадает с обычной цепной дробью.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если ω -цепная дробь числа x – бесконечная, то целые числа $a_0, a_1, \dots$ в представлении (4) числа x в виде ω -цепной дроби совпадают с соответствующими неполными частными $a_0, a_1, \dots$ в разложении числа x в обычную цепную дробь (2).

§ 2. Построение ω -подходящих дробей

Рассмотрим бесконечную ω -цепную дробь $x = [a_0, a_1, \dots]_\omega$ числа x . Для любого целого числа $n \geq 0$ определим ω -подходящую дробь $\mathcal{S}_\omega^{(n)}$ следующим образом. Полагаем $\mathcal{S}_\omega^{(0)} = a_0 + \omega$,

$$\mathcal{S}_\omega^{(n)} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n + \omega}}} \quad (n \geq 1), \quad (5)$$

правая часть в (5) обозначает конечную процедуру, состоящую из n шагов, в которой на первом шаге находится величина $\mathcal{S}_n(1) = a_{n-1} + \frac{1}{a_n + \omega}$, а при целом k , удовлетворяющем условию $1 < k \leq n$, на k -м шаге находится величина $\mathcal{S}_n(k) = a_{n-k} + \frac{1}{\mathcal{S}_n(k-1)}$ и затем полагается $\mathcal{S}_\omega^{(n)} = \mathcal{S}_n(n)$. Точно так же определяются ω -подходящие дроби $\mathcal{S}_\omega^{(n)}$ для конечной ω -цепной дроби $x = [a_0, \dots, a_m]_\omega$ при выполнении неравенства $0 \leq n \leq m$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $\omega = 0$, то ω -подходящие дроби совпадают с подходящими дробями обычных цепных дробей.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если $x = [a_0, a_1, \dots]_\omega$, то $\mathcal{S}_\omega^{(n)} = [a_0, \dots, a_n]_\omega$.

§ 3. Единственность представления чисел в виде ω -цепной дроби

Далее будем обозначать подходящую дробь для обычной цепной дроби числа x в (2) в виде $p_n/q_n = [a_0, \dots, a_n]$, где p_n, q_n ($n \geq 0$) – целые числа, связанные между собой с помощью равенств

$$p_n = p_{n-1}a_n + p_{n-2}, \quad q_n = q_{n-1}a_n + q_{n-2}, \quad (6)$$

где $p_{-1} = 1, q_{-1} = 0$ и $p_0 = [x], q_0 = 1$.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{S}_\omega^{(n)} = [a_0, \dots, a_n]_\omega$ – конечная ω -цепная дробь, а $p_k/q_k = [a_0, \dots, a_k]$ ($k \leq n$) – обычные конечные цепные дроби. Тогда при $n \geq 2$ выполнено равенство

$$\mathcal{S}_\omega^{(n)} = \frac{p_n + p_{n-1}\omega}{q_n + q_{n-1}\omega}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим обычную конечную цепную дробь $\mathcal{S}^{(n+1)} = [a_0, \dots, a_n, r_{n+1}]$, где $r_{n+1} = 1/\omega$. Тогда в силу известной теоремы из теории цепных дробей [1] имеем равенство

$$\mathcal{S}^{(n+1)} = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}} = \frac{p_n + \omega p_{n-1}}{q_n + \omega q_{n-1}}.$$

Поэтому утверждение леммы 1 следует из равенства $\mathcal{S}^{(n+1)} = \mathcal{S}_\omega^{(n)}$. Лемма 1 доказана.

ТЕОРЕМА 1. Два различных иррациональных числа имеют различные разложения в ω -цепную дробь.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть даны два различных иррациональных числа x, y . Предположим противное, т.е. что для некоторого ω ($0 \leq \omega < 1$) их ω -цепные дроби совпадают. Пусть эти дроби конечные и имеют вид $[a_0, \dots, a_n]_\omega$. Тогда в силу леммы 1 получаем противоречие:

$$x = y = \frac{p_n + p_{n-1}\omega}{q_n + q_{n-1}\omega}, \quad \text{где} \quad \frac{p_n}{q_n} = [a_0, \dots, a_n], \quad \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = [a_0, \dots, a_{n-1}].$$

Предположим теперь, что ω -цепные дроби чисел x, y – бесконечные и имеют вид $[a_0, a_1, \dots]_\omega$. Тогда в силу замечания 2 (§ 1) обычные цепные дроби чисел x и y совпадают и имеют вид $[a_0, a_1, \dots]$. Поэтому утверждение теоремы 1 следует из известной теоремы о единственности разложения чисел в обычную цепную дробь [1]. Теорема 1 доказана.

§ 4. Свойства ω -подходящих дробей

Пусть $x = [a_0, a_1, \dots]_\omega$ – ω -цепная дробь числа x , $\mathcal{S}_\omega^{(n)} = [a_0, \dots, a_n]_\omega$ – ω -подходящая дробь, $\mathcal{S}_n = p_n/q_n = [a_0, \dots, a_n]$ – подходящая дробь для обычной цепной дроби $[a_0, a_1, \dots]$. В силу леммы 1 (§ 3) при $n \geq 0$ имеем:

$$\mathcal{S}_\omega^{(n)} = p_\omega^{(n)} / q_\omega^{(n)}, \quad (7)$$

где

$$p_{\omega}^{(n)} = p_n + p_{n-1}\omega, \quad q_{\omega}^{(n)} = q_n + q_{n-1}\omega. \quad (8)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n \geq 1$, $\beta = (1 - \omega^2)/\omega$. Тогда:

1) если $a_n > \beta$, то

$$\text{sign}(\mathcal{S}_{\omega}^{(n)} - \mathcal{S}_{\omega}^{(n-1)}) = (-1)^n,$$

а если $a_n < \beta$, то

$$\text{sign}(\mathcal{S}_{\omega}^{(n)} - \mathcal{S}_{\omega}^{(n-1)}) = (-1)^{n+1};$$

2) выполняется неравенство

$$|\mathcal{S}_{\omega}^{(n)} - \mathcal{S}_{\omega}^{(n-1)}| \leq \frac{|a_n - \beta|\omega}{q_{\omega}^{(n)} q_{\omega}^{(n-1)}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (7), (8) имеем равенство

$$\begin{aligned} p_{\omega}^{(n)} q_{\omega}^{(n-1)} - p_{\omega}^{(n-1)} q_{\omega}^{(n)} &= (p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}) + \omega(p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2}) \\ &\quad + \omega^2(p_{n-1} q_{n-2} - q_{n-1} p_{n-2}), \end{aligned}$$

а из теории обычных цепных дробей [1] следуют соотношения

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n+1}, \quad p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (-1)^n.$$

Поэтому $p_{\omega}^{(n)} q_{\omega}^{(n-1)} - p_{\omega}^{(n-1)} q_{\omega}^{(n)} = (-1)^{n+1} + \omega(-1)^n a_n + \omega^2(-1)^n$, и утверждение теоремы 2 вытекает из (7). Теорема 2 доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $n \geq 2$, $\gamma = \omega a_n a_{n-1} + \omega^2 a_{n-1}$. Если $a_n > \gamma$, то

$$\text{sign}(\mathcal{S}_{\omega}^{(n)} - \mathcal{S}_{\omega}^{(n-2)}) = (-1)^n,$$

а если $a_n < \gamma$, то

$$\text{sign}(\mathcal{S}_{\omega}^{(n)} - \mathcal{S}_{\omega}^{(n-2)}) = (-1)^{n-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (7), (8), (6) и хорошо известных свойств обычных цепных дробей [1] имеем:

$$\begin{aligned} p_{\omega}^{(n)} q_{\omega}^{(n-2)} - q_{\omega}^{(n)} p_{\omega}^{(n-2)} &= (-1)^n a_n + \omega((-1)^n + (p_n q_{n-3} - q_n p_{n-3})) \\ &\quad + \omega^2(-1)^n a_{n-1}, \\ p_n q_{n-3} - q_n p_{n-3} &= a_n(p_{n-1} q_{n-3} - q_{n-1} p_{n-3}) + (p_{n-2} q_{n-3} - q_{n-2} p_{n-3}) \\ &= a_n a_{n-1} (-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Поэтому $p_{\omega}^{(n)} q_{\omega}^{(n-2)} - q_{\omega}^{(n)} p_{\omega}^{(n-2)} = (-1)^n a_n + \omega a_n a_{n-1} (-1)^{n-1} + \omega^2(-1)^{n-1} a_{n-1}$, и утверждение теоремы 3 очевидно следует из (7). Теорема 3 доказана.

Равенства (8) позволяют при $n \geq 0$ выразить величины $p_{\omega}^{(n)}$, $q_{\omega}^{(n)}$ через p_n , q_n . Следующая лемма позволяет эти равенства обратить.

ЛЕММА 2. При $n \geq 0$ имеют место соотношения

$$p_n = \sum_{k=0}^n (-\omega)^{n-k} p_\omega^{(k)} + (-\omega)^{n+1}, \quad q_n = \sum_{k=0}^n (-\omega)^{n-k} q_\omega^{(k)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по n . При $n = 0$ в силу (8) получаем $p_\omega^{(0)} = a_0 + \omega$, $q_\omega^{(0)} = 1$, и утверждение леммы 2 очевидно выполнено. Предположим, что оно выполнено для некоторого $n \geq 0$. Тогда в силу (8) имеем:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_\omega^{(n+1)} - p_n \omega = p_\omega^{(n+1)} - \omega \left(\sum_{k=0}^n (-\omega)^{n-k} p_\omega^{(k)} + (-\omega)^{n+1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-\omega)^{n+1-k} p_\omega^{(k)} + (-\omega)^{n+2}, \\ q_{n+1} &= q_\omega^{(n+1)} - q_n \omega = q_\omega^{(n+1)} - \omega \sum_{k=0}^n (-\omega)^{n-k} q_\omega^{(k)} = \sum_{k=0}^{n+1} (-\omega)^{n+1-k} q_\omega^{(k)}. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Далее будет доказана теорема 4, в которой классические соотношения (6) теории цепных дробей обобщаются на произвольные ω -цепные дроби.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $x = [a_0, a_1, \dots]_\omega$. Тогда при $n \geq 2$ имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} p_\omega^{(n)} &= a_n p_\omega^{(n-1)} + p_\omega^{(n-2)} + (a_n - a_{n-1}) \sum_{k=-1}^{n-2} (-\omega)^{n-k-1} p_\omega^{(k)}, \\ q_\omega^{(n)} &= a_n q_\omega^{(n-1)} + q_\omega^{(n-2)} + (a_n - a_{n-1}) \sum_{k=0}^{n-2} (-\omega)^{n-k-1} q_\omega^{(k)}, \end{aligned}$$

где $p_\omega^{(-1)} = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (8), (6) и леммы 2 имеем:

$$\begin{aligned} p_\omega^{(n)} &= p_n + \omega p_{n-1} = a_n p_{n-1} + p_{n-2} + \omega(p_{n-2} a_{n-1} + p_{n-3}) \\ &= a_n p_{n-1} + (1 + \omega a_{n-1}) p_{n-2} + \omega p_{n-3} \\ &= a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-\omega)^{n-k-1} p_\omega^{(k)} + (-\omega)^n \right) \\ &\quad + (1 + \omega a_{n-1}) \left(\sum_{k=0}^{n-2} (-\omega)^{n-k-2} p_\omega^{(k)} + (-\omega)^{n-1} \right) \\ &\quad + \omega \left(\sum_{k=0}^{n-3} (-\omega)^{n-k-3} p_\omega^{(k)} + (-\omega)^{n-2} \right) \\ &= a_n p_\omega^{(n-1)} + p_\omega^{(n-2)} + (a_n - a_{n-1}) \sum_{k=-1}^{n-2} (-\omega)^{n-k-1} p_\omega^{(k)}, \end{aligned}$$

и первое равенство теоремы 4 доказано. Совершенно аналогично доказывается и второе равенство. Теорема 4 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. При всех ω , для которых выполнено равенство $a_n = a_{n-1}$, соотношения, выражающие числитель и знаменатель ω -подходящей дроби $\mathcal{S}_\omega^{(n)}$ через числители и знаменатели ω -подходящих дробей $\mathcal{S}_\omega^{(k)}$ при $k < n$, совпадают с классическими соотношениями (6).

§ 5. ω -остатки и их свойства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если $x = [a_0, \dots, a_n]_\omega$ — конечная ω -цепная дробь, а s — натуральное число, удовлетворяющее условию $1 \leq s \leq n$, то ω -остаток $r_\omega^{(s)}$ есть конечная ω -цепная дробь $r_\omega^{(s)} = [a_s, \dots, a_n]_\omega$, а если $x = [a_0, a_1, \dots]_\omega$ — бесконечная ω -цепная дробь, то ω -остаток $r_\omega^{(s)}$ есть бесконечная ω -цепная дробь $r_\omega^{(s)} = [a_s, a_{s+1}, \dots]_\omega$.

ЛЕММА 3. Имеют место равенства

$$[a_0, \dots, a_n]_\omega = [a_0, \dots, a_{s-1}, r_\omega^{(s)}], \quad [a_0, a_1, \dots]_\omega = [a_0, \dots, a_{s-1}, r_\omega^{(s)}],$$

где в правых частях стоят обычные цепные дроби, а второе соотношение имеет смысл формальной записи.

Лемма 3 непосредственно следует из определений ω -цепной дроби и ω -остатка.

ЛЕММА 4. Для любого натурального числа s , удовлетворяющего условию $1 \leq s \leq n$, выполнено равенство

$$[a_0, \dots, a_n]_\omega = \frac{p_{s-1}r_\omega^{(s)} + p_{s-2}}{q_{s-1}r_\omega^{(s)} + q_{s-2}},$$

где $p_k/q_k = [a_0, \dots, a_k]$ — подходящая дробь к обычной цепной дроби $[a_0, \dots, a_n]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3 и (6) имеем:

$$[a_0, \dots, a_n]_\omega = [a_0, \dots, a_{s-1}, r_\omega^{(s)}] = \frac{p_{s-1}r_\omega^{(s)} + p_{s-2}}{q_{s-1}r_\omega^{(s)} + q_{s-2}}.$$

Лемма 4 доказана.

Далее мы сформулируем и докажем теорему 5, обобщающую на ω -цепные дроби классическую теорему, указывающую выражение обычной конечной цепной дроби через остатки, которая в нашей ситуации соответствует случаю $\omega = 0$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $1 \leq s \leq n$. Тогда справедливо равенство

$$[a_0, \dots, a_n]_\omega = \frac{p_\omega^{(s-1)}r_\omega^{(s)} + (1 - \omega r_\omega^{(s)}) \sum_{k=-1}^{s-2} (-\omega)^{s-2-k} p_\omega^{(k)}}{q_\omega^{(s-1)}r_\omega^{(s)} + (1 - \omega r_\omega^{(s)}) \sum_{k=0}^{s-2} (-\omega)^{s-2-k} q_\omega^{(k)}},$$

где $p_\omega^{(-1)} = 1$, $p_\omega^{(k)}/q_\omega^{(k)} = [a_0, \dots, a_k]_\omega$, $r_\omega^{(s)} = [a_s, a_{s+1}, \dots, a_n]_\omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2 имеем:

$$\begin{aligned} p_{s-1}r_{\omega}^{(s)} + p_{s-2} &= r_{\omega}^{(s)} \sum_{k=-1}^{s-1} (-\omega)^{s-1-k} p_{\omega}^{(k)} + \sum_{k=-1}^{s-2} (-\omega)^{s-2-k} p_{\omega}^{(k)} \\ &= p_{\omega}^{(s-1)} r_{\omega}^{(s)} + (1 - \omega r_{\omega}^{(s)}) \sum_{k=-1}^{s-2} (-\omega)^{s-2-k} p_{\omega}^{(k)}, \\ q_{s-1}r_{\omega}^{(s)} + q_{s-2} &= q_{\omega}^{(s-1)} r_{\omega}^{(s)} + (1 - \omega r_{\omega}^{(s)}) \sum_{k=0}^{s-2} (-\omega)^{s-2-k} q_{\omega}^{(k)}. \end{aligned}$$

Теперь утверждение теоремы 5 следует из леммы 4. Теорема 5 доказана.

§ 6. Аппроксимационные теоремы

ЛЕММА 5. Пусть $\mathcal{S}_{\omega}^{(n)} = [a_0, \dots, a_n]_{\omega}$ — конечная ω -цепная дробь, а $p_n/q_n = [a_0, \dots, a_n]$ и $p_{n-1}/q_{n-1} = [a_0, \dots, a_{n-1}]$ — обычные конечные цепные дроби. Тогда число $\mathcal{S}_{\omega}^{(n)}$ расположено на числовой прямой между числами p_n/q_n и p_{n-1}/q_{n-1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При всех вещественных t число $(p_n + tp_{n-1})/(q_n + tq_{n-1})$ расположено между числами p_n/q_n и p_{n-1}/q_{n-1} . Поэтому утверждение леммы 5 следует из леммы 1 (§ 3). Лемма 5 доказана.

ТЕОРЕМА 6. Пусть число x разлагается в бесконечную ω -цепную дробь $x = [a_0, a_1, \dots]_{\omega}$, а $\mathcal{S}_{\omega}^{(n)}$ ($n = 0, 1, \dots$) — его ω -подходящие дроби. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_{\omega}^{(n)} = x \quad \text{и} \quad |x - \mathcal{S}_{\omega}^{(n)}| \leq \frac{1}{q_n q_{n-1}},$$

где q_k ($k = 0, 1, \dots$) — знаменатель обычной цепной дроби $p_k/q_k = [a_0, \dots, a_k]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теории обычных цепных дробей и замечания 2 (§ 1) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = x, \quad \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| = \frac{1}{q_n q_{n-1}}$$

и число x расположено на числовой прямой между числами p_n/q_n и p_{n-1}/q_{n-1} . Поэтому утверждение теоремы 6 вытекает из леммы 5. Теорема 6 доказана.

ТЕОРЕМА 7. Предположим, что в разложении числа x в ω -цепную дробь $x = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots]_{\omega}$ числа a_{n-1}, a_n удовлетворяют условиям $a_{n-1} \geq 1/\omega$, $a_n \geq 1/\omega + \varepsilon$, где $\varepsilon \geq 0$, а $\mathcal{S}_{\omega}^{(k)} = p_{\omega}^{(k)}/q_{\omega}^{(k)}$ ($k = 0, 1, \dots$) — ω -подходящие дроби. Тогда выполнено по меньшей мере одно из двух неравенств

$$\left| x - \frac{p_{\omega}^{(n)}}{q_{\omega}^{(n)}} \right| \leq \frac{\omega^2 + \varepsilon \omega}{2(q_{\omega}^{(n)})^2}, \quad \left| x - \frac{p_{\omega}^{(n-1)}}{q_{\omega}^{(n-1)}} \right| \leq \frac{\omega^2 + \varepsilon \omega}{2(q_{\omega}^{(n-1)})^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что если выполнены неравенства $a_k \geq 1/\omega$ ($k = n, n-1$), то число x на вещественной прямой расположено между числами $\mathcal{S}_\omega^{(n)}$ и $\mathcal{S}_\omega^{(n-1)}$. Пусть $p_k/q_k = [a_0, \dots, a_k]$ ($k = 0, 1, \dots$) – подходящие дроби к обычной цепной дроби числа x . Из теории обычных цепных дробей следует, что числа p_{k-1}/q_{k-1} и p_{k+1}/q_{k+1} расположены на числовой прямой по одну сторону от числа x , а числа p_{k-1}/q_{k-1} и p_k/q_k – по разные стороны от числа x . Согласно лемме 1 (§3)

$$\frac{p_\omega^{(k)}}{q_\omega^{(k)}} = \frac{p_{k-1} + (\frac{1}{\omega})p_k}{q_{k-1} + (\frac{1}{\omega})q_k}.$$

Поэтому из неравенств $a_k \geq 1/\omega$ ($k = n, n-1$) и равенств (6) при $k = n, n-1$ следует, что число $p_\omega^{(k)}/q_\omega^{(k)}$ расположено между числами p_{k-1}/q_{k-1} и p_{k+1}/q_{k+1} , т.е. число x расположено между числами $\mathcal{S}_\omega^{(n)}$ и $\mathcal{S}_\omega^{(n-1)}$. В силу этого утверждения и теоремы 2 (§4) имеем:

$$\begin{aligned} |x - \mathcal{S}_\omega^{(n)}| + |x - \mathcal{S}_\omega^{(n-1)}| &= \left| \frac{p_\omega^{(n)}}{q_\omega^{(n)}} - \frac{p_\omega^{(n-1)}}{q_\omega^{(n-1)}} \right| = \frac{|a_n - \beta|\omega}{q_\omega^{(n)} q_\omega^{(n-1)}} \\ &\leq |a_n - \beta|\omega \left(\frac{1}{2(q_\omega^{(n)})^2} + \frac{1}{2(q_\omega^{(n-1)})^2} \right), \end{aligned}$$

где $\beta = (1 - \omega^2)/\omega$. Подставляя в последнее неравенство значение $a_n = 1/\omega + \varepsilon$, получим утверждение теоремы 7. Теорема 7 доказана.

ТЕОРЕМА 8. Если при $k = n-2, n-1, n$ число $x = [a_0, a_1, \dots]_\omega$ имеет ω -подходящую дробь $\mathcal{S}_n^{(k)} = p_\omega^{(k)}/q_\omega^{(k)}$, то справедливо по меньшей мере одно из следующих трех неравенств:

$$|x - \mathcal{S}_\omega^{(k)}| \leq \frac{|1 - r_\omega^{(k+1)}\omega|}{\sqrt{5} q_\omega^{(k)} q_k}, \quad k = n-2, n-1, n,$$

где $r_\omega^{(k+1)} = [a_{k+1}, a_{k+2}, \dots]_\omega$ – ω -остаток, а q_k – знаменатель подходящей дроби $p_k/q_k = [a_0, \dots, a_k]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 6, леммы 3 (§5) и равенств (6), (8) имеем равенства

$$\begin{aligned} x &= \frac{p_k r_\omega^{(k+1)} + p_{k-1}}{q_k r_\omega^{(k+1)} + q_{k-1}}, \\ \left| x - \frac{p_\omega^{(k)}}{q_\omega^{(k)}} \right| &= \left| \frac{p_k r_\omega^{(k+1)} + p_{k-1}}{q_k r_\omega^{(k+1)} + q_{k-1}} - \frac{p_k + \omega p_{k-1}}{q_k + \omega q_{k-1}} \right| \\ &= \frac{|1 - r_\omega^{(k+1)}\omega|}{(q_k r_\omega^{(k+1)} + q_{k-1})(q_k + \omega q_{k-1})} = \frac{|1 - r_\omega^{(k+1)}\omega|}{q_k^{(\omega)} (r_\omega^{(k+1)} + \varphi_{k+1}) q_k}, \end{aligned}$$

где $\varphi_{k+1} = q_{k-1}/q_k$. Если утверждение теоремы 8 не справедливо, то, полагая $\Psi_{k+1} = r_\omega^{(k+1)} + \varphi_{k+1}$ при $k = n, n-1, n-2$, имеем неравенство $\Psi_{k+1} \leq \sqrt{5}$. Но в силу

леммы из доказательства теоремы 20 в [1] в этом случае получаем: $\varphi_n > (\sqrt{5} - 1)/2$, $\varphi_{n+1} > (\sqrt{5} - 1)/2$. Поэтому из равенства $1/\varphi_{k+1} = q_k/q_{k-1} = a_k + \varphi_k$ следует, что

$$a_n = \frac{1}{\varphi_{n+1}} - \varphi_n < \frac{2}{\sqrt{5} - 1} - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 1,$$

а это невозможно. Теорема 8 доказана.

§ 7. Характеризация квадратичных иррациональностей и чисел, не являющихся квадратичными иррациональностями, с помощью ω -цепных дробей

ω -цепные дроби позволяют дать четкий критерий, выделяющий квадратичные иррациональности среди всех иррациональных чисел.

ТЕОРЕМА 9. *Иррациональное число x является квадратичной иррациональностью тогда и только тогда, когда значения ω на полуинтервале $0 \leq \omega < 1$, для которых ω -цепная дробь числа x — конечная, образуют конечное множество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x — квадратичная иррациональность. Тогда по теореме Лагранжа [1] разложение числа x в обычную цепную дробь $x = [a_0, a_1, \dots]$ периодически, т.е. существуют такие натуральные числа k_0, h , что при $k \geq k_0$ справедливы равенства $a_k = a_{k+h}$, $r_k = r_{k+h}$, где $r_s = [a_s, a_{s+1}, \dots]$ ($s = 0, 1, \dots$) — остатки. Но в этом случае из построения ω -цепной дроби следует, что числа ω , при которых ω -цепная дробь числа x — конечная, исчерпываются следующим списком:

$$r_1^{-1}, \dots, r_{k_0}^{-1}, r_{k_0+1}^{-1}, \dots, r_{k_0+h-1}^{-1}.$$

Предположим теперь, что значения ω , для которых ω -цепная дробь числа x — конечная, образуют конечное множество $\omega_1, \dots, \omega_N$. В этом случае в разложении $x = [a_0, a_1, \dots]$ числа x в обычную цепную дробь значения остатков r_s ($s \geq 0$) пробегает конечное множество $\omega_1^{-1}, \dots, \omega_N^{-1}$, и поэтому в силу построения обычной цепной дроби эта дробь будет периодической. Следовательно, по теореме Лагранжа x — квадратичная иррациональность. Теорема 9 доказана.

ПРИМЕР. Пусть $x = (\sqrt{5} + 1)/2$. Тогда

$$x = \begin{cases} [1]_\omega, & \text{если } \omega = (\sqrt{5} - 1)/2, \\ [1, 1, \dots]_\omega, & \text{если } \omega \neq (\sqrt{5} - 1)/2. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Для данного иррационального числа x введем множество Ω_x на полуинтервале $[0, 1)$, состоящее из всех таких чисел $\omega \in [0, 1)$, для которых ω -цепная дробь числа x — конечная.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если число x не является квадратичной иррациональностью, то множество Ω_x — счетное и состоит из попарно различных чисел, обратных всем остаткам в разложении числа x в обычную цепную дробь.*

Будем считать Ω_x упорядоченной последовательностью, а его элементы обозначать через $\omega_n^{(x)} = 1/r_n$ ($n = 0, 1, \dots$), где $x = [a_0, a_1, \dots]$, $r_n = [a_n, a_{n+1}, \dots]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Введем множество $\overline{\Omega}_x$, состоящее из всех предельных точек последовательности $\omega_n^{(x)}$ ($n = 0, 1, \dots$).

Следующая теорема показывает, что Ω_x не может быть произвольной последовательностью попарно различных элементов из полуинтервала $[0, 1)$.

ТЕОРЕМА 10. Если x — число, не являющееся квадратичной иррациональностью, то множество $\overline{\Omega}_x$ не может состоять из конечного количества чисел, отличных от нуля и чисел вида $1/t$, где t — целое число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. что $\overline{\Omega}_x$ есть конечное множество, состоящее из попарно различных чисел $\beta_1, \dots, \beta_\kappa$, отличных от нуля и чисел вида $1/t$. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого положительного числа $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ε -окрестности $\mathcal{U}_\varepsilon(\beta_s)$ чисел β_s ($s = 1, \dots, \kappa$) попарно не пересекаются на вещественной прямой и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$, что при $n \geq n_0$ все числа $\omega_n^{(x)}$ принадлежат $\bigcup_{s=1}^{\kappa} \mathcal{U}_\varepsilon(\beta_s)$. Далее, так как согласно условию теоремы 10 числа β_s ($s = 1, \dots, \kappa$) не равны нулю и рациональным числам вида $1/t$, то числа $\alpha_s = 1/\beta_s$ ($s = 1, \dots, \kappa$) не являются целыми. Поэтому при достаточно малом ε для любого числа $\omega \in \mathcal{U}_\varepsilon(\beta_s)$ и фиксированного s целая часть $[1/\omega]$ не зависит от ω и имеет вид

$$[1/\omega] = [\alpha_s]. \quad (9)$$

Полагая число ε достаточно малым, применяя (9) и определяя для любого целого $n \geq n_0(\varepsilon)$ натуральное число ν_n такое, что $\omega_n^{(x)} \in \mathcal{U}_\varepsilon(\beta_{\nu_n})$, мы получим, что последовательность ν_n является периодической в следующем смысле: для $n \geq n_0$ выполнено равенство $\nu_n = \nu_{n+\kappa+1}$. Согласно же построению обычной цепной дроби $x = [a_0, a_1, \dots]$ числа x справедливы равенства $a_n = [1/\omega_n^{(x)}]$ ($n = 1, 2, \dots$), и поэтому из периодичности последовательности ν_n и (9) следует периодичность последовательности a_n , т.е. $a_{n+\kappa+1} = a_n$ при $n \geq n_0$. Поэтому в силу теоремы Лагранжа число x есть квадратичная иррациональность, что противоречит условию теоремы 10. Теорема 10 доказана.

В терминах множества $\overline{\Omega}_x$ (определение 3) можно следующим образом сформулировать известную проблему о существовании алгебраического числа, не являющегося квадратичной иррациональностью, у которого в разложении в обычную цепную дробь все неполные частные ограничены.

ПРОБЛЕМА. Существует ли такое алгебраическое число x , не являющееся квадратичной иррациональностью, что нуль не принадлежит множеству $\overline{\Omega}_x$?

§ 8. Характеризация произвольных алгебраических и трансцендентных чисел с помощью ω -цепных дробей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Число называется алгебраическим числом степени n , если оно есть корень многочлена степени n с целыми коэффициентами, но не является корнем тождественно не равного нулю многочлена меньшей степени с целыми коэффициентами.

ЛЕММА 6. Если x – алгебраическое число степени n , а $y = (ax + b)/(cx + d)$, где a, b, c, d – такие целые числа, что $ad - bc \neq 0$, то y – алгебраическое число степени n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x есть корень многочлена $f(x)$ степени n с целыми коэффициентами. Число y не может быть равно числу a/c , так как в противном случае величина $ad - bc = 0$. Поэтому x выражается через y в виде $x = (-dy + b)/(cy - a)$. Подставляя это выражение в $f(x)$ и приводя все члены к общему знаменателю, получим, что y есть корень тождественно не равного нулю многочлена степени, не превосходящей n , с целыми коэффициентами. Если бы число y было корнем какого-нибудь тождественно не равного нулю многочлена степени, меньшей чем n , с целыми коэффициентами, то, подставляя в этот многочлен выражение $y = (ax + b)/(cx + d)$, мы получили бы, что и число x есть корень тождественно не равного нулю многочлена степени, меньшей чем n , с целыми коэффициентами, а это противоречит условию леммы 6. Лемма 6 доказана.

ТЕОРЕМА 11. Число x есть алгебраическое число степени n тогда и только тогда, когда множество Ω_x (определение 2 §7) состоит только из алгебраических чисел степени n , принадлежащих расширению поля рациональных чисел, полученного присоединением числа x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega \in \Omega_x$. Из построения ω -цепной дроби следует, что условие, согласно которому ω -цепная дробь числа x – конечная, равносильно тому, что при некотором $n \geq 0$ число $x = \mathcal{S}_\omega^{(n)}$, где $\mathcal{S}_\omega^{(n)}$ – ω -подходящая дробь числа x . Поэтому в этом случае в силу леммы 1 (§3) имеем равенство

$$x = \frac{p_n + \omega p_{n-1}}{q_n + \omega q_{n-1}}, \quad (10)$$

где $p_n, q_n, p_{n-1}, q_{n-1}$ – числители и знаменатели подходящих дробей p_n/q_n и p_{n-1}/q_{n-1} для обычной цепной дроби числа x . В силу известного свойства этих дробей [1] имеем равенство $|p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n| = 1$. Поэтому, выражая из (10) число ω через x , получаем выражение

$$\omega = \frac{p_n - q_n x}{-p_{n-1} + q_{n-1} x}, \quad (11)$$

в котором знаменатель отличен от нуля. Теперь утверждение теоремы 11 следует из леммы 6. Теорема 11 доказана.

ТЕОРЕМА 12. Число x трансцендентно тогда и только тогда, когда множество Ω_x состоит только из трансцендентных чисел.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x – трансцендентное число. Если бы существовало алгебраическое число $\omega \in \Omega_x$, то в силу равенства (10) и леммы 6 число x было бы алгебраическим. Обратно, пусть Ω_x состоит из трансцендентных чисел. Тогда в силу (11) и леммы 6 число x не может быть алгебраическим. Теорема 12 доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Два числа α и β называются эквивалентными, если

$$\beta = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}, \quad ad - bc = \pm 1, \quad (12)$$

где a, b, c, d – целые числа.

ТЕОРЕМА 13. Для любого иррационального числа x все числа $\omega \in \Omega_x$ и само число x попарно эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность чисел x и $\omega \in \Omega_x$ очевидно следует из равенств (10) и (11). Пусть $\omega', \omega'' \in \Omega_x, \omega' \neq \omega''$. В силу (10) и (11) имеем равенства

$$x = \frac{p_n + p_{n-1}\omega'}{q_n + q_{n-1}\omega'}, \quad \omega'' = \frac{p_m - q_m x}{-p_{m-1} + q_{m-1}x}, \quad (13)$$

где $p_n/q_n, p_{n-1}/q_{n-1}, p_m/q_m, p_{m-1}/q_{m-1}$ – подходящие дроби по отношению к обычной цепной дроби числа x , m, n – натуральные числа, $m \neq n$, $|p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}| = 1$, $|p_m q_{m-1} - p_{m-1} q_m| = 1$. Подставляя левое выражение для x в (13) в правое выражение в (13) и учитывая, что преобразования $\beta(\alpha)$ в (12) образуют группу, получим утверждение теоремы 13. Теорема 13 доказана.

Глава 4. Бесконечномерные обобщенные цепные дроби, суммы символов Лежандра и распределение квадратичных вычетов и невычетов

§ 1. Общие определения и обозначения

Введем следующие объекты:

- 1) последовательность $p = (p_1, p_2, \dots)$, состоящую из бесконечного числа попарно различных, взаимно простых натуральных чисел p_n ($n = 1, 2, \dots$);
- 2) последовательность $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots)$, состоящую из целых чисел γ_n таких, что при любом $n = 1, 2, \dots$ число γ_n взаимно просто с p_n ;
- 3) дискретную окружность S_n , состоящую из вычетов $0, 1, \dots, p_n - 1$ по модулю p_n , и такую меру μ_n на S_n , что мера каждого элемента из S_n равна p_n^{-1} ;
- 4) тор T , являющийся декартовым произведением окружностей S_n по всем $n = 1, 2, \dots$, точка которого есть такой вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$, что $\omega_n \in S_n$ ($n = 1, 2, \dots$), и меру m на T , являющуюся произведением мер μ_n по всем n ;
- 5) преобразование A , переводящее вектор $x = (x_1, x_2, \dots)$ в вектор $x' = Ax = (x'_1, x'_2, \dots)$ с координатами $x'_n = x_n + \gamma_n$ ($n = 1, 2, \dots$);
- 6) преобразование $\bar{A}$ тора T , переводящее вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in T$ в вектор $\bar{\omega} = \bar{A}\omega = (\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots)$ с координатами $\bar{\omega}_n = \omega_n + \gamma_n \bmod p_n$ ($n = 1, 2, \dots$);
- 7) преобразование $\hat{A}$ тора T , обратное к $\bar{A}$, которое переводит вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in T$ в вектор $\hat{\omega} = \hat{A}\omega = (\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \dots)$ с координатами $\hat{\omega}_n = \omega_n - \gamma_n \bmod p_n$ ($n = 1, 2, \dots$);
- 8) для любого вещественного числа z символами $[z]$ и $\{z\}$ обозначаются соответственно целая и дробные части этого числа;
- 9) для любого вектора $x = (x_1, x_2, \dots)$ с целочисленными координатами x_n ($n = 1, 2, \dots$) вводим векторы $[[x]] = ([x]_1, [x]_2, \dots)$, $\{\{x\}\} = (\{\{x\}\}_1,$

$\{\{x\}\}_2, \dots$), у которых при $n = 1, 2, \dots$ координата $[[x]]_n = [x_n/p_n]$, а координата $\{\{x\}\}_n = x_n - p_n[[x]]_n$;

- 10) утверждение, справедливое всюду на T , означает, что оно выполняется для всех векторов $x \in T$, а утверждение, которое справедливо для почти всех $x \in T$, означает, что оно выполнено для всех $x \in T$, кроме множества, мера mes которого равна нулю.

§ 2. Эргодические свойства отображения $\bar{A}$

Пусть s – натуральное число и $k_1, \dots, k_s$ – попарно различные натуральные числа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Введем s -мерный тор $T_{k_1, \dots, k_s} = S_{k_1} \times \dots \times S_{k_s}$ как прямое произведение дискретных окружностей $S_{k_1}, \dots, S_{k_s}$ и меру $\mu_{k_1, \dots, k_s}$ на $T_{k_1, \dots, k_s}$ как прямое произведение мер $\mu_{k_1}, \dots, \mu_{k_s}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $c_{k_1, \dots, k_s}$ – подмножество тора $T_{k_1, \dots, k_s}$. Введем цилиндр $C_{k_1, \dots, k_s} \subset T$ как подмножество тора T , состоящее из всех таких векторов $x = (x_1, x_2, \dots) \in C_{k_1, \dots, k_s}$, для которых s -мерный вектор $x_{k_1, \dots, k_s} = (x_{k_1}, \dots, x_{k_s})$ с координатами $x_{k_1}, \dots, x_{k_s}$ принадлежит подмножеству $c_{k_1, \dots, k_s}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из определения тора T и меры mes на T следует, что σ -алгебра измеримых относительно mes подмножеств T порождена цилиндрами $C_{k_1, \dots, k_s}$ для всевозможных конечных наборов натуральных чисел $k_1, \dots, k_s$, и для любого цилиндра $C_{k_1, \dots, k_s}$ справедливо равенство $\text{mes } C_{k_1, \dots, k_s} = \mu_{k_1, \dots, k_s}(c_{k_1, \dots, k_s})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Характеристической функцией множества называется функция, которая принимает на этом множестве значение, равное 1, а в остальных точках значение, равное 0.

ЛЕММА 1. Пусть $\Omega \subset T$, Ω – измеримое относительно меры mes множество. Тогда множество $\bar{A}(\Omega)$ mes -измеримо на T и $\text{mes } \Omega = \text{mes } \bar{A}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если Ω – цилиндр, то утверждение леммы 1 непосредственно следует из определения преобразования $\bar{A}$ в § 1 и определения 2, а для произвольного mes -измеримого множества утверждение леммы 1 есть следствие замечания 1. Лемма 1 доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Отображение, действующее в пространстве с конечной мерой и сохраняющее эту меру, называется эргодическим, если оно не имеет инвариантных множеств, мера которых отлична от нуля или меры всего пространства.

Сформулируем необходимую для дальнейшего эргодическую теорему Биркгофа применительно к преобразованию $\bar{A}$, действующему на торе T с мерой mes .

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА БИРКГОФА [48]. Пусть $f(x)$ – интегрируемая по модулю функция на T относительно меры mes . Тогда для почти всех $x \in T$ существует $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \sum_{k=1}^n f(\bar{A}^k x) = \bar{f}(x)$, а если преобразование $\bar{A}$ эргодично, то функция $\bar{f}(x)$ есть константа, равная интегралу от функции $f(x)$ вдоль тора T по мере mes .

Далее мы докажем теорему 1, из которой следует, что отображение $\bar{A}$ – эргодично, и, следовательно, имеет место вторая часть теоремы Биркгофа.

ТЕОРЕМА 1. Преобразование $\bar{A}$ тора T эргодично относительно меры mes , и для него и для характеристической функции цилиндра эргодическая теорема Биркгофа справедлива всюду.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть $k_1, \dots, k_s$ – различные натуральные числа, числа $p_{k_1}, \dots, p_{k_s}$ отличны от 1, t_{k_ν} ($\nu = 1, \dots, s$) – целые числа такие, что $1 \leq t_{k_\nu} \leq p_{k_\nu} - 1$. Тогда сумма

$$R_{k_1, \dots, k_s} = \sum_{\nu=1}^s \frac{\gamma_{k_\nu} t_{k_\nu}}{p_{k_\nu}}$$

не может быть целым числом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Разделив числитель и знаменатель правильной дроби t_{k_ν}/p_{k_ν} на наибольший общий делитель, получим правильную дробь $a_\nu/b_\nu = t_{k_\nu}/p_{k_\nu}$, у которой числитель a_ν и знаменатель b_ν – взаимно простые числа. Поэтому в силу того, что числа γ_n и p_n – взаимно простые и числа $p_{k_1}, \dots, p_{k_s}$ – попарно взаимно простые, величина

$$R_{k_1, \dots, k_s} = \sum_{\nu=1}^s \frac{\gamma_{k_\nu} a_\nu}{b_\nu} = \frac{\gamma_{k_1} a_1 \prod_{\nu=2}^s b_\nu + L}{b_1 \dots b_s}$$

– дробь, в которой знаменатель делится на $b_1 \neq 1$, а числитель на b_1 не делится, так как его первое слагаемое не делится на b_1 , а второе слагаемое L на b_1 делится. Лемма 2 доказана.

Согласно замечанию 1, сформулированному в начале этого параграфа, ортогональный базис пространства L_2 на T относительно меры mes образуют функции

$$f_{k_1, \dots, k_s}(x) = \exp\left(2\pi i \left(\frac{x_{k_1} t_{k_1}}{p_{k_1}} + \dots + \frac{x_{k_s} t_{k_s}}{p_{k_s}}\right)\right), \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots) \in T$, $k_1, \dots, k_s$ – попарно различные натуральные числа, $0 \leq t_{k_\nu} \leq p_{k_\nu} - 1$, t_{k_ν} – целые числа, $\nu = 1, \dots, s$. Рассмотрим унитарный оператор $\mathcal{U}$, сопряженный $\bar{A}$, который действует в L_2 на T , переводя функцию $f(x) \in L_2$ в функцию $(\mathcal{U}f)(x) = f(\bar{A}x)$. Из определения $\bar{A}$ в §1 следует, что функции $f_{k_1, \dots, k_s}(x)$ из (1) являются собственными для оператора $\mathcal{U}$; их собственные значения $\lambda_{k_1, \dots, k_s} = \exp(2\pi i R_{k_1, \dots, k_s})$, где $R_{k_1, \dots, k_s}$ – числа, введенные в лемме 2; и согласно лемме 2 если числа $p_{k_1}, \dots, p_{k_s}$ отличны от 1, а числа $t_{k_1}, \dots, t_{k_s}$ отличны от нуля, то $\lambda_{k_1, \dots, k_s} \neq 1$. Поэтому в L_2 на T не существует функции, отличной от константы, которая была бы инвариантна относительно оператора $\mathcal{U}$. Это и доказывает эргодичность $\bar{A}$ [48].

Докажем теперь, что для преобразования $\bar{A}$ и характеристической функции $\chi_{k_1, \dots, k_s}(x)$ цилиндра $C_{k_1, \dots, k_s}$ эргодическая теорема Биркгофа справедлива всюду. Согласно определениям 1, 2 и замечанию 1 это означает, что для любого вектора $x \in T$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_{k_1, \dots, k_s}(\bar{A}^k x) = \text{mes } C_{k_1, \dots, k_s} = \mu_{k_1, \dots, k_s}(c_{k_1, \dots, k_s}), \quad (2)$$

где $c_{k_1, \dots, k_s}$ — подмножество тора $T_{k_1, \dots, k_s}$, соответствующее цилиндру $C_{k_1, \dots, k_s}$ согласно определению 2. Ввиду того что любая функция от конечного числа переменных $x_{k_1}, \dots, x_{k_s}$, принимающих конечное число значений $x_{k_\nu} \in S_{k_\nu}$ ($\nu = 1, \dots, s$), представляется в виде конечной линейной комбинации функций $f_{k_1, \dots, k_s}(x)$, введенных в (1), для доказательства равенства (2) достаточно доказать, что если числа $p_{k_1}, \dots, p_{k_s}$ отличны от 1, а $t_{k_1}, \dots, t_{k_s}$ — целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$1 \leq t_{k_\nu} \leq p_{k_\nu} - 1 \quad (\nu = 1, \dots, s), \quad (3)$$

то функция $f_{k_1, \dots, k_s}(x)$ удовлетворяет равенствам

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_{k_1, \dots, k_s}(\bar{A}^k x) = 0, \quad (4)$$

$$\int_{T_{k_1, \dots, k_s}} f_{k_1, \dots, k_s}(x_{k_1}, \dots, x_{k_s}) d\mu_{k_1, \dots, k_s} = 0, \quad (5)$$

где $f_{k_1, \dots, k_s}(x_{k_1}, \dots, x_{k_s})$ — функция, введенная в (1), рассматриваемая как функция только от аргументов $x_{k_1}, \dots, x_{k_s}$.

Для доказательства равенства (5) воспользуемся леммой 2, согласно которой число $R_{k_1, \dots, k_s} = a/b$ есть несократимая дробь (a, b — целые числа), отличная от целого числа ($b \neq 1$), и равенством

$$f_{k_1, \dots, k_s}(\bar{A}^k x) = \exp(2\pi i k R_{k_1, \dots, k_s}) f_{k_1, \dots, k_s}(x).$$

В силу этого равенства для любого натурального числа m сумма

$$\sum_{k=m}^{m+b-1} f_{k_1, \dots, k_s}(\bar{A}^k x) = 0.$$

Поэтому существует константа M , зависящая только от функции $f_{k_1, \dots, k_s}(x)$, такая, что при всех n справедливо неравенство $|\sum_{k=1}^n f_{k_1, \dots, k_s}(\bar{A}^k x)| < M$, из которого равенство (4) очевидно следует. Что же касается равенства (5), то оно следует из определения 1 меры $\mu_{k_1, \dots, k_s}$ и условия, согласно которому числа $p_{k_1}, \dots, p_{k_s}$ отличны от 1, а числа $t_{k_1}, \dots, t_{k_s}$ удовлетворяют неравенствам (3), так как в этом случае

$$\int_{T_{k_1, \dots, k_s}} f_{k_1, \dots, k_s}(x_{k_1}, \dots, x_{k_s}) d\mu_{k_1, \dots, k_s} = \prod_{\nu=1}^s \left(p_{k_\nu}^{-1} \sum_{x_{k_\nu}=0}^{p_{k_\nu}-1} \exp\left(2\pi i \frac{x_{k_\nu} t_{k_\nu}}{p_{k_\nu}}\right) \right) = 0.$$

Теорема 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Любая траектория отображения $\bar{A}$ всюду плотна на торе T в следующем смысле: эта траектория проходит через любой цилиндр.

§ 3. Разложение бесконечномерного вектора с целочисленными координатами в обобщенную цепную дробь

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots)$ – вектор, у которого при любом натуральном числе n координата x_n – целое число. Представим его в виде (A, p, ω) -цепной дроби, которая может быть как конечной, так и бесконечной. Конечная (A, p, ω) -цепная дробь будет обозначаться через $x = [q^{(0)}, \dots, q^{(m)}]_{A, p, \omega}$, а бесконечная – через $x = [q^{(0)}, q^{(1)}, \dots]_{A, p, \omega}$.

Пусть $x^{(0)} = x$, $q^{(0)} = [[x^{(0)}]]$, $\delta^{(0)} = \{\{x^{(0)}\}\}$ (см. п. 9) § 1). Если $\delta^{(0)} = \omega$, то процесс построения цепной дроби на этом заканчивается, (A, p, ω) -цепная дробь вектора x – конечная и имеет вид $x = [q^{(0)}]_{A, p, \omega}$. Если же $\delta^{(0)} \neq \omega$, то полагаем $x^{(1)} = A\delta^{(0)}$. Предположим теперь, что при некотором целом $k \geq 0$ построены n -мерные векторы $q^{(0)}, q^{(1)}, \dots, q^{(k)}$ с целочисленными координатами и n -мерные векторы $x^{(0)}, \dots, x^{(k+1)}$ такие, что при $s = 0, \dots, k$ $q^{(s)} = [[x^{(s)}]]$ и $\delta^{(s)} = \{\{x^{(s)}\}\} \neq \omega$. Пусть $q^{(k+1)} = [[x^{(k+1)}]]$, $\delta^{(k+1)} = \{\{x^{(k+1)}\}\}$. Если $\delta^{(k+1)} = \omega$, то процесс построения (A, p, ω) -цепной дроби заканчивается, (A, p, ω) -цепная дробь вектора x – конечная и имеет вид $x = [q^{(0)}, \dots, q^{(k+1)}]_{A, p, \omega}$. Если же $\delta^{(k+1)} \neq \omega$, то полагаем $x^{(k+2)} = A\delta^{(k+1)}$. Если $\delta^{(k)} \neq \omega$ для всех $k \geq 0$, то (A, p, ω) -цепная дробь вектора x – бесконечная и имеет вид $x = [q^{(0)}, q^{(1)}, \dots]_{A, p, \omega}$. Представление вектора x в виде (A, p, ω) -цепной дроби полностью описано. Из конструкции (A, p, ω) -цепной дроби следует, что для ее определения достаточно иметь отображение A только множества $T \setminus \omega$. Если же $n = 1$, x – действительное число, $[[x]] = [x]$ – целая часть x , $\{\{x\}\} = \{x\}$ – дробная часть x , а A – отображение интервала $0 \leq y < 1$, имеющее вид $A: y \rightarrow 1/y$, то указанная конструкция приводит к обычным цепным дробям [1].

ТЕОРЕМА 2. *(A, p, ω) -цепная дробь вектора x – конечная тогда и только тогда, когда вектор $\{\{x\}\}$ принадлежит траектории $\hat{A}^k \omega$ ($k = 0, 1, \dots$), где $\hat{A}$ – отображение, введенное в п. 7) § 1, а $\hat{A}^0$ – тождественное отображение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что (A, p, ω) -цепная дробь вектора x – конечная и имеет вид $x = [q^{(0)}, \dots, q^{(m)}]_{A, p, \omega}$. В силу определения отображения $\bar{A}$ в п. 6) § 1 при $k = 0, \dots, m$ имеем: $\delta^{(k)} = \bar{A}^k \{\{x\}\}$, $\delta^{(m)} = \omega$, где $\delta^{(k)}$ – величины, введенные в процессе построения (A, p, ω) -цепной дроби. Поэтому согласно определению отображения $\hat{A}$ в п. 7) § 1 $\{\{x\}\} = \hat{A}^m \omega$. Обратно, пусть при некотором $m \geq 0$ $\{\{x\}\} = \hat{A}^m \omega$, а при любом неотрицательном целом $s < m$ $\hat{A}^s \omega \neq \{\{x\}\}$. Тогда $\delta^{(m)} = \omega$, а при $s < m$ $\delta^{(s)} \neq \omega$, что и доказывает конечность (A, p, ω) -цепной дроби вектора x . Теорема 2 доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Разным векторам соответствуют разные (A, p, ω) -цепные дроби.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots)$ и $\bar{\bar{x}} = (\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2, \dots)$ два различных вектора с целочисленными координатами. Полагаем $\bar{q} = [[\bar{x}]]$, $\bar{\delta} = \{\{\bar{x}\}\}$, $\bar{\bar{q}} = [[\bar{\bar{x}}]]$, $\bar{\bar{\delta}} = \{\{\bar{\bar{x}}\}\}$, где $\bar{q} = (\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots)$, $\bar{\bar{q}} = (\bar{\bar{q}}_1, \bar{\bar{q}}_2, \dots)$, $\bar{\delta} = (\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \dots)$, $\bar{\bar{\delta}} = (\bar{\bar{\delta}}_1, \bar{\bar{\delta}}_2, \dots)$. Пусть разложение в (A, p, ω) -цепную дробь хотя бы одного из векторов $\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}$ – конечное. Если $\bar{q} \neq \bar{\bar{q}}$, то утверждение теоремы 3 следует из построения (A, p, ω) -цепной дроби. Если же $\bar{q} = \bar{\bar{q}}$, то $\bar{\delta} \neq \bar{\bar{\delta}}$. Поэтому, предполагая, что (A, p, ω) -цепные дроби векторов $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$ совпадают, в силу теоремы 2 и ее доказательства имеем: $\bar{\delta} = \bar{\bar{\delta}} = \hat{A}^k \omega$,

где k – некоторое натуральное число. Полученное противоречие доказывает теорему 3 в случае, когда (A, p, ω) -цепная дробь хотя бы одного из векторов $\bar{x}, \bar{\bar{x}}$ – конечная.

Пусть теперь (A, p, ω) -цепные дроби векторов $\bar{x}, \bar{\bar{x}}$ – бесконечные, $\bar{x} = [\bar{q}^{(0)}, \bar{q}^{(1)}, \dots]_{A, p, \omega}$, $\bar{\bar{x}} = [\bar{\bar{q}}^{(0)}, \bar{\bar{q}}^{(1)}, \dots]_{A, p, \omega}$, и при любом целом $k \geq 0$ $\bar{q}^{(k)} = (\bar{q}_1^{(k)}, \bar{q}_2^{(k)}, \dots)$, $\bar{\bar{q}}^{(k)} = (\bar{\bar{q}}_1^{(k)}, \bar{\bar{q}}_2^{(k)}, \dots)$. Предполагая, что (A, p, ω) -цепные дроби векторов $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$ совпадают, получим, что при всех целых $k \geq 0$ $\bar{q}^{(k)} = \bar{\bar{q}}^{(k)}$, $\bar{q} = \bar{\bar{q}}$ и, следовательно, $\bar{\delta} \neq \bar{\bar{\delta}}$. Пусть s – такое наименьшее натуральное число, что $\bar{\delta}_s \neq \bar{\bar{\delta}}_s$. При $k = 0, 1, \dots$ введем векторы $\bar{\delta}^{(k)} = \bar{A}^k \bar{\delta} = (\bar{\delta}_1^{(k)}, \bar{\delta}_2^{(k)}, \dots)$, $\bar{\bar{\delta}}^{(k)} = \bar{A}^k \bar{\bar{\delta}} = (\bar{\bar{\delta}}_1^{(k)}, \bar{\bar{\delta}}_2^{(k)}, \dots)$ и векторы $\bar{x}^{(k)} = (\bar{x}_1^{(k)}, \bar{x}_2^{(k)}, \dots)$, $\bar{\bar{x}}^{(k)} = (\bar{\bar{x}}_1^{(k)}, \bar{\bar{x}}_2^{(k)}, \dots)$, у которых при любом натуральном числе n координаты $\bar{x}^{(k)}$ и $\bar{\bar{x}}^{(k)}$ имеют вид $\bar{x}_n^{(k)} = p_n \bar{q}_n^{(k)} + \bar{\delta}_n^{(k)}$, $\bar{\bar{x}}_n^{(k)} = p_n \bar{\bar{q}}_n^{(k)} + \bar{\bar{\delta}}_n^{(k)}$. Из построения (A, p, ω) -цепной дроби и определения отображения A в п. 5) § 1 следует, что при любом $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \bar{x}^{(k)} &= \bar{A} \bar{\delta}^{(k-1)} = \bar{\delta}^{(k-1)} + \gamma, \quad \bar{\bar{x}}^{(k)} = \bar{A} \bar{\bar{\delta}}^{(k-1)} + \gamma, \\ p_s \bar{q}_s^{(k)} &\leq \bar{x}_s^{(k)} < p_s \bar{q}_s^{(k)} + p_s, \quad p_s \bar{\bar{q}}_s^{(k)} \leq \bar{\bar{x}}_s^{(k)} < p_s \bar{\bar{q}}_s^{(k)} + p_s, \\ \bar{x}_s^{(k)} - \bar{\bar{x}}_s^{(k)} &= \bar{\delta}_s - \bar{\bar{\delta}}_s \neq 0, \end{aligned} \quad (6)$$

так как согласно предложению $\bar{q}_s^{(k)} = \bar{\bar{q}}_s^{(k)}$. Предположим для определенности, что

$$\bar{\delta}_s > \bar{\bar{\delta}}_s. \quad (7)$$

Применяя следствие 1 теоремы 1 (§ 2), согласно определению векторов $\bar{\delta}^{(k)}$ получим, что существует такое натуральное число k_0 , что

$$\bar{\delta}_s^{(k_0)} < \bar{\delta}_s - \bar{\bar{\delta}}_s. \quad (8)$$

Но так как при всех $k \geq 1$

$$\bar{x}_s^{(k)} = p_s \bar{q}_s^{(k)} + \bar{\delta}_s^{(k)}, \quad \bar{\bar{x}}_s^{(k)} = p_s \bar{\bar{q}}_s^{(k)} + \bar{\bar{\delta}}_s^{(k)} = p_s \bar{q}_s^{(k)} + \bar{\bar{\delta}}_s^{(k)},$$

то в силу (6) и (7) имеем: $\bar{\delta}_s^{(k_0)} - \bar{\bar{\delta}}_s^{(k_0)} = \bar{\delta}_s - \bar{\bar{\delta}}_s > 0$, что противоречит (8). Теорема 3 доказана.

ТЕОРЕМА 4. Бесконечная (A, p, ω) -цепная дробь $x = [q^{(0)}, q^{(1)}, \dots]_{A, p, \omega}$ вектора x не может быть периодической, т.е. не существует таких натуральных чисел k_0 и h , что для любого натурального числа $k \geq k_0$ выполнено равенство $q^{(k+h)} = q^{(k)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. что бесконечная (A, p, ω) -цепная дробь $x = [q^{(0)}, q^{(1)}, \dots]_{A, p, \omega}$ такова, что $q^{(k+h)} = q^{(k)}$ при $k \geq k_0$. Из определения последовательности p в п. 1) § 1 следует, что существует такое натуральное число s , что $p_s > 1$, а если $n \geq s$, то число p_n взаимно просто с числом h . Для этого числа s и для любых векторов $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots) \in T$, $\bar{\bar{x}} = (\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2, \dots) \in T$, у которых координаты $\bar{x}_s, \bar{\bar{x}}_s$ удовлетворяют равенствам $\bar{x}_s = 0$, $\bar{\bar{x}}_s = p_s - 1$, их образы

$\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots) = A\bar{x}$, $\bar{\bar{y}} = (\bar{\bar{y}}_1, \bar{\bar{y}}_2, \dots) = A\bar{\bar{x}}$ при отображении A удовлетворяют неравенству

$$\left[\frac{\bar{y}_s}{p_s} \right] \neq \left[\frac{\bar{\bar{y}}_s}{p_s} \right]. \quad (9)$$

Введем векторы $\delta = \{\{x\}\}$, $\delta^{(k)} = \bar{A}^k \delta$ и два множества $\bar{M} \subset T$, $\bar{\bar{M}} \subset T$ такие, что

$$\bar{M} = \{y = (y_1, y_2, \dots) : y_s = 0\}, \quad \bar{\bar{M}} = \{y = (y_1, y_2, \dots) : y_s = p_s - 1\}, \quad (10)$$

тор $T^{(s)}$, являющийся декартовым произведением окружностей S_n (см. п. 3) §1) по всем $n = s, s+1, \dots$, большим, чем $s-1$, и преобразование $\tilde{A}$ тора $T^{(s)}$, которое переводит произвольный вектор $y = (y_s, y_{s+1}, \dots) \in T^{(s)}$ в вектор $\tilde{y} = \tilde{A}y = (\tilde{y}_s, \tilde{y}_{s+1}, \dots)$ с координатами $\tilde{y}_n = y_n + h\gamma_n \bmod p_n$, где $n \geq s$. Так как согласно определению чисел γ_n в п. 2) §1 и определению числа s при $n \geq s$ число $h\gamma_n$ взаимно просто с p_n , то к преобразованию $\tilde{A}$ на торе $T^{(s)}$ можно применить следствие 1 теоремы 1 (§2). Поэтому в силу этого следствия существуют натуральные числа $\bar{n}$ и $\bar{\bar{n}}$ такие, что

$$\bar{A}^{h\bar{n}} \delta^{(k)} \in \bar{M}, \quad \bar{A}^{h\bar{\bar{n}}} \delta^{(k)} \in \bar{\bar{M}}. \quad (11)$$

Но из построения (A, p, ω) -цепной дроби следует, что векторы

$$\begin{aligned} q^{(h\bar{n}+k+1)} &= (q_1^{(h\bar{n}+k+1)}, q_2^{(h\bar{n}+k+1)}, \dots), \\ q^{(h\bar{\bar{n}}+k+1)} &= (q_1^{(h\bar{\bar{n}}+k+1)}, q_2^{(h\bar{\bar{n}}+k+1)}, \dots), \end{aligned}$$

входящие в (A, p, ω) -цепную дробь $x = [q^{(0)}, q^{(1)}, \dots]_{A, p, \omega}$, связаны с векторами

$$\begin{aligned} x^{(h\bar{n}+k+1)} &= (x_1^{(h\bar{n}+k+1)}, x_2^{(h\bar{n}+k+1)}, \dots) = A\bar{A}^{h\bar{n}} \delta^{(k)}, \\ x^{(h\bar{\bar{n}}+k+1)} &= (x_1^{(h\bar{\bar{n}}+k+1)}, x_2^{(h\bar{\bar{n}}+k+1)}, \dots) = A\bar{A}^{h\bar{\bar{n}}} \delta^{(k)} \end{aligned}$$

с помощью следующих равенств:

$$q_\nu^{(h\bar{n}+k+1)} = \left[\frac{x_\nu^{(h\bar{n}+k+1)}}{p_\nu} \right], \quad q_\nu^{(h\bar{\bar{n}}+k+1)} = \left[\frac{x_\nu^{(h\bar{\bar{n}}+k+1)}}{p_\nu} \right],$$

$\nu = 1, 2, \dots$. Поэтому в силу (9), (10) и (11) $q_s^{(h\bar{n}+k+1)} \neq q_s^{(h\bar{\bar{n}}+k+1)}$, $q^{(h\bar{n}+k+1)} \neq q^{(h\bar{\bar{n}}+k+1)}$, что противоречит предположению о периодичности бесконечной (A, p, ω) -цепной дроби вектора x . Теорема 4 доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\Omega \subset T$, Ω — mes -измеримо и $\text{mes } \Omega > 0$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- 1) для почти всех $x \in T$ существует такое $\omega = \omega(x) \in \Omega$, что (A, p, ω) -цепная дробь вектора x — конечная;
- 2) если множество Ω — цилиндр, то утверждение 1) справедливо для всех x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\chi(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \in \Omega, \\ 0, & \text{если } y \notin \Omega. \end{cases}$$

Применяя теорему 1 (§2) к преобразованию $\bar{A}$ и функции $\chi(y)$, для почти всех x получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi(\bar{A}^k x) = \text{mes } \Omega > 0. \quad (12)$$

Поэтому утверждение 1) следует из теоремы 2. Для доказательства утверждения 2) достаточно показать, что в случае, когда Ω – цилиндр, предел в (12) существует для всех $x \in T$. Но этот факт также следует из теоремы 1. Теорема 5 доказана.

§4. Бесконечномерные обобщенные подходящие дроби и их свойства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $x = [q^{(0)}, q^{(1)}, \dots]_{A,p,\omega}$ есть (A, p, ω) -цепная дробь вектора x . При $\nu = 0, 1, \dots$ введем (A, p, ω) -подходящие дроби $S^{(\nu)} = [q^{(0)}, \dots, q^{(\nu)}]_{A,p,\omega}$ вектора x следующим образом: $S^{(\nu)} = (S_1^{(\nu)}, S_2^{(\nu)}, \dots)$ – бесконечномерный вектор, у которого при $n = 0, 1, \dots$ координата

$$S_n^{(\nu)} = q_n^{(0)} p_n + (\dots (-\gamma_n + q_n^{(\nu-1)} p_n + (-\gamma_n + q_n^{(\nu)} p_n + \omega_n)) \dots), \quad (13)$$

где $q_n^{(k)}$ ($k = 0, \dots, \nu$) и ω_n – координаты векторов

$$q^{(k)} = (q_1^{(k)}, q_2^{(k)}, \dots), \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots).$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть дана бесконечная (A, p, ω) -цепная дробь вектора x , $S^{(\nu)} = (S_1^{(\nu)}, S_2^{(\nu)}, \dots)$ – (A, p, ω) -подходящие дроби вектора x ($\nu = 0, 1, \dots$), N и m – натуральные числа, $U_N(x) = \{y = (y_1, y_2, \dots) \in T : y_n = x_n, 1 \leq n \leq N\}$ – цилиндр, $D_{N,m}(x)$ – количество таких ν в ряду $1, \dots, m$, что $S^{(\nu)} \in U_N(x)$. Тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{D_{N,m}(x)}{m} = (p_1, \dots, p_N)^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу построения (A, p, ω) -цепной дроби в §3 и определения отображения A в п. 5) §1 координату x_n ($n \geq 1$) вектора $x = (x_1, x_2, \dots)$ можно представить в виде выражения

$$x = q_n^{(0)} p_n + (\dots (-\gamma_n + q_n^{(\nu-1)} p_n + (-\gamma_n + q_n^{(\nu)} p_n + \delta_n^{(\nu)})) \dots), \quad (14)$$

где $q_n^{(k)}$ и $\delta_n^{(\nu)}$ – координаты векторов $q^{(k)} = (q_1^{(k)}, q_2^{(k)}, \dots)$, $\delta^{(\nu)} = (\delta_1^{(\nu)}, \delta_2^{(\nu)}, \dots)$. Поэтому согласно равенствам (13) и (14) $x - S^{(\nu)} = \delta^{(\nu)} - \omega$. В силу этого равенства величина $D_{N,m}(x)$, введенная в формулировке теоремы 6, совпадает с величиной $Q_{N,m}(x)$, которая определяется следующим образом: $Q_{N,m}(x)$ есть количество таких чисел ν в ряду $1, \dots, m$, что $\delta^{(\nu)} \in U_N(\omega)$, где цилиндр $U_N(\omega)$ при $\omega = x$ также определен в формулировке теоремы 6. Применяя теорему 1 и эргодическую теорему

Биркгофа (§ 2) к преобразованию $\bar{A}$ и к характеристической функции $\chi(y)$ цилиндра $U_N(\omega) \subset T$, в силу равенства $\delta^{(\nu)} = \bar{A}^\nu \{\{x\}\}$ получим равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{N,m}(x)}{m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \chi(\bar{A}^k \delta^{(0)}) = \int_T \chi(y) dy = (p_1, \dots, p_N)^{-1},$$

из которого следует утверждение теоремы 6. Теорема 6 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Вектор $x = (x_1, x_2, \dots)$, у которого $\bar{A}$ -цепная дробь – бесконечная, есть предельная точка своих (A, p, ω) -подходящих дробей $S^{(\nu)} = (S_1^{(\nu)}, S_2^{(\nu)}, \dots)$ ($\nu = 0, 1, \dots$) в следующем смысле: для каждого натурального числа N существует такое ν , что у вектора $S^{(\nu)}$ координата $S_n^{(\nu)} = x_n$, если $1 \leq n \leq N$.

§ 5. Оценки сумм символов Лежандра и распределение квадратичных вычетов и невычетов по простому модулю

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $\tilde{p}$ – простое число. Целое число называется квадратичным вычетом по модулю $\tilde{p}$, если оно не делится на $\tilde{p}$ и сравнимо с квадратом целого числа по модулю $\tilde{p}$. Целое число, не делящееся на $\tilde{p}$, которое не сравнимо с каким-либо квадратом целого числа по модулю $\tilde{p}$, называется квадратичным невычетом по модулю $\tilde{p}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $\tilde{p}$ – простое число, d – целое число. Определим символ Лежандра $\left(\frac{d}{\tilde{p}}\right)$ числа d по отношению к $\tilde{p}$ следующим образом: этот символ равен 1, если d – квадратичный вычет по модулю $\tilde{p}$, равен -1 , если d – квадратичный невычет по модулю $\tilde{p}$, и равен 0, если число d делится на $\tilde{p}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Введем отображение A_* , переводящее бесконечномерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots)$ в вектор $x^* = A_* x = (x_1^*, x_2^*, \dots)$ с координатами $x_n^* = x_n + 1$ ($n = 1, 2, \dots$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отображение A_* совпадает с отображением A (п. 5) § 1), если в его определении положить $\gamma_n = 1$ ($n = 1, 2, \dots$).

Введем следующие объекты:

r – натуральное число;

ε – вещественное число, удовлетворяющее неравенствам $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$;

$\psi(n)$ – произвольная вещественная функция такая, что при всех натуральных $n \geq 1$ $\psi(n) \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = \infty$ и $[\psi(n)]^r \leq c\sqrt{n}$, где c – константа, не зависящая от n ;

$p = (p_1, p_2, \dots)$ – последовательность, состоящая из попарно различных простых чисел p_n ($n = 1, 2, \dots$) такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} [\psi(p_n)]^{-r(1-2\varepsilon)} < \infty$;

n_0 – такое натуральное число, что при $n \geq n_0$ $\psi(p_n) < p_n$ и $\sum_{n=n_0}^{\infty} [\psi(p_n)]^{-r(1-2\varepsilon)} < ((2r)^r + 4rc)^{-1}$;

Γ_n – подмножество дискретной окружности S_n (п. 3), § 1), состоящее из таких чисел $k \in S_n$, для которых справедливо неравенство $|\sum_{m=1}^{[\psi(p_n)]} \left(\frac{k+m}{p_n}\right)| \geq [\psi(p_n)]^{1-\varepsilon}$;

Π_n – цилиндр на торе T такой, что если $x = (x_1, x_2, \dots) \in \Pi_n$, то $x_n \in \Gamma_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Введем множества Π и Ω на торе T такие, что

$$\Pi = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \Pi_n, \quad \Omega = T \setminus \Pi.$$

ТЕОРЕМА 7. Для любого вектора $x = (x_1, x_2, \dots) \in T$ выполняются следующие утверждения:

- 1) если существует такой вектор $\omega \in \Omega$, что (A_*, p, ω) -цепная дробь вектора x – конечная и имеет вид

$$x = [q^{(0)}, \dots, q^{(\nu)}]_{A_*, p, \omega}, \quad (15)$$

то при всех $n \geq n_0$ справедливо неравенство

$$\left| \sum_{k=\nu+1}^{\nu+[\psi(p_n)]} \left(\frac{x_n + k}{p} \right) \right| < [\psi(p_n)]^{1-\varepsilon} \quad (16)$$

и множество векторов $x \in T$, для которых справедливы соотношения (15) и (16), имеют в T дополнение, мера мер которого равна нулю;

- 2) если при $\omega \in \Omega$ вектор x разлагается в бесконечную (A_*, p, ω) -цепную дробь и $S^{(\nu)} = (S_1^{(\nu)}, S_2^{(\nu)}, \dots)$ – такая (A_*, p, ω) -подходящая дробь, что при $n_0 \leq n \leq N$ выполняется равенство $S_n^{(\nu)} = x_n$, то неравенство (16) справедливо при $n_0 \leq n \leq N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 3 [64]. Пусть $\tilde{p}$ – простое число, k – целое число, ℓ – целое число из интервала $(0, \tilde{p})$, r – натуральное число, $D_\ell(k) = \sum_{m=1}^{\ell} \left(\frac{k+m}{\tilde{p}} \right)$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\tilde{p}-1} D_\ell^{2r}(k) < (2r)^r \tilde{p} \ell^r + 4r \sqrt{\tilde{p}} \ell^{2r}.$$

ЛЕММА 4. Пусть $\tilde{p}$ – простое число; ℓ – целое число из интервала $(0, \tilde{p})$; ε – произвольное число, удовлетворяющее неравенству $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$; $N_{\ell, \tilde{p}}^{(\varepsilon)}$ – количество целых чисел k , принадлежащих отрезку $0 \leq k \leq \tilde{p} - 1$, для которых справедливо неравенство

$$\left| \sum_{m=1}^{\ell} \left(\frac{k+m}{\tilde{p}} \right) \right| \geq \ell^{1-\varepsilon}.$$

Тогда при любом натуральном числе r справедливо неравенство

$$N_{\ell, \tilde{p}}^{(\varepsilon)} < (2r)^r \frac{\tilde{p}}{\ell^{r-2\varepsilon r}} + 4r \sqrt{\tilde{p}} \ell^{2\varepsilon r}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Согласно лемме 3 имеем неравенство

$$N_{\ell, \tilde{p}}^{(\varepsilon)} \ell^{2r-2\varepsilon r} < (2r)^r \tilde{p} \ell^r + 4r \sqrt{\tilde{p}} \ell^{2r},$$

из которого и следует утверждение леммы 4. Лемма 4 доказана.

Применяя лемму 4 в случае $\tilde{p} = p_n$, $\ell = [\psi(p_n)]$ и используя определение меры μ_n на дискретной окружности S_n (§1), получим, что мера μ_n множества Γ_n , введенного в начале этого параграфа, удовлетворяет неравенству

$$\mu_n(\Gamma_n) < \frac{(2r)^r}{[\psi(p_n)]^{r(1-2\varepsilon)}} + \frac{4r[\psi(p_n)]^{2\varepsilon r}}{\sqrt{p_n}}.$$

Поэтому согласно определениям функции $\psi(n)$, числа n_0 и цилиндров Π_n в начале этого параграфа, определению 9 и определению меры mes на торе T (§1) имеем следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \text{mes } \Pi &< \sum_{n=n_0}^{\infty} \mu_n(\Gamma_n) < \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{(2r)^r + 4rc}{[\psi(p_n)]^{r(1-2\varepsilon)}} < 1, \\ \text{mes } \Omega &> 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Из неравенства (17) и теоремы 5 (§3) следует, что для почти всех векторов $x \in T$ существует такой вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega$, что (A_*, p, ω) -цепная дробь вектора x — конечная и имеет вид (15), а согласно определениям преобразований $\bar{A}$ и $\hat{A}$ (§1) и теореме 2 (§3) в этом случае справедливо равенство $\omega = \bar{A}_*^\nu x$, которое в силу определения 8 эквивалентно соотношениям

$$\omega_n \equiv x_\nu + \nu \pmod{p_n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Но из определения 9 множества Ω следует, что для любой координаты ω_n ($n = 1, 2, \dots$) вектора $\omega \in \Omega$

$$\left| \sum_{m=1}^{[\psi(p_n)]} \left(\frac{\omega_n + m}{p_n} \right) \right| < [\psi(p_n)]^{1-\varepsilon}. \quad (19)$$

Теперь утверждение 1) теоремы 7 непосредственно вытекает из соотношений (18) и (19).

Докажем утверждение 2). Из определения 5 (A_*, p, ω) -подходящей дроби $S^{(\nu)}$ вектора $x = (x_1, x_2, \dots)$ и теоремы 2 следует, что

$$\bar{A}_*^\nu \{ \{ S^{(\nu)} \} \} = \omega. \quad (20)$$

Поэтому если (A_*, p, ω) -подходящая дробь $S^{(\nu)} = (S_1^{(\nu)}, S_2^{(\nu)}, \dots)$ такова, что при $n_0 \leq n \leq N$ справедливы равенства $S^{(\nu)} = x_n$, то из равенства (20) и определения 8 преобразования A_* следует, что имеют место сравнения

$$\omega_n = x_n + \nu \pmod{p_n}, \quad n_0 \leq n \leq N. \quad (21)$$

Но так как для всех координат ω_n вектора ω выполняются неравенства (19), то из соотношений (21) и (19) непосредственно следует утверждение 2). Теорема 7 доказана.

ТЕОРЕМА 8. Для любого вектора $x = (x_1, x_2, \dots) \in T$ выполняются следующие утверждения:

- 1) если существует такой вектор $\omega \in \Omega$, что (A_*, p, ω) -цепная дробь вектора x – конечная и имеет вид (15), то при всех $n \geq n_0$ среди целых чисел z , расположенных в области

$$x_n < z < x_n + [\psi(p_n)] + \nu + 1, \quad (22)$$

содержатся $\frac{1}{2}(\nu + [\psi(p_n)]) + \theta'_n(\nu + [\psi(p_n)]^{1-\varepsilon})$ квадратичных вычетов по модулю p_n и $\frac{1}{2}(\nu + [\psi(p_n)]) + \theta''_n(\nu + [\psi(p_n)]^{1-\varepsilon})$ квадратичных невычетов по модулю p_n , где θ'_n и θ''_n – константы, удовлетворяющие неравенствам $|\theta'_n| \leq 1$, $|\theta''_n| \leq 1$;

- 2) множество векторов $x \in T$, для которых существует такой вектор $\omega \in \Omega$, что справедливы равенство (15) и утверждение 1), имеет в T дополнение, мера mes которого равна нулю;
- 3) если при $\omega \in \Omega$ вектор x разлагается в бесконечную (A_*, p, ω) -цепную дробь и $S^{(\nu)} = (S_1^{(\nu)}, S_2^{(\nu)}, \dots)$ – такая (A_*, p, ω) -подходящая дробь, что при $n_0 \leq n \leq N$ выполняется равенство $S_n^{(\nu)} = x_n$, то утверждение 1) справедливо, если $n_0 \leq n \leq N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждений 1) и 2) теоремы 8 мы используем утверждение 1) теоремы 7, а для доказательства утверждения 3) теоремы 8 используем утверждение 2) теоремы 7. В обоих случаях из неравенства (16) следует оценка

$$\left| \sum_{k=1}^{\nu + [\psi(p_n)]} \left(\frac{x_n + k}{p_n} \right) \right| < \nu + [\psi(p_n)]^{1-\varepsilon}. \quad (23)$$

Обозначим через Q'_n количество целых чисел z , содержащихся в области (22) и являющихся квадратичными вычетами по модулю p_n , а через Q''_n – количество чисел z в области (22), являющихся квадратичными невычетами по модулю p_n . В силу определения 7 символа Лежандра имеем равенство

$$Q'_n - Q''_n = \sum_{k=1}^{\nu + [\psi(p_n)]} \left(\frac{x_n + k}{p_n} \right), \quad (24)$$

а из определения чисел Q'_n, Q''_n, n_0 при $n \geq n_0$ следует равенство

$$Q'_n + Q''_n = Q_n, \quad (25)$$

где величина Q_n принимает одно из двух значений:

$$Q_n = \begin{cases} \nu + [\psi(p_n)], & \text{если в области (22) нет чисел } z, \\ & \text{делящихся на } p_n, \\ \nu + [\psi(p_n)] - 1, & \text{если в области (22) есть число } z, \\ & \text{делящееся на } p_n. \end{cases}$$

Теперь, складывая и вычитая между собой соотношения (24) и (25) и используя (23), мы получаем все утверждения теоремы 8. Теорема 8 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В силу следствия 2 теоремы 6 (§4) утверждение 2) теоремы 7 и утверждение 3) теоремы 8 справедливы при сколь угодно большом числе N .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Я. Хинчин. Цепные дроби. М.: Физматлит, 1961.
- [2] А. Д. Брюно, В. И. Парусников. Сравнение разных обобщений цепных дробей // Матем. заметки. 1997. Т. 61. №3. С. 339–348.
- [3] А. Д. Брюно. Аналитическая форма дифференциальных уравнений // Труды ММО. 1971. Т. 25. С. 119–262.
- [4] J.-C. Yoccoz. Petits diviseurs en dimension 1. Paris: Soc. Math. de France, 1995. (Astérisque. V. 231.)
- [5] L. Euler. De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda // Petersburgur Academie Notiz. Exhib. August 14, 1775; // Opuscula Analytica von Euler. 1785. V. 2. P. 91; // L. Euler. Commentationes arithmeticae collectae. V. II, St. Petersburg, 1849. P. 99–104; // L. Euler. Commentationes arithmeticae / ed. R. Fueter. V. 3. Leipzig: Teubner, 1941. P. 136–145.
- [6] L. Dirichlet. Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen // Dirichlet's Werke. 1889. V. I. Berlin. P. 633–637.
- [7] C. G. J. Jacobi. Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird // J. Reine Angew. Math. 1868. V. 69. P. 29–64.
- [8] L. Charve. De la reduction des formes quadratiques ternaires positives et de leur application aux irrationnelles du troisième degré // Ann. Sci. École Norm. Sup. (2). 1880. V. 9. Supplement. P. 1–156.
- [9] C. Hermite. Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres // J. Reine Angew. Math. 1851. V. 41. P. 191–216.
- [10] A. Hurwitz. Über die angenäherte Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche // Math. Ann. 1894. V. 44. P. 417–436.
- [11] H. Minkowski. Généralisation de la théorie des fractions continues // Ann. Sci. École Norm. Sup. (3). 1896. V. 13. №2. P. 41–60.
- [12] F. Klein. Über eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. 1895. №3. P. 357–359.
- [13] F. Klein. Sur une représentation géométrique du développement en fraction continue ordinaire // Nouv. Ann. Math. 1896. V. 15. №3. P. 321–331.
- [14] H. Poincaré. Sur une généralisation des fractions continues // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. 1884. V. 99. P. 1014–1016.
- [15] O. Perron. Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus // Math. Ann. 1907. V. 64. P. 1–76.
- [16] Г. Ф. Вороной. Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей. Варшава: Изд-во Варш. ун-та, 1896; Собр. соч. в 3 томах. Т. 1. Киев: Изд-во АН УССР, 1952. С. 197–391.
- [17] А. Д. Брюно, В. И. Парусников. Многогранники Клейна для двух кубических форм Давенпорта // Матем. заметки. 1994. Т. 56. №4. С. 9–27.
- [18] H. Davenport. On the product of three homogeneous linear forms. II // Proc. London Math. Soc. (2). 1938. V. 44. P. 412–431.
- [19] L. J. Mordell. The product of three homogeneous linear ternary forms // J. London Math. Soc. 1942. V. 17. №2. P. 107–115.
- [20] V. Brun. En generalisation av Kjedebroken // Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania. I. Matematisk-Naturvidenskabelig Kl. 1919. №6; 1920. №6.
- [21] L. Bernstein. The Jacobi-Perron Algorithm: Its Theory and Application. Berlin: Springer-Verlag, 1971.
- [22] T. W. Cusick. Diophantine approximation of ternary linear forms // Math. Comp. 1971. V. 25. №1. P. 163–180.

- [23] T. W. Cusick. Diophantine approximation of ternary linear forms. II // *Math. Comp.* 1972. V. 26. №4. P. 977–993.
- [24] Е. В. Подсыпанин. Об одном обобщении алгоритма цепных дробей, связанном с алгоритмом Вигго Бруна // *Зап. научн. семин. ЛОМИ.* 1977. Т. 67. С. 184–194.
- [25] A. J. Brentjes. Multi-dimensional Continued Fraction Algorithms. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1981.
- [26] H. Tsuchihashi. Higher dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities // *Tohoku Math. J. (2).* 1983. V. 35. №4. P. 607–639.
- [27] H. Nakada. On ergodic theory of A. Schmidt's complex continued fractions over Gaussian field // *Monatsh. Math.* 1988. V. 105. №2. P. 131–150.
- [28] Б. Ф. Скубенко. Минимумы разложимых форм степени n от n переменных при $n \geq 3$ // *Зап. научн. семин. ЛОМИ.* 1990. Т. 183. С. 142–154.
- [29] G. Lachaud. Polyèdre d'Arnol'd et voile d'un cône simplicial: analogues du théorème de Lagrange // *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.* 1993. V. 317. №8. P. 711–716.
- [30] Е. Л. Коркина. Двумерные цепные дроби. Простейшие примеры // *Труды МИАН.* 1995. Т. 209. С. 143–166.
- [31] V. I. Parusnikov. Klein polyhedra for complete decomposable forms // *Number Theory. Diophantine, computational and algebraic aspects* / ed. K. Györy. Berlin: Walter de Gruyter, 1998. P. 453–463.
- [32] Л. Д. Пустыльников. Обобщенные цепные дроби и оценки сумм Вейля и остаточного члена в законе распределения дробных частей значений многочлена // *Матем. заметки.* 1994. Т. 56. №6. С. 144–148.
- [33] L. D. Pustyl'nikov. Ergodic theory and some number theory problems // Preprint. Zürich: Forschungsinstitut für Mathematik, ETH, 1994.
- [34] Л. Д. Пустыльников. Бесконечномерные обобщенные цепные дроби, квадратичные вычеты и невычеты и эргодическая теория // *УМН.* 1997. Т. 52. №2. С. 183–184.
- [35] Л. Д. Пустыльников. Обобщенные цепные дроби и дифференциальные уравнения // Препринт №96. М.: Ин-т прикл. матем. РАН, 1997.
- [36] Л. Д. Пустыльников. Обобщенные цепные дроби, связанные с преобразованием Гаусса // Препринт №35. М.: Ин-т прикл. матем. РАН, 1998.
- [37] L. D. Pustyl'nikov. Generalized continued fractions and ergodic theory // *J. Math. Sci. (New York).* 1999. V. 95. №5. P. 2552–2563.
- [38] L. D. Pustyl'nikov. Infinite-dimensional generalized continued fractions, distribution of quadratic residues and non-residues and ergodic theory // Preprint №99-09-08. Bielefeld: Research Center BiBoS, 1999.
- [39] Я. Г. Синай. Динамические системы с упругими отражениями // *УМН.* 1970. Т. 25. №2. С. 141–192.
- [40] Я. Г. Синай. Современные проблемы эргодической теории. М.: Физматлит, 1995.
- [41] А. Д. Брюно. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Наука, 1998.
- [42] Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.: Гостехиздат, 1950.
- [43] D. Mayer. On the thermodynamic formalism for the Gauss map // *Commun. Math. Phys.* 1990. V. 130. №2. P. 311–333.
- [44] S. Kim, S. Ostlund. Simultaneous rational approximants for physicists // *Phys. Rev. A (3).* 1986. V. 34. P. 3426–3434.
- [45] L. A. Bunimovich. Continued fractions and geometrical optics // *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2.* 1996. V. 171. P. 45–55.
- [46] D. Mayer. Continued fractions and related transformations // *Ergodic Theory, Symbolic Dynamics, and Hyperbolic Spaces* / ed. T. Bedford et al. Oxford: Oxford Univ. Press, 1991. P. 175–222.

- [47] D. Mayer, G. Roepstorff. On the relaxation time of Gauss continued-fraction map. I: The Banach space approach. II: The Hilbert space approach // J. Statist. Phys. 1987. V. 47. № 1/2. P. 149–171; 1988. V. 50. № 1/2. P. 331–344.
- [48] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин. Эргодическая теория. М.: Наука, 1975.
- [49] M. Fürstenberg. Strict ergodicity and transformation of the torus // Amer. J. Math. 1961. V. 83. № 4. P. 573–601.
- [50] Л. Д. Пустыльников. Распределение дробных частей значений многочлена, суммы Вейля и эргодическая теория // УМН. 1993. Т. 48. № 4. С. 131–166.
- [51] L. D. Pustyl'nikov. New estimates of Weyl sums and the remainder term in the law of distribution of the fractional part of a polynomial // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1991. V. 11. № 4. P. 515–534.
- [52] Л. Д. Пустыльников. Вероятностные и эргодические законы в распределении дробных частей значений многочленов // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 2. С. 103–118.
- [53] П. Биллингсли. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
- [54] H. Weyl. Über die Gleichverteilung der Zahlen mod. Eins // Math. Ann. 1916. V. 77. P. 313–352.
- [55] L. D. Pustyl'nikov, J. Schmeling. On some estimations of Weyl sums // Preprint № 98. Berlin: Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastic, 1994.
- [56] И. М. Виноградов. Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1952.
- [57] И. М. Виноградов. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М.: Наука, 1971.
- [58] Г. И. Архипов, А. А. Карацуба, В. Н. Чубариков. Кратные тригонометрические суммы // Труды МИАН. 1980. Т. 151. С. 3–128.
- [59] A. Wiles. Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem // Ann. of Math. (2). 1995. V. 141. № 3. P. 443–551.
- [60] И. М. Виноградов. Основы теории чисел. М.: Наука, 1965.
- [61] И. М. Виноградов. О распределении степенных вычетов и невычетов // Журн. физ.-матем. об-ва при Пермском ун-те. 1918. № 1. С. 94–98.
- [62] А. О. Гельфонд, Ю. В. Линник. Элементарные методы в аналитической теории чисел. М.: Физматгиз, 1962.
- [63] H. Davenport. On the distribution of quadratic residues (mod p) // J. London Math. Soc. 1938. V. 8. P. 46–52.
- [64] D. Burgess. The distribution of quadratic residues and non-residues // Mathematika. 1957. V. 4. P. 106–112.
- [65] Л. Д. Пустыльников. О распределении квадратичных вычетов и невычетов и об одной динамической системе // УМН. 1993. Т. 48. № 1. С. 179–180.

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН
E-mail: pustylni@phsik.uni-bielefeld.de

Поступила в редакцию
05.01.2000