Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Игонин, Горизонтальные когомологии с коэффициентами и нелинейные представления нулевой кривизны, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 1, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm600>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 09:09:23

ГОРИЗОНТАЛЬНЫЕ КОГОМОЛОГИИ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

С. А. Игонин

Рассмотрим инволютивную систему дифференциальных уравнений

$$F_s(x_i, u^q, u_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}^q, \dots) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad q = 1, \dots, M, \quad s = 1, \dots, L, \quad (1)$$

задающую со своими дифференциальными следствиями подмногообразие $\mathcal{E}$ в соответствующем пространстве бесконечных джетов [1]–[3]. Практически все уравнения математической физики таковы. В теории солитонов [4] переопределенные системы вида

$$v_{x_i}^j = A_i^j(v^k, x_r, u^q, u_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}^q, \dots), \quad j = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

совместные в силу (1), играют важную роль. Если функции A_i^j линейны по v^k , то (2) задает *линейное представление нулевой кривизны* (ЛПНК) системы (1) в алгебре Ли $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$ [4], [5]. Нелинейные системы (2) часто порождают преобразования Бэклунда для (1) [4], [6].

В работах [5], [7] были введены гомологии, помогающие описать все ЛПНК в матричных алгебрах Ли для данной системы (1). Усилив результаты [3], мы определяем аналогичные гомологии для произвольных систем (2) и используем их для изучения структуры (2).

Для гладкого многообразия M обозначим через $D^p(M)$ модуль дифференцирований алгебры $C^\infty(M)$ со значениями в модуле p -форм и через $[\ast, \ast]: D^p(M) \times D^q(M) \rightarrow D^{p+q}(M)$ скобку Нийенхайса [1]. Тогда $D^0(M) = D(M)$ совпадает с алгеброй Ли векторных полей.

Геометрическая интерпретация (2) такова [1], [6]. Полные производные $D_{x_i} \in D(\mathcal{E})$ порождают *распределение Кармана* $\mathcal{C} \subset D(\mathcal{E})$. Структура *накрытия* в тривиальном расслоении $\pi: \mathcal{E} \times W \rightarrow \mathcal{E}$, $\dim W < \infty$, задается таким распределением $\mathcal{D} \subset D(\mathcal{E} \times W)$, что $[\mathcal{D}, \mathcal{D}] \subset \mathcal{D}$ и $\pi_\ast|_{\mathcal{D}}$ – изоморфизм на $\mathcal{C}$. Два накрытия $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset D(\mathcal{E} \times W)$, связанные соотношением $\mathcal{D}_1 = G_\ast \mathcal{D}_2$, где $G: \mathcal{E} \times W \rightarrow \mathcal{E} \times W$ – послойный диффеоморфизм, называются *эквивалентными*. Накрытия, эквивалентные $\mathcal{D} = \nabla(\mathcal{C})$, где ∇ – тривиальная связность в π , называются *тривиальными*. Для $X \in \mathcal{C}$ обозначим через $\tilde{X}$ такое векторное поле из $\mathcal{D}$, что $\pi_\ast(\tilde{X}) = X$.

Распределение $\mathcal{D}$ порождено полями $\tilde{D}_{x_i}$. Система (2) определяет накрытие $\pi: \mathcal{E} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{E}$, $\tilde{D}_{x_i} = D_{x_i} + \sum_j A_i^j \partial_{v^j}$, и всякое накрытие локально имеет такой вид. Эквивалентные накрытия получаются заменой переменных $\tilde{x}_i = x_i$, $\tilde{u}^q = u^q$, $\tilde{v}^j = f^j(v^k, x_r, u^q, \dots)$ в (2). Накрытие (2) тривиально, если такой заменой его можно привести к виду $\tilde{v}_{x_i}^j = 0$.

Положим $\mathcal{F} = C^\infty(\mathcal{E})$, $\tilde{\mathcal{F}} = C^\infty(\mathcal{E} \times W)$. Рассмотрим подмодуль $D_v^{p,q} \subset D^{p+q}(\mathcal{E} \times W)$ π -вертикальных дифференцирований со значениями в $\tilde{\mathcal{F}}$ -подмодуле, порожденном формами $\pi^\ast(\mathcal{C}^p \Lambda \otimes_{\mathcal{F}} \Lambda_h^q)$, где $\mathcal{C}^p \Lambda$ и Λ_h^q – модули картановских и горизонтальных форм на $\mathcal{E}$ [1]. Элемент $\tilde{d}_h = \sum_i dx_i \tilde{D}_{x_i} \in D^1(\mathcal{E} \times W)$ удовлетворяет $[\tilde{d}_h, \tilde{d}_h] = 0$ и задает комплекс

$$D_v^{p,0} \xrightarrow{\partial_{\mathcal{D}}} D_v^{p,1} \xrightarrow{\partial_{\mathcal{D}}} D_v^{p,2} \xrightarrow{\partial_{\mathcal{D}}} \dots, \quad \partial_{\mathcal{D}}(w) = [\tilde{d}_h, w]. \quad (3)$$

Будем рассматривать пространство $D_v \subset D(\mathcal{E} \times W)$ π -вертикальных векторных полей как (бесконечномерный) модуль над $\mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{F}}$. Тогда это $\mathcal{C}$ -модуль [1], [3] с действием $X(Y) = [\tilde{X}, Y]$, $X \in \mathcal{C}$, $Y \in D_v$, алгебры Ли $\mathcal{C}$. Имеем $D_v^{p,q} \cong D_v \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{C}^p \Lambda \otimes_{\mathcal{F}} \Lambda_h^q$ и комплекс (3) изоморфен горизонтальному комплексу де Рама на $\mathcal{E}$ с коэффициентами в $D_v \otimes \mathcal{C}^p \Lambda$.

Горизонтальные когомологии с коэффициентами в *проективном* $\mathcal{C}$ -модуле Q изучались в [1], [3]. Однако проективность там используется только чтобы показать, что точность строк некоторого бикомплекса сохраняется после тензорного умножения на Q . Но эти строки являются точными последовательностями векторных расслоений над $\mathcal{E}$, поэтому они расщепляются и остаются точными после умножения на любой модуль Q . Справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Когомологические изоморфизмы из [3] верны для любых $\mathcal{C}$ -модулей Q . В частности, i -я группа когомологий горизонтального комплекса де Рама на $\mathcal{E}$ с коэффициентами в $Q \otimes \mathcal{C}^1 \Lambda$ изоморфна $(N - i)$ -й группе гомологий комплекса $\hat{P}_\ast \otimes Q$, где*

$\widehat{P}_*$ – сопряженный комплекс для комплекса совместности (комплекса Жане) системы (1) [1]–[3].

Длина $k_{\mathcal{E}}$ комплекса совместности отражает степень переопределенности системы (1), для непереопределенных невырожденных систем имеем $k_{\mathcal{E}} = 2$. Рассмотрим поднятия $d_h, d_{\mathcal{E}} \in D^1(\mathcal{E} \times W)$ с помощью ∇ горизонтального и картановского дифференциалов с $\mathcal{E}$. Из $[d_h, \tilde{d}_h] = [d_{\mathcal{E}}, d_h] = 0$ имеем $\partial_{\mathcal{D}}([d_{\mathcal{E}}, \tilde{d}_h - d_h]) = 0$. Аналогично [5; раздел 4] верна

ТЕОРЕМА 2. Пусть $k_{\mathcal{E}} \leq N$. Структура накрытия $\mathcal{D}$ в конечномерном расслоении $\mathcal{E} \times W \rightarrow \mathcal{E}$ локально тривиальна тогда и только тогда, когда образ $\chi_{\mathcal{D}} \in H_{N-1}(\widehat{P}_* \otimes D_v)$ класса $[d_{\mathcal{E}}, \tilde{d}_h - d_h] \in H^1(D_v^{1,*})$ при изоморфизме теоремы 1 равен нулю.

Если $k_{\mathcal{E}} < N$, то $H_{N-1}(\widehat{P}_* \otimes D_v) = 0$, поэтому получаем

СЛЕДСТВИЕ. При $k_{\mathcal{E}} < N$ все накрытия над $\mathcal{E}$ локально тривиальны. В частности, для непереопределенных уравнений (1) при $N > 2$ все системы (2) тривиальны.

Выпишем формулы для $\chi_{\mathcal{D}}$ при $N = k_{\mathcal{E}} = 2$, обобщающие формулы [7; раздел 3] для ЛПНК. Обозначим $A_i = \sum_j A_i^j \partial_{v_j}$. Совместность (2) в силу (1) равносильна тождеству в пространстве джетов $[D_{x_1} + A_1, D_{x_2} + A_2] = \sum_{p,q,s} D_{x_1}^p D_{x_2}^q (F_s) \cdot g_{pq}^s$ для некоторых векторных полей $g_{pq}^s = \sum_j g_{pq}^{sj} (v^k, x_i, u^r, \dots) \partial_{v_j}$. Класс $\chi_{\mathcal{D}}$ задается набором векторных полей из D_v :

$$\chi_{\mathcal{D}}^s = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \widehat{D}_{x_1}^p \widehat{D}_{x_2}^q (g_{pq}^s|_{\mathcal{E} \times W}), \quad s = 1, \dots, L, \quad \widehat{D}_{x_i}(g) = D_{x_i}(g) + [A_i, g] \quad \forall g \in D_v.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $N = k_{\mathcal{E}} = 2$. При переходе к эквивалентному накрытию $\mathcal{D}' = G_* \mathcal{D}$ векторные поля $\chi_{\mathcal{D}}^s$ в отличие от A_i преобразуются как тензоры $\chi_{\mathcal{D}'}^s = G_*(\chi_{\mathcal{D}}^s)$. Условие, что $\chi_{\mathcal{D}}$ является 1-циклом комплекса $\widehat{P}_* \otimes D_v$, имеет вид

$$\sum_{s,p,q} (-1)^{p+q} \widehat{D}_{x_1}^p \widehat{D}_{x_2}^q \left(\frac{\partial F_s}{\partial u_{p,q}^r} \chi_{\mathcal{D}}^s \right) = 0, \quad r = 1, \dots, M, \quad \text{где} \quad u_{p,q}^r = \frac{\partial^{p+q} u^r}{\partial x_1^p \partial x_2^q}. \quad (4)$$

Уравнения (4) в дополнение к $[D_{x_1} + A_1, D_{x_2} + A_2]|_{\mathcal{E}} = 0$ помогают описывать накрытия. Например, для накрытия $v_x^j = A_1^j, v_t^j = A_2^j$ над эволюционной системой $u_t^s = f_s(x, t, u^a, u_n^a, \dots)$, где $u_n^a = \partial u^a / \partial x^n$, имеем $\chi_{\mathcal{D}}^s = \sum_n (-1)^n \widehat{D}_{x_n}^n (\partial_{u_n^s} A_1)$. Из условия (4) следует

ТЕОРЕМА 4. Для эволюционного уравнения $u_t = f(x, t, u, u_n, \dots)$ четного порядка существует такое $O \in \mathbb{N}$, что любое накрытие эквивалентно накрытию с $\partial A_i^j / \partial u_n = 0 \quad \forall n \geq O$. Для нелокального закона сохранения $\tilde{D}_t(\varphi) = \tilde{D}_x(\psi)$ этого уравнения существует эквивалентный $\varphi' = \varphi + \tilde{D}_x(\rho), \psi' = \psi + \tilde{D}_t(\rho)$ с $\partial \varphi' / \partial u_n = \partial \psi' / \partial u_n = 0 \quad \forall n \geq O$.

Для локальных законов сохранения $D_t(\varphi) = D_x(\psi)$ это утверждение хорошо известно. Автор благодарит А. М. Вербовещкого и И. С. Красильщика за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Krasil'shchik, A. Verbovetsky // e-print math.DG/9808130. [2] Т. Tsujishita // Differential Geom. Appl. 1991. V. 1. № 1. P. 3–34. [3] A. Verbovetsky // Contemp. Math. 1998. V. 219. P. 211–231; e-print math.DG/9803115. [4] А. Ньюэлл. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989. [5] M. Marvan // Proceedings of the Fifth International Conference on Differential Geometry and Its Applications, Opava, Czech Republic, Part II, 1992. P. 103–122; www.emis.de/proceedings/5ICDGA/. [6] I. S. Krasil'shchik, A. M. Vinogradov // Acta Appl. Math. 1989. V. 15. № 1–2. P. 161–209. [7] M. Marvan // Proceedings of the International Conference on Secondary Calculus and Cohomological Physics, Moscow, 1997; www.emis.de/proceedings/SCCP97/.