Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Шадрин, Числа Гурвица обобщенных многочленов и циклы двухточечных ветвлений, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 1, 197–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm606>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 09:59:14

ЧИСЛА ГУРВИЦА ОБОБЩЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ И ЦИКЛЫ ДВУХТОЧЕЧНЫХ ВЕТВЛЕНИЙ

С. В. ШАДРИН

1. Обобщенными многочленами мы называем мероморфные функции на компактных римановых поверхностях произвольного рода такие, что прообраз точки $\infty \in \mathbb{CP}^1$ состоит ровно из одной точки.

Определим числа Гурвица обобщенных многочленов с одним не простым критическим значением. Для этого нужно зафиксировать род g , степень n и разбиение $(a_1, \dots, a_l)$ числа n . Затем мы отметим на $\mathbb{CP}^1$ попарно различные точки $z_1, \dots, z_{2g+l+1}$, $z_1 = \infty$.

Числом Гурвица $h(g, n; a_1, \dots, a_l)$ называется число обобщенных многочленов $f: C \rightarrow \mathbb{CP}^1$ степени n , определенных на кривых рода g , таких, что $z_3, \dots, z_{2g+l+1}$ — простые критические значения f и $f^{-1}(z_2) = a_1x_1 + \dots + a_lx_l(x_1, \dots, x_l)$ — попарно различные точки C .

При этом мы считаем функции $f_1: C_1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ и $f_2: C_2 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ совпадающими, если найдется биголоморфное отображение $\phi: C_1 \rightarrow C_2$ такое, что $f_1 = f_2\phi$. Кроме того, многочлен $f: C \rightarrow \mathbb{CP}^1$ учитывается с весом c , где $1/c = |\text{aut}(f)|$.

2. Напомним, что через $\overline{\mathcal{M}}_{g,k}$ обозначается компактификация пространства модулей кривых рода g с k упорядоченными отмеченными точками. Через ψ_i обозначается первый класс Черна расслоения $L_i \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,k}$ со слоем, равным кокасательной прямой в i -й отмеченной точке.

Рассмотрим набор целых чисел $c_1, \dots, c_k$ такой, что $\sum_{i=1}^k c_i = 0$. Обозначим через $V(g; c_1, \dots, c_k) \subset \overline{\mathcal{M}}_{g,k}$ замыкание подмногообразия $V^0(g; c_1, \dots, c_k) \subset \mathcal{M}_{g,k}$, состоящего из кривых $(C, x_1, \dots, x_k)$ таких, что $\sum_{i=1}^k c_i x_i$ — дивизор мероморфной функции. Классы гомологий, определенные подмногообразиями $V(g; c_1, \dots, c_k)$, называются циклами двухточечных ветвлений (two-pointed ramification cycles).

3. Числа Гурвица можно выразить через пересечения с циклами двухточечных ветвлений.

ТЕОРЕМА 1. Если $2g + l \geq 2$, то

$$h(g, n; a_1, \dots, a_l) = \frac{n^{2g+l-2} (2g+l-1)!}{\text{aut}(a_1, \dots, a_l)} \int_{V(g; -n, a_1, \dots, a_l)} \psi_1^{2g+l-2}. \quad (1)$$

Например, если $g = 0$, то $V(g; -n, a_1, \dots, a_l) = \overline{\mathcal{M}}_{0,l+1}$ и $\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,l+1}} \psi_1^{l-2} = 1$. Таким образом, мы получаем формулу $h(0, n; a_1, \dots, a_l) = n^{l-2} (l-1)! / \text{aut}(a_1, \dots, a_l)$, совпадающую с соответствующим частным случаем формулы из [1].

Изложим (нестрого) схему доказательства теоремы 1. Рассмотрим $(\mathbb{CP}^1, z_1, \dots, z_{2g+l+1})$ как точку пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0,2g+l+1}$. Функции, участвующие в определении чисел Гурвица, образуют пространство H . Определено отображение $ll: H \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,2g+l+1}$, сопоставляющее функции набор ее критических значений. Отображение ll — это разветвленное накрытие, и число Гурвица — это его степень.

Заметим, что $\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,2g+l+1}} \psi_1^{2g+l-2} = 1$. Следовательно, $h(g, n; a_1, \dots, a_l) = \int_H ll^* \psi_1$. Существует отображение $st: H \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,N}$, сопоставляющее функции кривую в ее прообразе с отмеченными всеми прообразами всех критических значений ($N = 1 + l + (n-1)(2g+l-1)$). Согласно лемме 1.17 в [2] $ll^* \psi_1 = n \cdot st^* \psi_1$.

Таким образом, мы получили выражение для $h(g, n; a_1, \dots, a_l)$ через $\int_{st_*[H]} \psi_1^{2g+l-2}$ с некоторым комбинаторным коэффициентом. Далее несложные геометрические соображения позволяют свести это выражение к формуле (1). Подробно это доказательство написано в [3].

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00660), NWO (грант № 047.008.005) и INTAS (грант № 00-0259).

4. Можно также выразить числа пересечений через числа Гурвица. Обозначим через $h(g, n)$ число $h(g, n; 1, \dots, 1) = h(g, n; 2, 1, \dots, 1)$.

ТЕОРЕМА 2. Для каждого $L \geq 0$ верно следующее:

$$\int_{\mathcal{M}_{g,3}} \psi_1^{3g} = \sum_{i=0}^g (-1)^i \binom{g}{i} \frac{(g+L+1-i)! \cdot h(g, g+L+1-i)}{g! (3g+L-i)! (g+L+1-i)^{3g+L-1-i}}. \quad (2)$$

Например, зная, что $\int_{\mathcal{M}_{g,3}} \psi_1^{3g} = 1/(24^g g!)$, и вычислив первые g чисел Гурвица $h(g, 1), \dots, h(g, g)$, нетрудно, пользуясь этой формулой, вычислить любое другое число $h(g, k)$.

Проверим эту формулу при $g = 1$. Напомним, что согласно частному случаю формулы из [4] $h(1, k) = (k+1)k^k(k-1)/24$. Подставив это выражение в формулу (2), мы получим, что $\int_{\mathcal{M}_{1,3}} \psi_1^3 = 1/24$.

Заметим, что и в общем случае теорему 2 можно вывести из формулы из [4] чисто комбинаторными рассуждениями, см. [3]. Однако наша цель сейчас – показать, как эту формулу можно увидеть из чисто геометрических соображений, пользуясь теоремой 1.

5. Обозначим через $V(g, n; k, m) \subset \overline{\mathcal{M}}_{g, 1+k+m}$ замыкание подмногообразия $V^0(g, n; k, m) \subset \mathcal{M}_{g, 1+k+m}$, состоящего из кривых $(C, x_1, \dots, x_{1+k+m})$ таких, что найдется обобщенный многочлен степени n , имеющий полюс в точке x_1 и нули в точках $x_2, \dots, x_{1+k}$.

Заметим, что если $0 \leq n - k \leq g$, то размерность $V(g, n; k, m)$ равна $2g + n + m - 2$. Кроме того, заметим, что $V(g, g+L+1; L+1, m) = \mathcal{M}_{g, 2+L+m}$ для любого $L \geq 0$.

ЛЕММА 1. При $0 \leq n - k \leq g$ интеграл $\int_{V(g, n; k, m)} \psi_1^{2g+n+m-2}$ не зависит от m .

Эта лемма является чем-то вроде частного случая уравнения струны, но только для интегралов по $V(g, n; k, m)$. Доказывается она так же, как и уравнение струны.

ЛЕММА 2. При $0 \leq n - k \leq g$ мы имеем

$$\int_{V(g, n; k, m+1)} \psi_1^{2g+n+m-1} = \int_{V(g, n; k+1, m)} \psi_1^{2g+n+m-2} - \int_{V(g, n-1; k, m+1)} \psi_1^{2g+n+m-2}.$$

Эта лемма выводится из леммы 1.17 в [4] рассуждениями, сходными с доказательством теоремы 1.

Теперь заметим, что $\int_{\mathcal{M}_{g,3}} \psi_1^{3g} = \int_{V(g, g+L+1; L+1, g)} \psi_1^{4g+L-1}$ (это следует из уравнения струны и из леммы 1). Далее, многократным применением леммы 2 мы получаем, что

$$\int_{V(g, g+L+1; L+1, g)} \psi_1^{4g+L-1} = \sum_{i=0}^g (-1)^i \binom{g}{i} \int_{V(g, g+L+1-i; g+L+1-i, i)} \psi_1^{3g+L-1}.$$

Тогда, пользуясь леммой 1 и теоремой 1, мы получаем формулу (2). Подробно это доказательство приведено в [3].

6. Автор выражает благодарность С. К. Ландо, С. М. Натанзону и М. З. Шапиро за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. К. Ландо, Д. Звонкин // Функц. анализ и его прил. 1999. Т. 33. № 3. С. 21–34. [2] E.-N. Ionel // Invent. Math. 2002. V. 148. № 3. P. 627–658; math.AG/99-08060. [3] S. V. Shadrin // math.AG/0209282. [4] T. Ekedahl, S. Lando, M. Shapiro, A. Vainshtein // Invent. Math. 2001. V. 146. № 2. P. 297–327.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Независимый московский университет
E-mail: shadrin@mccme.ru

Принято редколлегией
20.11.2002