Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Даревская, О некоторых алгебраических свойствах обобщенных много-
членов Чебышёва, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 1, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm598>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 15:25:19

О НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕБЫШЁВА

Ю. В. ДАРЕВСКАЯ

В теории так называемых детских рисунков рассматриваются обобщенные многочлены Чебышёва (ОМЧ) [1]. По определению комплексный многочлен P называется *обобщенным многочленом Чебышёва*, если для некоторых c_+ и c_- прообраз отрезка $[c_-, c_+]$ является деревом [2]. Известно, что приведенное выше определение равносильно ряду чисто алгебраических условий, эквивалентных между собой [3]. Это дает возможность определить обобщенные многочлены Чебышёва над произвольными полями и кольцами. В настоящей заметке за определение обобщенного многочлена Чебышёва над алгебраически замкнутым полем примем следующее (о других эквивалентных определениях см., например, [3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть K – алгебраически замкнутое поле. Многочлен $P \in K[z]$, $\text{char } K \nmid \deg P$, называется *обобщенным многочленом Чебышёва над полем K* , если существуют $c_+, c_- \in K$ такие, что все критические значения многочлена P содержатся в множестве $\{c_+, c_-\}$. Под критическими значениями подразумевается множество $\text{critval } P = \{P(c) \mid P'(c) = 0\}$. Класс таких многочленов обозначается $\text{ОМЧ}(K)$.

В качестве естественного обобщения в случае целостного кольца примем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть R – целостное кольцо, k его поле частных, $\bar{k}$ – алгебраическое замыкание k . Тогда

$$\text{ОМЧ}(R) := \{P \mid P \in R[z] \cap \text{ОМЧ}(\bar{k}), \text{critval}(P) \in R\}.$$

Некоторые серии обобщенных многочленов Чебышёва обладают следующим свойством *лакунарности*: степени входящих в них одночленов образуют арифметическую прогрессию с разностью, большей единицы. Например, этим свойством обладают обычные многочлены Чебышёва. Оказывается, многочлен над полем K нулевой характеристики может лежать в $\text{ОМЧ}(K)$ лишь при некоторых ограничениях на разность этой прогрессии, о чем и говорится в первой части этой заметки.

Упомянутое понятие лакунарности многочлена можно описать более детально с помощью следующей леммы.

ЛЕММА. Пусть $P(z) \in R[z]$ – многочлен, R – кольцо, P представлен в виде

$$P(z) = z^r S(z^k), \tag{*}$$

где $S(z)$ – многочлен, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$, k – максимально возможное, $0 \leq r < k$. Тогда r есть остаток от деления $\deg P$ на k .

В соответствии с представлением (*) возможны следующие ситуации:

- 1а) $r = 0$, $k = 1$ – многочлен не является лакунарным;
- 1б) $r = 0$, $k \neq 1$ – многочлен является лакунарным (и, более того, является композиционно приводимым);
- 2) $r \neq 0$ – многочлен является лакунарным (возможно, при этом не являясь композиционно приводимым).

Ясно, что в случае $P \in K[z]$, где K – поле, любая из ситуаций 1а), 1б), 2) может реализовываться. Оказывается, что при дополнительном условии $P \in \text{ОМЧ}(K)$ это не так, а именно имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $P \in \text{ОМЧ}(K)$, K – поле, $\text{char } K = 0$, P представлен в виде (*). Тогда либо $r = 0$, либо k – четное и $r = k/2$.

Теорема не имеет места в поле F , $\text{char } F > 0$, что вытекает из следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть $P \in \mathbf{F}_p[z]$ имеет следующее представление (*): $P = z^r S(z^{sP})$, $r > 0$, $(r, p) = 1$. Тогда для любого $s \in \mathbb{N}$, $P \in \text{ОМЧ}(\mathbf{F}_p)$.

Доказательство теоремы 1 опирается на следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть K – поле, $\text{char } K = 0$, P – обобщенный многочлен Чебышёва, $P \in K[z]$. Тогда $P \in \text{ОМЧ}(L)$, где L – поле ($L : K$) ≤ 2 .

Оказывается, с представлением (*) также связано свойство коэффициентов многочлена $P \in \text{ОМЧ}(\mathbf{Z})$, представляющее интерес в связи с вопросом о принадлежности классу $\text{ОМЧ}(\mathbf{Z})$ многочлена, полученного из P аффинной заменой. В частности, следствие теоремы 2 показывает, что в случае $r = 0$ с помощью аффинной замены можно добиться того, чтобы коэффициенты многочлена, лежащего в $\text{ОМЧ}(\mathbf{Z})$, не содержали случайных общих множителей.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $P \in \text{ОМЧ}(\mathbf{Z})$, $\deg P = n$, $\text{critval } P = \{c_-; c_+\}$. Пусть также в представлении P в виде (*), $S(z) = z^l + a_1 z^{l-1} + \dots + a_{l-1} z + a_l$, $a, r = 0$, p – простое, $(\deg P, p) = 1$. Тогда если для любого i выполнено $p^i \mid a_i$, то $p^{n/k} \mid c_{\pm}$. В частности, в случае $k = 1$ если для любого i выполняется $p^i \mid a_i$, то $p^n \mid c_{\pm}$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть выполнены условия предыдущей теоремы. Пусть также $Q = 1/p^{n/k} P(pz)$. Тогда $Q \in \text{ОМЧ}(\mathbf{Z})$.

Теорема 2 доказывается с помощью следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть K – алгебраически замкнутое поле, $P \in \text{ОМЧ}(K)$, c_+ , c_- – критические значения P . Тогда множество корней многочлена $\text{Discr}(P - c)$ как многочлена от переменной c содержится в множестве $\{c_+, c_-\}$.

Автор выражает благодарность Г. Б. Шабату за постоянное внимание и множество полезных советов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. Shabat, A. Zvonkin // Contemp. Math. 1994. V. 178. P. 233–275. [2] A. Grothendieck // London Math. Soc. Lecture Note Ser. 1997. V. 242. P. 5–48; 243–283. [3] А. М. Вашевник // Функт. анализ и его прил. 2001. Т. 35. № 3. С. 77–79.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
20.11.2002