Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Пастухов, Об H -волатильности в финансовой математике, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 1, 191–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm603>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:27:16

ОБ H -ВОЛАТИЛЬНОСТИ В ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ

С. В. ПАСТУХОВ

1. В работе [1] применялась теория кусочно-монотонных аппроксимаций при построении краткосрочного прогноза цен. В данной работе для определения волатильности, базового понятия в финансовой математике, предлагается новый подход, основанный на использовании указанного математического аппарата. Возникающая при этом для произвольного $H > 0$ так называемая H -волатильность обладает следующими замечательными свойствами. Для винеровского процесса она ведет себя в определенном смысле, как функция $2H$. Статистический анализ данных финансового рынка также обнаруживает линейность H -волатильности, т.е. ее оценка есть величина $\approx CH$, где константа C зависит только от вида финансового инструмента, при этом $C \approx 2$. Отметим также, что в отличие от других известных подходов к определению волатильности, здесь используются непосредственно цены того или иного актива, а не их логарифмы, что обеспечивает понятию H -волатильности большую наглядность.

2. Скажем, что непрерывная на $[0, T]$ функция $f(t)$ является *кусочно-монотонной* и имеет порядок $n = 1, 2, \dots$, если $\exists (t_0, \dots, t_n): 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ и f монотонна на каждом интервале $\Delta_i = [t_{i-1}, t_i]$ для $i = 1, \dots, n$ и не является такой на каждой паре соседних отрезков Δ_i . Множество таких функций будем обозначать через Σ_n .

Для функции $F(t)_{t \in [0, T]}$ при данном натуральном n будем рассматривать ее наилучшее приближение элементами семейства Σ_n , которое определяется соотношением

$$M_n(F) = \inf_{f \in \Sigma_n} \sup_{t \in [0, T]} |F(t) - f(t)|.$$

В работе [2] был предложен алгоритм вычисления величин $M_n(F)$ и нахождения элементов наилучшего приближения $f \in \Sigma_n$, $n = 1, 2, \dots$, для произвольной непрерывной на $[0, T]$ функции F . Для наших целей для произвольного $H > 0$ потребуются функция, в определенном смысле обратная к $M_n(F)$:

$$N_T(H, F) = \min \left\{ n = 1, 2, \dots : M_n(F) < \frac{H}{2} \right\}. \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Величину (1) назовем H -инверсией $F(t)_{0 \leq t \leq T}$.

Знание H -инверсии позволяет ответить на вопрос: сколько раз на интервале $[0, T]$ меняется направление изменения функции F , если пренебрегать изменениями на величину, меньшую H ? Также нам понадобится функция

$$V_T(H, F) = \sup \sum_{k=1}^K |F(t_k) - F(t_{k-1})|,$$

где $\sup$ берется по всем конечным разбиениям $(t_0, t_1, \dots, t_K)$ таким, что $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_K = T$ и $|F(t_k) - F(t_{k-1})| \geq H$, $k = 1, \dots, K$. Функцию $V_T(H, F)$ принято называть H -вариацией функции F на интервале $[0, T]$. Если $\max_{[0, T]} F - \min_{[0, T]} F < H$, то полагаем $V_T(H, F) = 0$.

Пусть на некотором стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ задан процесс $(S_t)_{t \geq 0}$ с непрерывными траекториями и задано число $H > 0$. По аналогии с Δ -волатильностью (см. [3; с. 419]) введем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем H -волатильностью процесса $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ величину

$$\nu_T(H, S) = \frac{V_T(H, S)}{N_T(H, S)}. \quad (2)$$

3. Для подсчета H -волатильности удобнее использовать следующую методику. Рассмотрим непрерывную на $[0, T]$ функцию F . Здесь и в дальнейшем будем предполагать, что $\max_{[0, T]} F - \min_{[0, T]} F \geq H$. Определим индуктивно последовательность $(\tau_0^*, \tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$ для некоторого $\tilde{N} = \tilde{N}_T(H, F)$.

База индукции: $\tau_0 = \inf\{u \in [0, T] : \max_{[0, u]} F - \min_{[0, u]} F = H\}$,

$$\tau_0^* = \begin{cases} \arg \min_{[0, \tau_0]} F, & \text{если } F(\tau_0) = \max_{[0, \tau_0]} F, \\ \arg \max_{[0, \tau_0]} F, & \text{если } F(\tau_0) = \min_{[0, \tau_0]} F. \end{cases}$$

Шаг индукции, $n \rightarrow n+1$:

$$\begin{aligned} \tau_{n+1} &= \begin{cases} \inf\{u \in [\tau_n, T] : \max_{[\tau_n, u]} F - F(u) = H\}, & \text{если } F(\tau_n) - F(\tau_n^*) = H, \\ \inf\{u \in [\tau_n, T] : F(u) - \min_{[\tau_n, u]} F = H\}, & \text{если } F(\tau_n) - F(\tau_n^*) = -H, \end{cases} \\ \tau_{n+1}^* &= \begin{cases} \arg \max_{[\tau_n, \tau_{n+1}]} F, & \text{если } F(\tau_n) - F(\tau_n^*) = H, \\ \arg \min_{[\tau_n, \tau_{n+1}]} F, & \text{если } F(\tau_n) - F(\tau_n^*) = -H. \end{cases} \end{aligned}$$

Для некоторого n^* мы остановимся, т.е. τ_{n^*+1} не существует. Положим тогда

$$\tau_{n^*+1}^* = \begin{cases} \arg \max_{[\tau_{n^*}^*, T]} F, & \text{если } F(\tau_{n^*}) - F(\tau_{n^*}^*) = H, \\ \arg \min_{[\tau_{n^*}^*, T]} F, & \text{если } F(\tau_{n^*}) - F(\tau_{n^*}^*) = -H. \end{cases}$$

Обозначим $\tilde{N}_T(H, F) = n^* + 1$, а также $\tilde{V}_T(H, F) = \sum_{n=1}^{\tilde{N}_T(H, F)} |F(\tau_n^*) - F(\tau_{n-1}^*)|$.

Заметим, что последовательность $(\tau_0^*, \tau_1^*, \dots, \tau_{\tilde{N}}^*)$, вообще говоря, неединственна, но величины $\tilde{N}_T(H, F)$, $\tilde{V}_T(H, F)$ определены корректно в силу следующих лемм.

ЛЕММА 1. $\tilde{N}_T(H, F) = N_T(H, F)$.

ЛЕММА 2. $\tilde{V}_T(H, F) = V_T(H, F)$.

ТЕОРЕМА. $\lim_{T \rightarrow +\infty} \nu_T(H, W) = 2H$ (п.н.), где W_t – стандартный винеровский процесс.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно заметить, что данная теорема есть в определенном смысле проявление мартингалности W_t . Иными словами, если известно, что от экстремума $W_{\tau_n^*}$ винеровский процесс вырос (упал) на величину $H > 0$, то в среднем он еще вырастет (упадет) на H , если пренебрегать изменениями на величину $< H$. Отметим также, что $\forall \sigma > 0 \quad \nu_T(H, \sigma W) \rightarrow 2H$ (п.н.).

Следующая лемма дает представление об H -инверсии винеровского процесса.

ЛЕММА 3. $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{T}{N_T(H, W)} = H^2$ (п.н.), где W_t – стандартный винеровский процесс.

4. Статистический анализ данных финансового рынка также обнаруживает линейную зависимость $\nu_T(H, S)$ от H , т.е. оценка H -волатильности $\hat{\nu}_T(H, S) \approx CH$, где константа $C = C(S)$ зависит только от вида финансового актива S , при этом в большинстве своем $C \approx 2$. Например, если актив S_1 – акция РАО ЕЭС, а S_2 – фьючерс на индекс SP500, то $C(S_1) \approx 2.01$, $C(S_2) \approx 1.92$. Для анализа использовались внутрисдневные цены сделок указанных активов за год, а константа C оценивалась по методу наименьших квадратов. Отметим также, что квадратичное отклонение $\hat{\nu}_T(H, S)$ от линейной функции $C(S)H$ крайне незначительно. Если обозначить $D(S) = \sum_H \left(\frac{\hat{\nu}_T(H, S)}{H} - C(S) \right)^2$, то $D(S_1) = 0.01$, $D(S_2) = 0.01$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. С. Кашин, С. В. Пастухов // Докл. РАН. 2002. Т. 387. № 6. С. 754–756.
[2] Е. А. Севастьянов // Anal. Math. 1975. Т. 1. С. 141–164. [3] А. Н. Ширяев. Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998.

Принято редколлегией
20.11.2002