Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ке, М. А. Чеботарь, О биаддитивных отображениях некоторых алгебр Ли,
УМН, 2003, том 58, выпуск 1, 187–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm601>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 14:37:47

О БИАДДИТИВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ АЛГЕБР ЛИ

В.-Ф. КЕ, М. А. ЧЕБОТАРЬ

Биаддитивные отображения первичных колец f , удовлетворяющие тождеству $[f(x, x), x] = 0$, были описаны Брешаром в работе [1]. Этот результат имеет многочисленные приложения (см. [2]). В частности, он сыграл ключевую роль в решении известной проблемы Херстейна [1]. Нетрудно заметить, что Брешар описал симметрические биаддитивные отображения первичных колец f , удовлетворяющие тождеству $[f(u, v), w] = f([u, w], v) + f(u, [v, w])$. В этой работе мы рассмотрим произвольные биаддитивные отображения некоторых алгебр Ли, удовлетворяющие этому условию.

Мы будем использовать понятия максимального правого кольца частных и расширенного центроида Мартиндейла, с которыми можно ознакомиться в книге [3].

ТЕОРЕМА 1. Пусть R – первичное кольцо, Q – максимальное правое кольцо частных кольца R и C – расширенный центроид Мартиндейла. Пусть L – алгебра Ли, и пусть $f: L^2 \rightarrow Q$ – биаддитивное отображение, удовлетворяющее тождеству

$$[f(u, v), w] = f([u, w], v) + f(u, [v, w]) \quad \text{для всех } u, v, w \in L.$$

Предположим, что выполнено одно из условий:

- (1) $L = R$ и L содержит алгебраический элемент степени ≥ 4 над C ;
- (2) L – нецентральный левый идеал кольца R и L содержит алгебраический элемент степени ≥ 5 над C ;
- (3) R – кольцо с инволюцией, L – алгебра Ли кососимметрических элементов и L содержит алгебраический элемент степени ≥ 10 над C ;
- (4) R – кольцо с инволюцией, L – левый идеал алгебры Ли кососимметрических элементов и L содержит алгебраический элемент степени ≥ 11 над C .

Тогда существуют $\lambda_1, \lambda_2 \in C$, аддитивные отображения $\mu_1: L \rightarrow C$, $\mu_2: L \rightarrow C$ и биаддитивное отображение $\nu: L^2 \rightarrow C$ такие, что

$$f(u, v) = \lambda_1 uv + \lambda_2 vu + \mu_1(u)v + \mu_2(v)u + \nu(u, v)$$

для всех $u, v \in L$. Более того,

$$\mu_1([L, L]) = \mu_2([L, L]) = 0 \quad \text{и} \quad \nu([u, w], v) + \nu(u, [v, w]) = 0$$

для всех $u, v, w \in L$.

Доказательство следующей теоремы опирается на результаты, использующие понятие d -свободных подмножеств (см. [4], [5]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть F – коммутативное кольцо с 1, Q – F -алгебра с 1 и центром C . Пусть L – 4-свободная левая подалгебра алгебры Q , и пусть $f: L^2 \rightarrow Q$ – биаддитивное отображение, удовлетворяющее тождеству

$$[f(u, v), w] = f([u, w], v) + f(u, [v, w]) \quad \text{для всех } u, v, w \in L. \quad (1)$$

Тогда существуют $\lambda_1, \lambda_2 \in C$, аддитивные отображения $\mu_1: L \rightarrow C$, $\mu_2: L \rightarrow C$ и биаддитивное отображение $\nu: L^2 \rightarrow C$ такие, что

$$f(u, v) = \lambda_1 uv + \lambda_2 vu + \mu_1(u)v + \mu_2(v)u + \nu(u, v)$$

для всех $u, v \in L$. Более того,

$$\mu_1([L, L]) = \mu_2([L, L]) = 0 \quad \text{и} \quad \nu([u, w], v) + \nu(u, [v, w]) = 0$$

для всех $u, v, w \in L$.

Доказательство. Пусть $p: L^3 \rightarrow Q$ задано по правилу

$$p(u, v, w) = [f(u, v), w] + [f(v, w), u] + [f(w, u), v] \text{ для всех } u, v, w \in L. \quad (2)$$

Используя тождество Якоби, мы имеем

$$[p(x_1, x_2, x_3), x_4] - [p(x_2, x_3, x_4), x_1] + [p(x_3, x_4, x_1), x_2] - [p(x_4, x_1, x_2), x_3] = 0$$

для всех $x_i \in L$, $1 \leq i \leq 4$. Ввиду теоремы 1.2 из [5], p — это полиаддитивный квазиполином степени ≤ 3 . Применяя снова теорему 1.2 из [5] к тождеству (2), мы заключаем, что f — это полиаддитивный квазиполином степени ≤ 2 , т.е.

$$f(u, v) = \lambda_1 uv + \lambda_2 vu + \mu_1(u)v + \mu_2(v)u + \nu(u, v) \text{ при всех } u, v \in L$$

для некоторых $\lambda_1, \lambda_2 \in C$, аддитивных отображений $\mu_1: L \rightarrow C$, $\mu_2: L \rightarrow C$ и биаддитивного отображения $\nu: L^2 \rightarrow C$. Согласно (1)

$$\begin{aligned} & [\lambda_1 uv + \lambda_2 vu + \mu_1(u)v + \mu_2(v)u + \nu(u, v), w] \\ &= \lambda_1[u, w]v + \lambda_2 v[u, w] + \mu_1([u, w])v + \mu_2(v)[u, w] + \nu([u, w], v) \\ & \quad + \lambda_1 u[v, w] + \lambda_2 [v, w]u + \mu_1(u)[v, w] + \mu_2([v, w])u + \nu(u, [v, w]). \end{aligned}$$

Используя теорему 1.1 из [5], мы получаем

$$\mu_1([u, w]) = \mu_2([v, w]) = 0 \text{ и } \mu_2([u, w], v) + \mu_2(u, [v, w]) = 0$$

для всех $u, v, w \in L$. Доказательство завершено.

Теорема 1 является следствием теоремы 2, теорем 2.4 и 2.20 из [4] и теоремы 1.1 из [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Brešar // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 335. №2. P. 525–546. [2] M. Brešar // Contemp. Math. 2000. V. 259. P. 93–109. [3] K. I. Beidar, W. S. Martindale, A. V. Mikhaev. Rings with Generalized Identities. New York: Dekker, 1996. [4] K. I. Beidar, M. A. Chebotar // Comm. Algebra. 2000. V. 28. №8. P. 3925–3951. [5] K. I. Beidar, M. A. Chebotar // Comm. Algebra. 2000. V. 28. №8. P. 3953–3972. [6] K. I. Beidar, M. Brešar, M. A. Chebotar, W. S. Martindale // Comm. Algebra. 2000. V. 28. №7. P. 3169–3183.

Университет им. Чен Гуна, Тайнань;
Тульский государственный университет
E-mail: wfke@mail.ncku.edu.tw, mchebotar@tula.net

Принято редколлегией
20.11.2002