Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Пионтковский, О дифференциально градуированных алгебрах Ли, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 1, 193–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm604>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 18:23:22

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО ГРАДУИРОВАННЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

Д. И. Пионтковский

Предположим, что к градуированной или дифференциально градуированной (д.г.) алгебре Ли¹ присоединяется несколько свободных переменных и дифференцирование продолжается на всю получившуюся алгебру. В этой заметке изучается вопрос о том, как связаны алгебры гомологий этих двух д.г. алгебр. Такая ситуация возникает, например, при построении минимальной модели Квиллена в рациональной теории гомотопий. Здесь рассматривается (главным образом) случай, когда исходная алгебра – обычная градуированная, т.е. д.г. с нулевым дифференциалом.

Аналогичная “ассоциативная” конструкция, когда к ассоциативной (дифференциально) градуированной алгебре присоединяется свободное множество переменных, изучалась И. Р. Шафаревичем, Е. С. Голодом и другими [1]–[5] и носит название *комплекса Шафаревича*. Здесь результаты о комплексах Шафаревича ассоциативных д.г. алгебр (полученные, в основном, Е. С. Голодом) переносятся на случай д.г. алгебр Ли. Ссылка в фигурных скобках после каждого утверждения указывает на источник его “ассоциативной” версии. Доказательства, за исключением нескольких тонких моментов, основываются на применении функтора универсальной обертывающей или на почти буквальном воспроизведении “ассоциативных” рассуждений и здесь не приводятся.

Зафиксируем основное поле k нулевой характеристики. Если x – однородный элемент д.г. векторного пространства (алгебры, модуля), то через $\tilde{x}$ обозначим свободную переменную той же основной степени и на единицу большей гомологической степени; для множества $X = \{x_i\}$ таких элементов положим $\tilde{X} = \{\tilde{x}_i\}$. Через $\mathbb{L}(X)$ (соответственно $T(\tilde{X})$) обозначается свободная лиева (ассоциативная) супералгебра, порожденная $\tilde{X}$, а для лиевой или ассоциативной алгебры A через $A\langle\tilde{X}\rangle$ обозначается свободное (прямое) произведение $A * \mathbb{L}(\tilde{X})$ (соответственно $A * T(\tilde{X})$). *Комплексом Шафаревича* лиевой или ассоциативной д.г. алгебры A по однородному подмножеству ее циклов $X \subset A$ называется алгебра $A\langle\tilde{X}\rangle$ с дифференцированием, продолжающим дифференцирование алгебры A по правилу $d\tilde{x}_i = x_i$. Такой комплекс обозначается как $\text{Sh}(X, A)$, а его алгебра гомологий – как $H(X, A)$. Это определение является частным случаем конструкции комплекса Шафаревича для произвольного многообразия алгебр [6]. В частности, для любой д.г. алгебры Ли L справедливы изоморфизмы $U\text{Sh}(X, L) = \text{Sh}(X, UL)$ и $UH(X, L) = H(X, UL)$.

Пусть A – градуированная ассоциативная или лиева (супер)алгебра, $f \in A$ – подмножество однородных элементов. f называется *сильно свободным* или *инертным*, если комплекс $\text{Sh}(f, A)$ ацикличесок в положительных степенях. Если I – идеал, порожденный f , $\text{gr } A$ – ассоциированная градуированная алгебра к I -адической фильтрации на A , то инертные множества характеризуются также тем, что естественная сюръекция $\chi: (A/I)\langle f \rangle \rightarrow \text{gr } A$ является изоморфизмом [2], [7].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [3]. Пусть $f: A \rightarrow B$ – морфизм д.г. алгебр Ли, $x \subset ZB$. Если f индуцирует изоморфизм $HA \rightarrow H(x, B)$, то отображение $\rho: HA\langle x \rangle \rightarrow HB$, продолжающее f_* : $HA \rightarrow HB$, – тоже изоморфизм.

Пусть идеал J в градуированной алгебре Ли A минимально порожден множеством $y = \{y_\alpha\}$, $B = A/J$, причем y лежит в идеале I , порожденном множеством x элементов положительной степени, $\bar{x}$ – образ множества x в B . Тогда существует отображение $\rho: H(x, A)\langle \bar{y} \rangle \rightarrow H(\bar{x}, B)$, инду-

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00468).

¹ Дифференциально градуированной здесь называется биградуированная дифференциальная алгебра с двумя градуировками (возможно, вырожденными): гомологической $\mathbb{Z}_+$ -градуировкой, которая при действии дифференциала понижается на единицу и задает четность элементов, и основной односвязной $\mathbb{Z}_+$ -градуировкой такой, что все биградуированные компоненты имеют конечную размерность.

цированное на $H(x, A)$ естественным отображением $f: A \rightarrow B$ и отправляющее каждый элемент $\tilde{y}_\alpha$ в элемент $(\text{Sh } f)(z_\alpha)$, где $z_\alpha \in \text{Sh}_1(x, A)$ – какой-нибудь прообраз элемента y_α при дифференцировании. Кроме того, можно рассмотреть отображение $\tau: \text{Sh}(x, A) \rightarrow \text{Sh}(z, \text{Sh}(\bar{x}, B))$ – композицию морфизма $\text{Sh } f$ и вложения $\text{Sh}(\bar{x}, B) \rightarrow \text{Sh}(z, \text{Sh}(\bar{x}, B))$.

ТЕОРЕМА 2 {[3]}. Следующие условия эквивалентны:

- 1) множество y инертно в A ;
- 2) отображение τ индуцирует изоморфизм в гомологиях;
- 3) отображение ρ биективно;
- 4) отображение ρ инъективно на элементах гомологической степени 1 и сюръективно на элементах гомологической степени 2.

Назовем *полным пересечением* факторалгебру свободной алгебры Ли по идеалу, порожденному инертным множеством (т.е. градуированную алгебру Ли, универсальная обертывающая которой имеет глобальную размерность два).

СЛЕДСТВИЕ 3 {[3]}. Пусть L – градуированная алгебра Ли, порожденная множеством x элементов положительной степени. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) L – полное пересечение;
- 2) $H(x, L) \simeq L(H_1(x, L))$;
- 3) $H(z, \text{Sh}(x, L)) = 0$, где z – множество циклов в $\text{Sh}_1(x, L)$, чей образ составляет базис пространства $H_1(x, L)$;
- 4) $H_2(x, L) = [H_1(x, L), H_1(x, L)]$.

Пусть теперь L – факторалгебра свободной алгебры Ли $A = L\langle x \rangle$ по однородному идеалу I , порожденному множеством f . Пусть ϕ – минимальное порождающее множество ядра сюръекции $\chi: L\langle f \rangle \rightarrow \text{gr } A$ (как идеала в $L\langle f \rangle$). Если f инертно, то комплекс $\text{Sh}(f, A)$ ациклическ в положительных степенях, т.е. $H(f, A) = L$, и ϕ пусто. В общем случае имеет место

ТЕОРЕМА 4. а) Алгебра $H(f, A)$ порождается алгеброй $L = H_0(f, A)$ и L -подмодулем $H_1(f, A)$ {[4]}.

б) L -модуль $H_1(f, A)$ минимальным образом порождается образом $\bar{\phi}$ множества ϕ в $H(f, A)$, причем векторное пространство порождающих $k\bar{\phi}$ изоморфно $\text{Tor}_3^{UL}(k, k)$ {[5]}.

Для инертного множества f алгебра $H(f, A)$ минимальная из возможных. Ниже описывается “максимальный” случай.

СЛЕДСТВИЕ 5 {[5]}. Предположим, что множество f не является инертным. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $H(f, A) \simeq L\langle \phi \rangle$;
- 2) глобальная размерность универсальной обертывающей $U(L)$ равна 3;
- 3) множество $\phi \subset L\langle f \rangle$ инертно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. С. Голод, И. Р. Шафаревич // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. № 2. С. 261–272. [2] D. Anick // J. Algebra. 1982. V. 78. P. 120–140. [3] Е. С. Голод // Фундам. прикл. матем. 1999. Т. 5. № 1. С. 85–95. [4] Е. С. Голод // Фундам. прикл. матем. 1999. Т. 5. № 1. С. 97–100. [5] Д. И. Пионтковский // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 3. С. 139–152. [6] Д. И. Пионтковский // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 11. С. 103–120. [7] S. Halperin, J.-M. Lemaire // Math. Scand. 1987. V. 61. № 1. P. 39–67.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: PIONT@nw.math.msu.su

Принято редколлегией
20.11.2002