Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Плахов, Задача Ньютона о теле наименьшего сопротивления с ограниченным числом соударений, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 1, 195–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm605>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:50:48

ЗАДАЧА НЬЮТОНА О ТЕЛЕ НАИМЕНЬШЕГО СОПРОТИВЛЕНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ СОУДАРЕНИЙ

А. Ю. ПЛАХОВ

1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$; обозначим $(x, v) \mapsto (x_\Omega^+(x, v), v_\Omega^+(x, v))$ отображение рассеяния бильярдной динамической системы в $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ и рассмотрим интеграл

$$R(\Omega) = \int_{L^d} (v_\Omega^+(x, v^d) - v^d) dx, \quad (1)$$

где $v^2 = (0, -1)$, $v^3 = (0, 0, -1)$ и $L^d = \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$. Вектор $R(\Omega)$ интерпретируется как сопротивление множества Ω однородному потоку точечных частиц, падающих вертикально вниз с единичной скоростью. Частицы движутся свободно вне множества Ω и отражаются по закону “угол падения равен углу отражения” в регулярных точках его границы.

Обозначим $\mathcal{B}_d(a, H)$ класс связных множеств $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ таких, что (i) $B_a \times \{0\} \subset \Omega \subset B_a \times [0, H]$, где $B_a = \{x \in \mathbb{R}^{d-1} : |x| \leq a\}$ – круг радиуса a в $\mathbb{R}^{d-1}$, и (ii) интеграл (1) корректно определен, т.е. функция $v_\Omega^+(x, v^d)$ определена на подмножестве полной меры множества L^d и измерима. Обозначим также $m(\Omega)$ максимально возможное число соударений с Ω , которое испытывает частица, падающая в направлении v^d .

Рассматривается задача минимизации величины сопротивления $|R(\Omega)|$ (1) в классе $\mathcal{B}_d(a, H)$, $d = 2, 3$, $a > 0$, $H > 0$. Кроме того, рассматривается следующая задача: определить наименьшее m такое, что множество или семейство множеств, минимизирующие сопротивление, могут быть выбраны таким образом, что число соударений с ними не превосходит m .

Задача минимизации сопротивления рассматривалась И. Ньютоном для класса выпуклых тел из $\mathcal{B}_3(a, H)$, обладающих вращательной симметрией относительно координатной оси Ox_3 [1]. В последние годы она изучалась для более широких классов тел из $\mathcal{B}_3(a, H)$, без предположений о выпуклости или симметрии, но всегда при условии, что каждая частица соударяется с телом не более одного раза, т.е. $m(\Omega) = 1$ [2]–[5].

В настоящей работе показано, что

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{B}_d(a, H)} |R(\Omega)| = \rho_d(a, H), \quad (2)$$

где $\rho_2(a, H) = 2a(1 - H/\sqrt{a^2 + H^2})$, $\rho_3(a, H) = 0$, и построено семейство множеств $\Omega_d^\varepsilon(a, H)$, $\varepsilon > 0$, минимизирующее сопротивление, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |R(\Omega_d^\varepsilon(a, H))| = \rho_d(a, H)$. При $d = 2$ и при $d = 3$, $H \geq a/2$ наибольшее число соударений для множеств, входящих в семейство, равно 2, $m(\Omega_d^\varepsilon(a, H)) = 2$, и это значение нельзя улучшить, т.е. нельзя предъявить минимизирующее множество или семейство множеств с числом соударений, не превосходящим 1. При $d = 3$ и $0 < H < a/2$ имеем $m(\Omega_3^\varepsilon(a, H)) = 3$. Наша гипотеза состоит в следующем: существует число $0 < \kappa \leq 1/2$ такое, что при $H \geq \kappa a$ найдется минимизирующее семейство множеств, для которых число соударений не превосходит 2, а при $0 < H < \kappa a$ такого семейства не существует.

2. Пусть $d = 2$. Обозначим $\widehat{\Omega}$ выпуклую оболочку множества $\Omega \in \mathcal{B}_2(a, H)$. Часть границы $\widehat{\Omega}$, обращенная вверх, является графиком выпуклой вверх функции $f: (-a, a) \mapsto (0, H]$. Обозначим A множество точек графика f , принадлежащих $\partial\Omega$, и $B = \bigcup_i B_i$ множество остальных точек графика, B_i – его связные компоненты. Если падающая частица в первый раз пересечет $\partial\widehat{\Omega}$ в точке $(x_1, f(x_1)) \in B_i$, то через некоторое время она вновь пересечет B_i в обратном направлении и далее будет двигаться свободно со скоростью $v^+(x, v^2)$, образующей с осью Ox_2 больший угол, чем касательная к графику f в соответствующей точке. Отсюда следует неравенство для второй компоненты скорости: $v_2^+(x, v^2) > -|f'(x_1)|/\sqrt{1 + f'^2(x_1)}$, где $x = (x_1, 0)$. То же неравенство справедливо и для частицы, отразившейся в точке из A . Следовательно,

$$|R(\Omega)| > \int_{-a}^a \left(1 - |f'(\xi)|/\sqrt{1 + f'^2(\xi)}\right) d\xi;$$

последний интеграл достигает своего минимума $\rho_2(a, H)$ на функции $f^*(\xi) = H(1 - |\xi|/a)$.

Остается построить семейство множеств из $\mathcal{B}_2(a, H)$, сопротивление которых сходится к $\rho_2(a, H)$. Пусть $0 \leq \alpha \leq a - \varepsilon^2$, $\gamma = \alpha + \varepsilon^3$, $\beta = \alpha + \varepsilon^2$; обозначим p параболу с вершиной $(\gamma, f^*(\gamma) - \varepsilon)$, фокусом $F = (\gamma, f^*(\gamma) - \varepsilon^3)$, и обозначим $E_1 = (\beta, f^*(\beta))$ и E_2 точку пересечения p с прямой $x_1 = \beta$. Проведем прямую l через точку F таким образом, чтобы отрезки E_1F и E_2F находились по одну сторону от l и образовывали с ней равные углы. Пусть $f^*(\gamma) - \varepsilon > 0$; обозначим $K_{\alpha, \varepsilon}$ открытое множество точек (x_1, x_2) , $\alpha < x_1 < \beta$, лежащих выше параболы p и ниже прямой l и графика f^* . Если же $f^*(\gamma) - \varepsilon \leq 0$, то положим $K_{\alpha, \varepsilon} = \emptyset$. Множество, симметричное $K_{\alpha, \varepsilon}$ относительно оси Ox_2 , обозначим $K_{-\beta, \varepsilon}$. Положим $\varepsilon = \sqrt{a/n}$ и определим $\Omega_2^\varepsilon(a, H) = \{|x_1| \leq a, 0 \leq x_2 \leq f^*(x_1)\} \setminus (\bigcup_{k=-n}^{n-1} K_{k\varepsilon^2, \varepsilon})$. Для любого $x_1 \in [-a, a]$, за исключением множества меры $O(\varepsilon)$, соответствующая частица, падающая на $\Omega_2^\varepsilon(a, H)$, попадает в одно из множеств $K_{k\varepsilon^2, \varepsilon}$, испытывает соударения в точке из p и в точке из l и затем движется свободно, причем вторая компонента ее скорости равна $v_2^+ = -H/\sqrt{a^2 + H^2} + O(\varepsilon)$. Отсюда следует, что $|R(\Omega_2^\varepsilon(a, H))| = \rho_2(a, H) + O(\varepsilon)$, что и требовалось.

3. Перейдем к трехмерному случаю. Сначала проведем построения в плоскости $\mathbb{R}_{x_1 x_3}^2$; ось Ox_1 считаем горизонтальной, а ось Ox_3 — вертикальной. Рассмотрим параболу Γ_ε с вертикальной осью, вершиной $(a - \varepsilon, 0)$ и фокусом $F_\varepsilon = (a - \varepsilon, \frac{a - \varepsilon}{2})$. Обозначим C_ε множество точек (x_1, x_3) , $0 \leq x_1 \leq a$, $x_3 \geq 0$, лежащих ниже параболы Γ_ε или на ней. Далее, обозначим B_ε точку пересечения Γ_ε с прямой $x_1 = a$ и обозначим M_ε участок параболы Γ'_ε с фокусом F_ε и осью $F_\varepsilon B_\varepsilon$, содержащийся в множестве $x_1 \geq a - \varepsilon$, $x_3 \geq \frac{a - \varepsilon}{2}$, причем Γ'_ε выбираем так, чтобы M_ε целиком принадлежал множеству $x_1 \leq a$, $x_3 \leq a/2$. Определим $\Omega_3^\varepsilon(a, H)$, $H \geq a/2$, как объединение плоского множества $x_1 = 0$, $|x_2| \leq a$, $0 \leq x_3 \leq a/2$ и множества $\mathcal{Q}(C_\varepsilon \cup M_\varepsilon)$, полученного в результате вращения $C_\varepsilon \cup M_\varepsilon$ вокруг оси Ox_3 . Частица, отразившаяся от $\mathcal{Q}(C_\varepsilon)$ и затем от $\mathcal{Q}(M_\varepsilon)$, далее движется свободно со скоростью, образующей с v^3 угол порядка ε . Таким образом, $v^+(x, v^3) - v^3 = O(\varepsilon)$ для всех значений $x \in L^3$, за исключением множества плоской меры $O(\varepsilon)$, следовательно, $|R(\Omega_3^\varepsilon(a, H))| = O(\varepsilon)$.

Предположим теперь, что $H < a/2$. В плоскости $\mathbb{R}_{x_1 x_3}^2$ рассмотрим параболу G_ε с вершиной $(\varepsilon, 0)$, вертикальной осью и фокусом $P_\varepsilon = (\varepsilon, b - 2\varepsilon)$ и параболу G'_ε с вершиной $(0, b - 2\varepsilon)$, фокусом P_ε и горизонтальной осью. Назовем блоком $B_{b, \varepsilon}$ множество точек (x_1, x_3) , $0 \leq x_1 \leq b$, $-\infty < x_3 \leq b$, лежащих либо ниже параболы G_ε (или на ней), либо выше верхней ветви параболы G'_ε . Множество $C_{b, \varepsilon, n} = \bigcup_{k=0}^{n-1} (u_k + B_{b, \varepsilon})$ есть объединение n экземпляров блока, сдвинутых на векторы $u_k = (bk, 2\varepsilon(n - 1 - k))$; соседние экземпляры примыкают друг к другу по боковым сторонам, с разницей по высоте 2ε . Наконец, обозначим $J_{b, \varepsilon, n}$ отрезок с концами $(bn, b - 2\varepsilon)$ и $K = (\zeta, b + 2\varepsilon(n - 1))$; $\zeta < bn$ выбирается таким образом, чтобы полученный отрезок $J_{b, \varepsilon, n}$ служил биссектрисой угла $K'KK''$, где $K' = (bn, b/2)$, $K'' = (bn, b + 2\varepsilon(n - 1))$. Выберем b и n таким образом, чтобы $b < H/2$, $bn = a$, и определим $\Omega_3^\varepsilon(a, H)$, $H < a/2$, как объединение плоского множества $x_1 = 0$, $|x_2| \leq a$, $0 \leq x_3 \leq H$ и множества $\mathcal{Q}(C_{b, \varepsilon, n} \cup J_{b, \varepsilon, n}) \cap \{x_3 \geq 0\}$. Для всех значений $x \in L^3$, $|x| \leq a$, за исключением множества плоской меры $O(\varepsilon)$, соответствующая частица дважды отразится в точках $\mathcal{Q}(C_{b, \varepsilon, n})$, затем отразится в точке $\mathcal{Q}(J_{b, \varepsilon, n})$ и далее будет двигаться свободно со скоростью $v^+(x, v^3) = v^3 + O(\varepsilon)$. Следовательно, и в этом случае $|R(\Omega_3^\varepsilon(a, H))| = O(\varepsilon)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I. Newton. Philosophiae naturalis principia mathematica, 1686. Рус. пер.: И. Ньютон. Классические начала натуральной философии. М.: Наука, 1989. [2] G. Buttazzo, B. Kawohl // Math. Intelligencer 1993. V. 15. № 4. P. 7–12. [3] G. Buttazzo, V. Ferone, B. Kawohl // Math. Nachr. 1995. V. 173. P. 71–89. [4] F. Brock, V. Ferone, B. Kawohl // Calc. Var. Partial Differential Equations. 1996. V. 4. № 6. P. 593–599. [5] T. Lachand-Robert, M. A. Peletier // Math. Nachr. 2001. V. 226. P. 153–176.