Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ю. Доманов, О циклических подпространствах оператора $(Vf)(x) = q(x) \int_0^x w(t)f(t) dt$, УМН, 2003, том 58, выпуск 1, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm599>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 18:23:35

О ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ ОПЕРАТОРА $(Vf)(x) = q(x) \int_0^x w(t)f(t) dt$

И. Ю. ДОМАНОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Подпространство E банахова пространства X называют циклическим подпространством для оператора $T \in [X]$, если $\text{span}\{T^n E : n \geq 0\} = X$. Вектор $f \in X$ называют циклическим вектором для оператора T , если $\text{span}\{T^n f : n \geq 0\} = X$. Множество всех циклических подпространств оператора T обозначают $\text{Сус } T$. Положим $\mu_T := \inf_E \{\dim E : E \in \text{Сус } T\}$. Число μ_T ($< \infty$) или ∞ называют спектральной кратностью оператора T в X . Оператор T называют циклическим в X , если $\mu_T = 1$.

Понятие спектральной кратности играет важную роль в теории управления [1]. Именно, пусть линейная динамическая система описывается уравнением $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $t \geq 0$, с операторами $A \in [X]$, $B = B \upharpoonright U$, $B \in [U, X]$, где X и U – B -пространства и $x(t) \in X$, $u(t) \in U$.

Известная теорема Калмана [1] утверждает, что эта система $A, B \upharpoonright U$ управляема (см. [1]) тогда и только тогда, когда $B \upharpoonright U \in \text{Сус } A$.

Хорошо известно [2], [3], что как оператор интегрирования J , так и его степени J^α ($\alpha > 0$),

$$J^\alpha : f(x) \rightarrow \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t) dt, \text{ являются одноклеточными и циклическими операторами}$$

в пространствах $L_p[0, 1]$ при $p \in [1, \infty)$. Более того, $f \in \text{Сус } J^\alpha$ точно тогда, когда

$$\int_0^\varepsilon |f(x)|^p dx > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (\Leftrightarrow 0 \in \text{supp } f). \quad (1)$$

М. М. Маламудом в [4], [5] проведен спектральный анализ оператора $A = J^\alpha \otimes B$, действующего в $L_p[0, 1] \otimes \mathbb{C}^n$ и являющегося тензорным произведением оператора J^α и произвольной невырожденной диагональной $(n \times n)$ -матрицы $B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. В частности, в [4], [5] описаны алгебры $\{A\}'$, $\{A\}''$, решетки $\text{Lat } A$ и $\text{HyLat } A$ инвариантных и гиперинвариантных подпространств оператора A , а также множество $\text{Сус } A$.

В работе [6] рассматривался оператор $V_{q,w} : f \rightarrow q(x) \int_0^x f(t)w(t) dt$ в пространстве $L_2[0, 1]$ над полем $\mathbb{R}$ в случае, когда функции $q(x)$, $w(x)$ положительны и непрерывны. При этих условиях на функции q и w в [6] доказано, что $\text{Сус } V_{q,w} = \text{Сус } J^\alpha$.

В настоящем сообщении мы описываем циклические подпространства $\text{Сус } V_{q,w}$ оператора $V_{q,w}$ и приводим необходимые и достаточные условия на вещественные функции $q(x) \in L_p[0, 1]$ и $w(x) \in L_q[0, 1]$, при которых оператор $V_{q,w}$ циклический. Отметим, что при $q(x) \in L_p[0, 1]$ и $w(x) \in L_q[0, 1]$ оператор $V_{q,w}$ будет компактным, а значит, вольтерровым в $L_p[0, 1]$.

Оказывается, что сужения оператора $V_{q,w}$ на некоторые его инвариантные подпространства квазиподобны операторам вида $A = J \otimes B$. Доказательства наших результатов используют методы, впервые примененные М. М. Маламудом в [4], [5] для изучения оператора $A = J^\alpha \otimes B$.

Как показано в следующей теореме, изучение циклических подпространств оператора $V_{q,w}$ можно свести к случаю $|q| \equiv 1$ и $w \equiv \text{const}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $R(x) := \int_0^x |q(s)w(s)| ds$, $R(1) = 1$, $R^{-1}(x)$ – функция, обратная к

$$R(x) \text{ (} R^{-1} \circ R = R \circ R^{-1} = x \text{), } r(x) := \text{sign}(qw)(R^{-1}(x)), (Yf)(x) = r(x) \int_0^{R^{-1}(x)} w(t)f(t) dt.$$

Тогда $E \in \text{Сус } V_{q,w}$, если и только если $\overline{Y E} \in \text{Сус } V_{r,1}$.

Поэтому впредь считаем, что $|q(x)| = 1$. Если функция q (или $-q$) эквивалентна функции

$$d_\pi(x) := \begin{cases} 1, & x \in [a_{2i}, a_{2i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, [\frac{n-1}{2}], \\ -1, & x \in [a_{2i-1}, a_{2i}], \quad i = 0, 1, \dots, [\frac{n}{2}], \end{cases} \quad (2)$$

где $\pi = \{0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = 1\}$ – некоторое разбиение отрезка $[0, 1]$, то $N(q) := n - 1$ назовем числом перемен знака функции q . В противном случае полагаем $N(q) := \infty$.

Для каждой функции $f \in L_p[0, 1]$ определим функции $\tilde{f}^i(x) := f(a_i - x) + f(a_i + x)$, $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Далее полагаем $f(x) = 0$ для $x \notin [0, 1]$. В частности, $\tilde{f}^0(x) = f(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [4], [5], [7]. Определитель функциональной матрицы $F(x) = (f_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ ($f_{ij} \in L_p[0, 1]$), подсчитанный по отношению к свертке: $(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t) dt = \int_0^x g(x-t)f(t) dt = (g * f)(x)$, называют $*$ -определителем и обозначают $*\text{-det } F(x)$. Аналогично $*$ -миноры $F(x)$ — это миноры, подсчитанные по отношению к свертке, и $*\text{-rank } F(x)$ — это максимальный ранг $*$ -миноров матрицы $F(x)$, удовлетворяющих условию (1).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $(Vf)(x) = q(x) \int_0^x f(t) dt$ с функцией $q(x)$ вида (2), $N(q) \geq 1$. Тогда:

- 1) $\mu_V = [N(q)/2] + 1$;
- 2) система $\{f_j\}_{j=1}^N$ векторов f_j порождает циклическое подпространство в $L_p[0, 1]$ для оператора V тогда и только тогда, когда $N \geq [N(q)/2] + 1$ и матрицы

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_1^0(x) & \dots & \tilde{f}_1^{2i}(x) & \dots & \tilde{f}_1^{2[(n-1)/2]}(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \tilde{f}_j^0(x) & \dots & \tilde{f}_j^{2i}(x) & \dots & \tilde{f}_j^{2[(n-1)/2]}(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \tilde{f}_N^0(x) & \dots & \tilde{f}_N^{2i}(x) & \dots & \tilde{f}_N^{2[(n-1)/2]}(x) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{f}_1^1(x) & \dots & \tilde{f}_1^{2i-1}(x) & \dots & \tilde{f}_1^{2[n/2]-1}(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \tilde{f}_j^1(x) & \dots & \tilde{f}_j^{2i-1}(x) & \dots & \tilde{f}_j^{2[n/2]-1}(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \tilde{f}_N^1(x) & \dots & \tilde{f}_N^{2i-1}(x) & \dots & \tilde{f}_N^{2[n/2]-1}(x) \end{pmatrix}$$

имеют максимальный $*$ -ранг.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть функции $f_j(x) \in L_p[0, 1]$ ($j \in \{1, \dots, n\}$) и непрерывны в окрестностях точек a_i ($i = \overline{1, n}$). Тогда $L := \text{span}\{f_j : 1 \leq j \leq n\} \in \text{Cyc } V_{q,1}$, если

$$\det \begin{pmatrix} f_1(0) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_{2[(n-1)/2]}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(0) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_{2[(n-1)/2]}) \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_3) & \dots & f_1(a_{2[n/2]-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_3) & \dots & f_n(a_{2[n/2]-1}) \end{pmatrix} \neq 0.$$

ТЕОРЕМА 6. Если $N(q) = \infty$, то $\mu_{V_{q,1}} = \infty$.

СЛЕДСТВИЕ 7. Оператор $V_{q,1}$ циклический точно тогда, когда $N(q) \leq 1$. При этом

- 1) если $q(x) \equiv 1$, то $V_{q,1} = J$ и $f(x) \in \text{Cyc } J \Leftrightarrow f(x)$ удовлетворяет условию (1);
- 2) если $q(x) = \chi_{[0,a]}(x) - \chi_{[a,1]}(x)$, то $f(x) \in \text{Cyc } V_{q,1}^k$ точно тогда, когда $f(x) * (f(a-x) + f(a+x))$ удовлетворяет условию (1).

В заключение я выражаю благодарность моему научному руководителю М. М. Маламуду за постоянное внимание и поддержку в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. M. Wonham. Linear Multivariable Control. Berlin: Springer-Verlag, 1974. [2] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М.: Наука, 1967. [3] Н. К. Никольский. Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980. [4] М. М. Маламуд // Докл. РАН. 1996. Т. 351. № 4. С. 143–146. [5] М. М. Malamud // Oper. Theory Adv. Appl. 1998. V. 102. P. 143–167. [6] J. H. Kang // Kyungpook Math. J. 1990. V. 30. P. 1–6. [7] М. С. Никольский // Труды МИАН. 1998. Т. 220. С. 210–216.