Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Ф. Воронов, О. М. Худавердян, Геометрия дифференциальных операторов и нечетные операторы Лапласа, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 1, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm597>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:27:09

ГЕОМЕТРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И НЕЧЕТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ЛАПЛАСА

Ф. Ф. Воронов, О. М. Худавердян

Пусть Δ – произвольный линейный дифференциальный оператор второго порядка, действующий на функции на (супер)многообразии M . В локальных координатах

$$\Delta = \frac{1}{2} S^{ab} \partial_b \partial_a + T^a \partial_a + R.$$

Главный символ Δ есть симметрическое тензорное поле S^{ab} , или квадратичная функция $S = \frac{1}{2} S^{ab} p_b p_a$ на T^*M . Главный символ может пониматься как симметричная “скобка” на функциях:

$$\{f, g\} := \Delta(fg) - (\Delta f)g - (-1)^\varepsilon \tilde{f}(\Delta g) + \Delta(1)fg,$$

где $\varepsilon = \tilde{\Delta}$ есть четность оператора Δ ; в координатах $\{f, g\} = S^{ab} \partial_b f \partial_a g (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}}$. Далее *скобка* в коммутативной алгебре будем называть произвольное симметричное бидифференцирование. Задача состоит в описании в геометрических терминах всех операторов Δ с данным S^{ab} , или, что то же самое, порождающих данную скобку $\{f, g\}$. Не уменьшая общности, положим впредь $R = \Delta(1) := 0$. Первоначально операторы предполагаются действующими на скалярные функции. По ходу дела у нас естественно появятся пучки операторов, действующих на плотностях произвольного веса. Все рассмотрения применимы как к обычным многообразиям, так и к супермногообразиям. В суперслучае для нечетных операторов возникают вопросы о тождествах типа Якоби. Задача тесно связана с геометрией формализма Баталина–Вилковиского в квантовой теории поля (описание операторов, порождающих нечетную скобку).

Первое нетривиальное наблюдение состоит в том, что хёрмандеровский субглавный символ $\text{sub } \Delta = (\partial_b S^{ba} (-1)^{\tilde{b}(\varepsilon+1)} - 2T^a) p_a$ может быть интерпретирован как “верхняя связность” в расслоении $\text{Vol } M$. Точнее, $\gamma^a = \partial_b S^{ba} (-1)^{\tilde{b}(\varepsilon+1)} - 2T^a$ имеет закон преобразования $\gamma^{a'} = (\gamma^a + S^{ab} \partial_b \ln J) \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$, где $J = \frac{Dx'}{Dx}$ (якобиан), и задает “контравариантную производную” $\nabla^a \rho = (S^{ab} \partial_b + \gamma^a) \rho$ на формах объема. Зависящий от системы координат гамильтониан $\gamma = \text{sub } \Delta = \gamma^a p_a$ играет роль локальной формы связности. Если матрица S^{ab} обратима, то можно опустить индекс a и получить обыкновенную связность. (Подчеркнем, что Δ действует на функциях, а на многообразии априори нет никакой дополнительной структуры. Расслоение $\text{Vol } M$ и верхняя связность в нем появляются из самого оператора.) Таким образом, Δ определяется набором данных: скобка на функциях и ассоциированная верхняя связность в $\text{Vol } M$.

Определим *алгебру плотностей* $\mathfrak{V}(M)$ как алгебру формальных линейных комбинаций плотностей произвольных весов $w \in \mathbb{R}$. В $\mathfrak{V}(M)$ есть единица 1 и естественное инвариантное скалярное умножение. Скалярное произведение задается формулой:

$$\langle \psi, \chi \rangle = \int_M \text{Res}(t^{-2} \psi(x, t) \chi(x, t)) D x.$$

Мы задаем элементы $\mathfrak{V}(M)$ производящими функциями $\psi(x, t)$, определенными на многообразии $\widehat{M}$. Можно классифицировать дифференцирования алгебры $\mathfrak{V}(M)$ [1]. Скобка веса 0 в $\mathfrak{V}(M)$ задается тензором $(\widehat{S}^{\tilde{a}\tilde{b}}) = \begin{pmatrix} S^{ab} & t\gamma^a \\ t\gamma^a & t^2\theta \end{pmatrix}$ на $\widehat{M}$, где S^{ab} задает скобку на M , γ^a задает ассоциированную с S^{ab} верхнюю связность в $\text{Vol } M$, а член θ есть геометрический объект второго порядка (зависящий от S^{ab} и γ^a), аналогичный полю Бранса–Дикке в теориях типа Калуцы–Клейна. Набор данных S^{ab}, γ^a, θ эквивалентен (неканонически) набору, состоящему из S^{ab} , векторного поля и скаляра. Операторы в алгебре $\mathfrak{V}(M)$ записываются как пучки операторов Δ_w , действующих на w -плотности. Пучок самосопряжен, если $(\Delta_w)^* = \Delta_{1-w}$. Дифференциальный оператор второго порядка в $\mathfrak{V}(M)$ представляется квадратичным пучком $\Delta_w = \Delta_0 + wA + w^2B$, где Δ_0 есть оператор второго порядка на функциях, а A и B имеют порядки ≤ 1 и 0.

ТЕОРЕМА 1. Для алгебры $\mathfrak{V}(M)$ существует взаимно однозначное соответствие между скобками и операторами второго порядка с условием самосопряженности. Скобке с матрицей $\widehat{S}^{ab}$ отвечает порождающий ее “канонический пучок”

$$\Delta_w = \frac{1}{2}(S^{ab}\partial_b\partial_a + (\partial_b S^{ba}(-1)^{\tilde{b}(\varepsilon+1)} + (2w-1)\gamma^a)\partial_a + w\partial_a\gamma^a(-1)^{\tilde{a}(\varepsilon+1)} + w(w-1)\theta).$$

Соответствующий оператор в алгебре $\mathfrak{V}(M)$ есть лапласиан, построенный по $\widehat{S}^{ab}$ и канонической дивергенции на $\widehat{M}$ [1]. Через оператор на w_0 -плотностях с данным “неособым” $w_0 \neq 0, \frac{1}{2}, 1$ проходит единственный канонический пучок. По оператору на функциях пучок восстанавливается с точностью до $w(w-1)f$, где f — скаляр.

Рассмотрим нечетные операторы. Им отвечают нечетные скобки. Заметим, что нечетная симметричная скобка сдвигом четности превращается в четную антисимметричную. Если Δ нечетен и $\text{ord } \Delta \leq 2$, то $\text{ord } \Delta^2 \leq 3$. Условие $\text{ord } \Delta^2 \leq 2$ равносильно тождеству Якоби для скобки, порожденной Δ . В этом случае $D = (S, -)$ есть дифференциал в $C^\infty(T^*M)$, а для верхней связности $\gamma = \gamma^a p_a$ имеет смысл понятие кривизны: $F = D\gamma$.

ТЕОРЕМА 2. Δ есть дифференцирование порожденной им скобки (равносильно $\text{ord } \Delta^2 \leq 1$) тогда и только тогда, когда $D\gamma = 0$.

Плоскость γ “поглощается” тождеством Якоби для скобки в $\mathfrak{V}(M)$:

ТЕОРЕМА 3. Тождество Якоби для нечетной скобки в $\mathfrak{V}(M)$ равносильно уравнениям $(S, S) = 0$, $(S, \gamma) = 0$, $(S, \theta) + (\gamma, \gamma) = 0$, $(\gamma, \theta) = 0$. (При этом $\Delta_w^2 = \mathcal{L}_X$ для некоторого $X \in \text{Vect}(M)$, автоматически пуассонова.)

СЛЕДСТВИЕ. Если нечетная скобка на M , заданная S^{ab} , невырождена, то тождество Якоби для скобки в $\mathfrak{V}(M)$ влечет $\gamma^a = S^{ab}\gamma_b$, $\theta = \gamma^a\gamma_a$, где $\gamma_a = -\partial_a \ln \rho$, и $\rho = e^{\mathcal{A}}$ есть локальная форма объема. Таким образом, Δ определяется скобкой на M и “эффективным действием” $\mathcal{A}$.

Условие $\Delta^2 = 0$ в нечетном симплектическом случае дает уравнение Баталина–Вилковского на действие $\mathcal{A}$. В общем нечетном пуассоновом случае “уравнения Баталина–Вилковского” пишутся по паре плоских связностей и обладают группоидным свойством. Они описывают изменение оператора Δ^2 на функциях или Δ на полуплотностях [1], [2].

Теория обобщается для операторов и скобок ненулевого веса. Интересно рассмотреть обобщение на случай операторов высшего порядка (где должны появляться гомотопические алгебры).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. M. Khudaverdian, Th. Voronov. On odd Laplace operators. II; math.DG/0212311.
- [2] H. M. Khudaverdian, Th. Voronov. On odd Laplace operators // Lett. Math. Phys. 2003 (to appear); math.DG/0205202.

University of Manchester Institute of Science
and Technology (UMIST), United Kingdom;
Yerevan State University, Armenia

E-mail: theodore.voronov@umist.ac.uk, khudian@umist.ac.uk

Принято редколлегией
20.11.2002