Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Д. Пустыльников, Опровержение аналога гипотезы Римана о нулях для сколь угодно точной аппроксимации дзета-функции, удовлетворяющей тому же функциональному уравнению, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 1, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm595>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 18:10:22

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ
СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ОПРОВЕРЖЕНИЕ АНАЛОГА ГИПОТЕЗЫ РИМАНА О НУЛЯХ
ДЛЯ СКОЛЬ УГОДНО ТОЧНОЙ АППРОКСИМАЦИИ
ДЗЕТА-ФУНКЦИИ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕЙ
ТОМУ ЖЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Л. Д. ПУСТЫЛЬНИКОВ

Известно [1], что дзета-функция Римана $\zeta(s)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\zeta(s)$ – аналитическая функция, имеющая единственный полюс при $s = 1$ и принимающая вещественные значения при вещественных значениях s ;
- 2) все вещественные нули $\zeta(s)$ расположены в четных, отрицательных значениях s ;
- 3) $\zeta(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2} \Gamma((1-s)/2) \zeta(1-s),$$

где $\Gamma(s)$ – гамма-функция.

Далее формулируется и доказывается теорема, из которой следует, что для сколь угодно точной аппроксимации $\zeta_\varepsilon(s)$ функции $\zeta(s)$, удовлетворяющей условиям 1)–3) (в эти условия нужно вместо $\zeta(s)$ подставить $\zeta_\varepsilon(s)$), не верна гипотеза Римана о нулях: $\zeta_\varepsilon(s)$ имеет комплексные нули, не лежащие на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$.

ТЕОРЕМА. Для любого компакта K на комплексной плоскости, не содержащего точку $s = 1$, и любого числа $\varepsilon > 0$ существует функция $\zeta_\varepsilon(s)$, удовлетворяющая условиям 1)–3), для которой $\sup_{s \in K} |\zeta(s) - \zeta_\varepsilon(s)| \leq \varepsilon$, и при этом $\zeta_\varepsilon(s)$ имеет четыре нуля $s_{1,2} = \sigma \pm it$, $s_{3,4} = 1 - \sigma \pm it$, где σ и t – вещественные числа такие, что $\sigma \neq 1/2$, $t \neq 0$, а i – мнимая единица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $\xi(s) = (1/2)s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$, удовлетворяющую уравнению $\xi(s) = \xi(1-s)$, которая в точке $s = 1/2$ разлагается в ряд Тейлора $\xi(s) = \sum_{r=0}^{\infty} \xi_r(s-1/2)^{2r}$ только по четным степеням переменной $z = s - 1/2$.

ЛЕММА 1. Имеет место равенство $\lim_{r \rightarrow \infty} \xi_r^2 / (\xi_{r-1}\xi_{r+1}) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся результатом теоремы 3 из работы [2]. Согласно этой теореме справедливо равенство

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(r! \xi_r)^{\frac{r+1}{r}}}{(r+1)! \xi_{r+1}} = e.$$

Поэтому

$$\frac{\xi_r}{\xi_{r+1}} = \frac{(r+1)(e + o_r(1))}{(r! \xi_r)^{1/r}}, \quad (1)$$

где

$$\lim_{r \rightarrow \infty} o_r(1) = 0. \quad (2)$$

Далее применяя теорему 1 из [2], доказанную в [3], получим равенство

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\xi_r^{1/r}}{\xi_{r+1}^{1/(r+1)}} = 1. \quad (3)$$

Теперь, используя формулу Стирлинга, в силу (1)–(3) получаем утверждение леммы 1.

Для заданного натурального числа n рассмотрим многочлен $f_n(x) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \xi_r x^r$.

ЛЕММА 2. *Существует такое число $n_0 > 0$, что если $n \geq n_0$ и многочлен $f_n(x)$ не имеет кратных корней, то $f_n(x)$ имеет комплексный (невещественный) корень.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 1 из работы [4] при всех $r \geq 0$ справедливо неравенство $\xi_r > 0$. Так как $f_n(x)$ не имеет кратных корней, то для определения числа его вещественных корней можно применить метод Штурма [5], а в качестве первых двух функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$ в системе Штурма взять функции $F_1(x) = f_n(x)$, $F_2(x) = \frac{df_n}{dx}(x)$. При этом третья функция $F_3(x)$ в системе Штурма есть взятый с противоположным знаком остаток от деления $F_1(x)$ на $F_2(x)$. Вычисляя $F_3(x)$ и используя неравенства $\xi_r > 0$ и вид $f_n(x)$, получим, что при выполнении неравенства $(n-1)\xi_{n-1}^2 < 2n\xi_n\xi_{n-2}$ модуль разности чисел перемен знаков в системе Штурма при $x = -\infty$ и при $x = \infty$ будет меньше, чем n , т.е. существует не вещественный корень многочлена $f_n(x)$. Теперь лемма 2 следует из леммы 1.

Для заданных натурального числа n и вещественного числа $\delta > 0$ введем многочлен $\xi^{(n)}(s) = \sum_{r=0}^n \beta_r (s - 1/2)^{2r}$, где β_r ($r = 0, \dots, n$) – такие вещественные числа, что $\sum_{r=0}^n |\beta_r - \xi_r| < \delta$, а многочлен $g^{(n)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \xi^{(n)}(1/2 + it) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \beta_r t^{2r}$ не имеет кратных корней. Применяя лемму 2 и ее доказательство, получим, что при большом n и малом δ многочлен $g^{(n)}(t)$ имеет не вещественный корень, а следовательно, многочлен $\xi^{(n)}(s)$ имеет комплексный корень, не лежащий на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$. Теперь с помощью чисел n и δ , зависящих от числа ε и компакта K , определим функцию $\zeta_\varepsilon(s) = 2\xi^{(n)}(s)(s(s-1))^{-1} \pi^{s/2} \left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{-1}$, для которой справедливы все утверждения теоремы. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Карацуба. Основы теории чисел. М.: Наука, 1975. [2] Л. Д. Пустыльников // УМН 2000. Т. 55. № 2. С. 145–146. [3] Л. Д. Пустыльников // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 1. С. 93–106. [4] Л. Д. Пустыльников // УМН. 1999. Т. 54. № 1. С. 259–260. [5] А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. М.: Физматгиз, 1963.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

Принято редколлегией
20.11.2002