Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Искауриаза, Г. А. Серёгин, В. Шверак, $L_{3,\infty}$ -решения уравнений Навье–Стокса и обратная единственность, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 2, 3–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm609>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 16:03:51

УДК 517.9

Посвящается Ольге Александровне Ладыженской

 **$L_{3,\infty}$ -РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА
И ОБРАТНАЯ ЕДИНСТВЕННОСТЬ**

Л. ИСКАУРИАЗА, Г. А. СЕРЁГИН, В. ШВЕРАК

Показано, что $L_{3,\infty}$ -решения задачи Коши для трехмерных уравнений Навье–Стокса являются гладкими.

Библиография: 46 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	3
§ 2. Подходящие слабые решения	7
§ 3. Доказательство основных результатов	13
§ 4. Однозначное продолжение через пространственные границы	23
§ 5. Обратная единственность для оператора теплопроводности в полу- пространстве	27
§ 6. Неравенства карлемановского типа	32
§ 7. Дополнение	37
Список литературы	42

§ 1. Введение

В этой статье мы хотели бы объяснить некоторые недавние результаты в теории регулярности для уравнений Навье–Стокса. Рассмотрим классическую задачу Коши для этих уравнений:

$$\begin{aligned}\partial_t v(x, t) + \operatorname{div} v(x, t) \otimes v(x, t) - \Delta v(x, t) &= -\nabla p(x, t), \\ \operatorname{div} v(x, t) &= 0\end{aligned}\tag{1.1}$$

для $x \in \mathbb{R}^3$ и $t \geq 0$, совместно с начальным условием

$$v(x, 0) = a(x), \quad x \in \mathbb{R}^3.\tag{1.2}$$

Для начала предположим, что a – гладкое соленоидальное векторное поле в $\mathbb{R}^3$, которое убывает “достаточно быстро” при $x \rightarrow \infty$. (Позднее мы вернемся к важному

случаю, когда начальное поле скоростей a принадлежит более общим классам функций.) В классической статье [19] Лерэ доказал следующие результаты.

(i) Существует $T_* > 0$ такое, что задача Коши (1.1), (1.2) имеет единственное гладкое решение с “хорошими свойствами на ∞ ”.

(ii) Задача (1.1), (1.2) имеет по крайней мере одно глобальное гладкое решение, удовлетворяющее естественному энергетическому неравенству. Более того, слабые решения совпадают с гладким решением в $\mathbb{R}^3 \times]0, T_*[$.

(iii) Если $]0, T_*[$ – максимальный интервал существования гладкого решения, то для каждого $p > 3$ существует $\varepsilon_p > 0$ такое, что

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u(x, t)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{\varepsilon_p}{(T_* - t)^{\frac{1}{2}(1 - \frac{3}{p})}}$$

при $t \uparrow T_*$.

(iv) Для заданного слабого решения существует замкнутое множество $S \in]0, +\infty[$ нулевой меры такое, что решение оказывается гладким в $\mathbb{R}^3 \times (]0, \infty[\setminus S)$. (На самом деле, доказательство Лерэ дает нам S с $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(S) = 0$, хотя это и не указывается явно.)

Современное определение слабых решений (нередко называемых слабыми решениями Лерэ–Хопфа благодаря важным наблюдениям Э. Хопфа в случае ограниченных областей) заключается в следующем. Обозначим через $\dot{C}_0^\infty$ пространство всех бесконечно дифференцируемых соленоидальных векторных полей с компактным носителем в $\mathbb{R}^3$; $\overset{\circ}{J}$ и $\overset{\circ}{J}_2^1$ – замыкания множества $\dot{C}_0^\infty$ в пространствах L_2 и W_2^1 соответственно. (Используются стандартные обозначения пространств Лебега и Соболева.)

Положим $Q_T = \mathbb{R}^3 \times]0, T[$.

Слабым решением Лерэ–Хопфа задачи Коши (1.1), (1.2) в Q_T называется векторное поле $v: \overline{Q}_T \rightarrow \mathbb{R}^3$ такое, что

$$v \in L_\infty(0, T; \overset{\circ}{J}) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{J}_2^1); \quad (1.3)$$

$$\text{функция } t \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} v(x, t) \cdot w(x) dx \text{ непрерывна на } [0, T] \text{ для любой } w \in L_2; \quad (1.4)$$

$$\int_{Q_T} (-v \cdot \partial_t w - v \otimes v : \nabla w + \nabla v : \nabla w) dx dt = 0, \quad \forall w \in \dot{C}_0^\infty(Q_T); \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |v(x, t_0)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3 \times]0, t_0[} |\nabla v|^2 dx dt \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |a(x)|^2 dx, \quad \forall t_0 \in [0, T]; \quad (1.6)$$

$$\|v(\cdot, t) - a(\cdot)\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow 0. \quad (1.7)$$

Определение остается осмысленным также и в случае, когда $T = +\infty$, если всюду в нем заменить замкнутый интервал $[0, T]$ на $[0, \infty[$.

Вышеупомянутый результат Лерэ, см. (ii), может быть сформулирован следующим образом. (См. [19], [12], [14] и [16].)

ТЕОРЕМА 1.1. *Предположим, что*

$$a \in \overset{\circ}{J}. \quad (1.8)$$

Тогда существует по крайней мере одно слабое решение Лерэ–Хопфа задачи Коши (1.1), (1.2) в $\mathbb{R}^3 \times]0, \infty[$.

На момент написания этой статьи проблемы единственности и регулярности слабых решений Лерэ–Хопфа открыты.

Важные улучшения результатов Лерэ были получены разными исследователями. В частности, работы Проди [30], Серрина [42] и Ладыженской [15] ведут к следующим обобщениям утверждения (ii).

ТЕОРЕМА 1.2. *Предположим, что условие (1.8) выполнено. Пусть v и v_1 суть два слабых решения Лерэ–Хопфа задачи Коши (1.1), (1.2). Допустим, что для некоторого $T > 0$ поле скорости v удовлетворяет так называемому условию Ладыженской–Проди–Серрина, т.е.*

$$v \in L_{s,l}(Q_T) \quad (1.9)$$

при

$$\frac{3}{s} + \frac{2}{l} = 1, \quad s \in]3, +\infty[. \quad (1.10)$$

Тогда $v = v_1$ в Q_T и, более того, v есть гладкая функция в $\mathbb{R}^3 \times]0, T]$.

Единственность была доказана Проди в [30] и Серрином в [42], а гладкость была установлена Ладыженской в [15]. Дальнейшее усиление теоремы 1.2 может быть найдено в статье Гиги [10]. Локальная версия этой теоремы была доказана Серрином [41] для $3/s + 2/l < 1$ и Струве [45] для $3/s + 2/l = 1$. Напомним, что норма в смешанном пространстве Лебега $L_{s,l}(Q_T)$ определяется следующим образом:

$$\|f\|_{s,l,Q_T} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|f(\cdot, t)\|_s^l dt \right)^{\frac{1}{l}}, & l \in [1, +\infty[, \\ \operatorname{ess\,sup}_{t \in]0, T[} \|f(\cdot, t)\|_s, & l = +\infty. \end{cases}$$

Если $s = l$, мы используем сокращение $\|f\|_{s,Q_T} = \|f\|_{s,s,Q_T}$.

Заметим, что в силу стандартных вложений функции класса Лерэ–Хопфа удовлетворяют

$$v \in L_{s,l}(Q_T) \quad (1.11)$$

при

$$\frac{3}{s} + \frac{2}{l} = \frac{3}{2}, \quad s \in [2, 6]. \quad (1.12)$$

Таким образом, есть существенное различие между тем, что мы имеем из теорем существования, и тем, что достаточно для единственности.

Важным шагом на пути к пониманию свойств гладкости слабых решений Лерэ–Хопфа была “локализация по x ” результатов Лерэ, см. (iv). Эта программа была начата Шеффером [31]–[34] и развита далее Каффарелли, Коном и Ниренбергом [2]. Недавно Лин [20] нашел существенные упрощения в доказательстве соответствующих фактов (см. также [17] по поводу более детальных доказательств).

В этой статье мы обращаемся к проблеме регулярности слабых решений Лерэ–Хопфа, удовлетворяющих дополнительному условию

$$v \in L_{3,\infty}(Q_T). \quad (1.13)$$

Мы доказываем, что результат Лерэ, см. (iii), имеет следующий аналог при $p = 3$. Если $]0, T_\star[$ – максимальный интервал существования гладкого решения задачи (1.1), (1.2) и $T_\star < +\infty$, то

$$\limsup_{t \uparrow T_\star} \int_{\mathbb{R}^3} |v(x, t)|^3 dx = +\infty.$$

Другими словами, пространственная L_3 -норма v должна быть бесконечной, если решение имеет сингулярность. Этот результат может быть также истолкован и как распространение теоремы 1.2 на случай

$$s = 3, \quad l = +\infty.$$

Более точно, верна

ТЕОРЕМА 1.3. *Допустим, что v есть слабое решение Лерэ–Хопфа задачи Коши (1.1), (1.2) в Q_T , удовлетворяющее дополнительному условию (1.13). Тогда*

$$v \in L_5(Q_T) \quad (1.14)$$

и, таким образом, v является гладким и единственным в Q_T .

Единственность v при условии (1.13) уже была известна, см. [22], [23], [26], [43]. Некоторые частичные результаты по гладкости таких решений можно найти в [1], [29].

На самом деле, мы доказываем следующий локальный результат.

ТЕОРЕМА 1.4. *Рассмотрим две функции v и p , определенные в пространственно-временном цилиндре $Q = B \times]0, 1[$, где $B(r) \subset \mathbb{R}^3$ обозначает шар радиуса r с центром в начале координат и $B = B(1)$. Предположим, что v и p удовлетворяют уравнениям Навье–Стокса в Q в смысле распределений и имеют следующие дифференциальные свойства:*

$$v \in L_{2,\infty}(Q) \cap L_2(-1, 0; W_2^1(B)), \quad p \in L_{\frac{3}{2}}(Q). \quad (1.15)$$

Пусть, дополнительно,

$$\|v\|_{3,\infty,Q} < +\infty. \quad (1.16)$$

Тогда функция v непрерывна по Гёльдеру в замыкании множества

$$Q(1/2) = B(1/2) \times]-(1/2)^2, 0[.$$

Большой интерес к упомянутым выше результатам связан с тем что, по-видимому, они не могут быть получены “стандартными методами”. Под такими методами мы понимаем различные условия на (локальную) “малость” разных норм v , которые инвариантны по отношению к естественному преобразованию подобия

$$u(x, t) \rightarrow \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t), \quad p(x, t) \rightarrow \lambda^2 p(\lambda x, \lambda^2 t)$$

уравнений.

Отметим, что конечность нормы $\|f\|_{s,l}$ при $s, l < \infty$ влечет “локальную малость” f по этой норме. Это не так в случае $L_{3,\infty}$ -нормы (которая также инвариантна относительно преобразования подобия). Этот вероятный “эффект концентрации” и был главным препятствием при доказательстве регулярности. Для того чтобы исключить концентрацию, мы используем новый метод, основанный на сведениях исследования регулярности к проблеме обратной единственности, которая затем решается при помощи подходящих неравенств карлемановского типа.

Результаты по обратной единственности новы и, по-видимому, представляют самостоятельный интерес, см. §§ 5 и 6. Наши методы могут быть, вероятно, легко адаптированы к другим параболическим задачам с критическими нелинейностями. Можно было бы даже порассуждать о том, что основная идея могла бы быть применена к более широкому классу интересных уравнений таких, как нелинейные уравнения Шрёдингера или нелинейные волновые уравнения. Однако локальная регулярность в этих случаях кажется слегка более трудным делом, чем в параболической ситуации.

Статья написана по следующему плану. В §2 обсуждаются известные результаты по регулярности так называемых подходящих слабых решений. В третьем параграфе мы сводим проблему регулярности к обратной единственности для оператора теплопроводности с переменными младшими членами. Это доказывает теорему 1.4 и, следовательно, теорему 1.3. В §4 мы обсуждаем известные факты из теории однозначного продолжения решений параболических уравнений через пространственные границы. В следующем параграфе доказывается результат по обратной единственности, используемый в §3. Шестой параграф посвящен выводу двух неравенств карлемановского типа, которые играют решающую роль в нашем доказательстве теоремы об обратной единственности. Наконец, исключительно для полноты изложения, в дополнении представлена известная теорема о локальной (по времени) разрешимости задачи Коши с начальными данными из $L_3 \cap \dot{J}$ в классе $C([0, T_*]; L_3) \cap L_5(Q_{T_*})$.

§ 2. Подходящие слабые решения

В этом параграфе мы обсудим гладкость так называемых подходящих слабых решений уравнений Навье–Стокса. Определение подходящих слабых решений было введено в [2], см. также [31]–[34], [20] и [17]. Наша версия принадлежит Лину, см. [17].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть ω – открытое множество в $\mathbb{R}^3$. Мы говорим, что пара u и q есть *подходящее слабое* решение уравнений Навье–Стокса на множестве $\omega \times]-T_1, T[$, если она удовлетворяет условиям:

$$u \in L_{2,\infty}(\omega \times]-T_1, T[) \cap L_2(-T_1, T; W_2^1(\omega)); \quad (2.1)$$

$$q \in L_{\frac{3}{2}}(\omega \times]-T_1, T[); \quad (2.2)$$

$$u \text{ и } q \text{ удовлетворяют уравнениям Навье–Стокса в смысле распределений}; \quad (2.3)$$

u и q удовлетворяют локальному энергетическому неравенству

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\omega} \varphi |u(x, t)|^2 dx + 2 \int_{\omega \times]-T_1, t[} \varphi |\nabla u|^2 dx dt' \\ & \leq \int_{\omega \times]-T_1, t[} (|u|^2 (\Delta \varphi + \partial_t \varphi) + u \cdot \nabla \varphi (|u|^2 + 2q)) dx dt' \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

для п.в. $t \in]-T_1, T[$ и всех неотрицательных функций $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, обращающихся в нуль в окрестности параболической границы $\partial'Q \equiv \omega \times \{t = -T_1\} \cup \partial\omega \times [-T_1, T]$.

Основной результат теории подходящих слабых решений, который мы собираемся использовать, заключается в следующем.

ЛЕММА 2.2. *Существуют абсолютные положительные постоянные ε_0 и c_{0k} , $k = 1, 2, \dots$, обладающие следующим свойством. Допустим, что пара U и P есть подходящее слабое решение уравнений Навье–Стокса в Q , удовлетворяющее условию*

$$\int_Q (|U|^3 + |P|^{\frac{3}{2}}) dz < \varepsilon_0. \quad (2.5)$$

Тогда для любого натурального числа k функция $\nabla^{k-1}U$ непрерывна по Гёльдеру на $\overline{Q}(1/2)$ и верна следующая оценка:

$$\max_{z \in \overline{Q}(1/2)} |\nabla^{k-1}U(z)| < c_{0k}. \quad (2.6)$$

Для того чтобы сформулировать лемму 2.2, мы использовали обозначения:

$$\begin{aligned} z &= (x, t), \quad z_0 = (x_0, t_0); \quad B(x_0, R) = \{|x - x_0| < R\}; \\ Q(z_0, R) &= B(x_0, R) \times]t_0 - R^2, t_0[; \\ B(r) &= B(0, r), \quad Q(r) = Q(0, r), \quad B = B(1), \quad Q = Q(1). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. При $k = 1$ лемма 2.2, по существу, была доказана в [2], см. следствие 1. Альтернативный подход читатель может найти в [17], см. лемму 3.1. Случай $k > 1$ был исследован в [28], см. предложение 2.1, при помощи случая $k = 1$ и результатов по регулярности для линейных систем типа системы Стокса.

На самом деле, в случае $k = 1$ лемма 2.2 есть следствие преобразования подобия и следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Для заданных чисел $\theta \in]0, 1/2[$ и $M > 3$ найдутся две положительные постоянные $\varepsilon_1(\theta, M)$ и $c_1(M)$ такие, что для любого подходящего слабого решения v и p уравнений Навье–Стокса в Q , удовлетворяющего дополнительным условиям*

$$|(v), \theta| < M, \quad Y_1(v, p) < \varepsilon_1, \quad (2.7)$$

справедлива следующая оценка:

$$Y_\theta(v, p) \leq c_1 \theta^{\frac{2}{3}} Y_1(v, p). \quad (2.8)$$

Здесь и в дальнейшем используются обозначения:

$$\begin{aligned} Y(z_0, R; v, p) &= Y^1(z_0, R; v) + Y^2(z_0, R; p), \\ Y^1(z_0, R; v) &= \left(\frac{1}{|Q(R)|} \int_{Q(z_0, R)} |v - (v)_{z_0, R}|^3 dz \right)^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y^2(z_0, R; p) &= R \left(\frac{1}{|Q(R)|} \int_{Q(z_0, R)} |p - [p]_{z_0, R}|^{\frac{3}{2}} dz \right)^{\frac{2}{3}}, \\
 (v)_{z_0, R} &= \frac{1}{|Q(R)|} \int_{Q(z_0, R)} v dz, \quad [p]_{x_0, R} = \frac{1}{|B(R)|} \int_{B(x_0, R)} p dx, \\
 Y_\theta^1(v) &= Y^1(0, \theta; v), \quad Y_\theta^2(p) = Y^2(0, \theta; p), \\
 Y_\theta(v, p) &= Y(0, \theta; v, p), \quad (v)_{\cdot, \theta} = (v)_{0, \theta}, \quad [p]_{\cdot, \theta} = [p]_{0, \theta}.
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.4. Допустим, что утверждение предложения 2.4 неверно. Это значит, что существуют число $\theta \in]0, 1/2[$ и последовательность подходящих слабых решений v^k и p^k (в Q) такие, что:

$$Y_1(v^k, p^k) = \varepsilon_{1k} \rightarrow 0 \quad (2.9)$$

при $k \rightarrow +\infty$,

$$Y_\theta(v^k, p^k) > c_1 \varepsilon_{1k} \theta^{\frac{2}{3}}. \quad (2.10)$$

Постоянная c_1 будет выбрана в дальнейшем так, чтобы получить противоречие. Введем новые функции

$$u^k = (v^k - (v^k)_{\cdot, 1}) / \varepsilon_{1k}, \quad q^k = (p^k - [p^k]_{\cdot, 1}) / \varepsilon_{1k}.$$

Они удовлетворяют соотношениям

$$Y_1(u^k, q^k) = 1, \quad (2.11)$$

$$Y_\theta(u^k, q^k) > c_1 \theta^{\frac{2}{3}} \quad (2.12)$$

и системе

$$\left. \begin{aligned}
 \partial_t u^k + \operatorname{div}((v^k)_{\cdot, 1} + \varepsilon_{1k} u^k) \otimes ((v^k)_{\cdot, 1} + \varepsilon_{1k} u^k) \\
 - \Delta u^k = -\nabla q^k, \quad \operatorname{div} u^k = 0
 \end{aligned} \right\} \quad \text{в } Q \quad (2.13)$$

в смысле распределений.

Без потери общности можно допустить, что:

$$\begin{aligned}
 u^k &\rightharpoonup u \quad \text{в } L_3(Q), \\
 q^k &\rightharpoonup q \quad \text{в } L_{\frac{3}{2}}(Q), \\
 (v^k)_{\cdot, 1} &\rightarrow b \quad \text{в } \mathbb{R}^3
 \end{aligned} \quad (2.14)$$

и

$$\left. \begin{aligned}
 \partial_t u + \operatorname{div} u \otimes b - \Delta u &= -\nabla q \\
 \operatorname{div} u &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad \text{в } Q \quad (2.15)$$

в смысле распределений. В силу (2.11) и (2.14) имеем

$$|b| < M, \quad Y_1(u, q) \leq 1, \quad [q(\cdot, t)]_{\cdot, 1} = 0 \quad \text{для всех } t \in]-1, 0[. \quad (2.16)$$

Из теории регулярности решений системы Стокса (см., например, [38]) и из (2.15), (2.16) следует, что функция u непрерывна по Гёльдеру в $Q(3/4)$ и верна следующая оценка:

$$Y_\theta^1(u) \leq \tilde{c}_1(M)\theta^{\frac{2}{3}}. \quad (2.17)$$

С другой стороны, выбирая срезающую функцию φ в энергетическом неравенстве подходящим образом, находим

$$\|u^k\|_{2,\infty,Q(3/4)} + \|\nabla u^k\|_{2,Q(3/4)} \leq c_3(M). \quad (2.18)$$

Используя известное мультипликативное неравенство, выводим из (2.18) еще одну оценку

$$\|u^k\|_{\frac{10}{3},Q(3/4)} \leq c_4(M). \quad (2.19)$$

Остается воспользоваться системой (2.13) и неравенствами в (2.16). В результате мы имеем

$$\|\partial_t u^k\|_{L_{\frac{3}{2}}(-(3/4)^2, 0; (\dot{W}_2^2(B(3/4)))')} \leq c_5(M). \quad (2.20)$$

В силу хорошо известной компактности, можно выбрать подпоследовательность, обладающую свойством

$$u^k \rightarrow u \quad \text{в } L_3(Q(3/4)). \quad (2.21)$$

Теперь, принимая во внимание (2.21) и (2.17), переходим к пределу в (2.12) и устанавливаем

$$c_1\theta^{\frac{2}{3}} \leq \tilde{c}_1\theta^{\frac{2}{3}} + \limsup_{k \rightarrow \infty} Y_\theta^2(q^k). \quad (2.22)$$

Для того чтобы найти предел последнего слагаемого в правой части (2.22), представим давление q^k в виде (см. [35]–[37])

$$q^k = q_1^k + q_2^k, \quad (2.23)$$

где функция q_1^k есть единственное решение следующей краевой задачи: найти $q_1^k(\cdot, t) \in L_{\frac{3}{2}}(B)$ такую, что

$$\int_B q_1^k(x, t) \Delta \psi(x) dx = -\varepsilon_{1k} \int_B u^k(x, t) \otimes u^k(x, t) : \nabla^2 \psi(x) dx$$

для всех гладких пробных функций ψ , подчиненных краевому условию $\psi|_{\partial B} = 0$. Легко видеть, что

$$\Delta q_2^k(\cdot, t) = 0 \quad \text{в } B \quad (2.24)$$

и, в силу коэрцитивных оценок для оператора Лапласа, мы имеем оценку для q_1^k :

$$\int_B |q_1^k(x, t)|^{\frac{3}{2}} dx \leq c_6 \varepsilon_{1k}^{\frac{3}{2}} \int_B |u^k(x, t)|^3 dx. \quad (2.25)$$

Здесь c_6 – абсолютная положительная постоянная. Переходя к пределу в (2.22), мы убеждаемся при помощи (2.25), что

$$c_1\theta^{\frac{2}{3}} \leq \tilde{c}_1\theta^{\frac{2}{3}} + \limsup_{k \rightarrow \infty} Y_\theta^2(q_2^k). \quad (2.26)$$

Благодаря неравенству Пуанкаре (2.26) может быть приведено к виду

$$c_1 \theta^{\frac{2}{3}} \leq \tilde{c}_1 \theta^{\frac{2}{3}} + c_7 \theta^2 \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{|Q(\theta)|} \int_{Q(\theta)} |\nabla q_2^k|^{\frac{3}{2}} dz \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (2.27)$$

Поскольку функция $q_2^k(\cdot, t)$ гармонична в B , мы имеем оценку

$$\sup_{x \in B(3/4)} |\nabla q_2^k(x, t)|^{\frac{3}{2}} \leq c_8 \int_B |q_2^k(x, t)|^{\frac{3}{2}} dx,$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{|Q(\theta)|} \int_{Q(\theta)} |\nabla q_2^k|^{\frac{3}{2}} dz \leq \frac{c_9}{\theta^2} \int_Q |q_2^k|^{\frac{3}{2}} dz \leq c'_9 \left(\frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2} \int_Q |q_1^k|^{\frac{3}{2}} dz \right).$$

Последнее неравенство вместе с (2.25) позволяет найти предел в (2.27). В результате имеем

$$c_1 \theta^{\frac{2}{3}} \leq \tilde{c}_1 \theta^{\frac{2}{3}} + c_7 (c'_9)^{\frac{2}{3}} \theta^{\frac{2}{3}}. \quad (2.28)$$

Если с самого начала выбрать c_1 так, чтобы

$$c_1 = 2(\tilde{c}_1 + c_7 (c'_9)^{\frac{2}{3}}),$$

то мы получим противоречие. Предложение 2.4 доказано.

Предложение 2.4 допускает следующие итерации.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. По заданным числам $M > 3$ и $\beta \in [0, 2/3[$ возьмем $\theta \in]0, 1/2[$ так, чтобы

$$c_1(M) \theta^{\frac{2-3\beta}{6}} < 1. \quad (2.29)$$

Пусть $\bar{\varepsilon}_1(\theta, M) = \min\{\varepsilon_1(\theta, M), \theta^5 M/2\}$. Если

$$|(v)_{,1}| < M, \quad Y_1(v, p) < \bar{\varepsilon}_1, \quad (2.30)$$

то для любых $k = 1, 2, \dots$

$$\theta^{k-1} |(v)_{,\theta^{k-1}}| < M, \quad Y_{\theta^{k-1}}(v, p) < \bar{\varepsilon}_1 \leq \varepsilon_1, \quad Y_{\theta^k}(v, p) \leq \theta^{\frac{2+3\beta}{6}} Y_{\theta^{k-1}}(v, p). \quad (2.31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем индукцию по k . При $k = 1$ наши утверждения непосредственно следуют из предложения 2.4.

Допустим теперь, что утверждения (2.31) верны при $s = 1, 2, \dots, k, k \geq 2$. Наша цель – доказать, что они верны и при $s = k + 1$. Очевидно, что по индукции

$$Y_{\theta^k}(v, p) < \bar{\varepsilon}_1 \leq \varepsilon_1$$

и

$$\begin{aligned} |(v^k)_{,1}| &= \theta^k |(v)_{,\theta^k}| \leq \theta^k |(v)_{,\theta^k} - (v)_{,\theta^{k-1}}| + \theta^k |(v)_{,\theta^{k-1}}| \\ &\leq \frac{1}{\theta^5} Y_{\theta^{k-1}}(v, p) + \frac{1}{2} \theta^{k-1} |(v)_{,\theta^{k-1}}| < \frac{1}{\theta^5} \bar{\varepsilon}_1 + M/2 \leq M. \end{aligned}$$

Воспользуемся естественным преобразованием подобия:

$$v^k(y, s) = \theta^k v(\theta^k y, \theta^{2k} s), \quad p^k(y, s) = \theta^{2k} p(\theta^k y, \theta^{2k} s)$$

для $(y, s) \in Q$. Отметим, что v^k и p^k образуют подходящее слабое решение в Q . Поскольку

$$Y_1(v^k, p^k) = \theta^k Y_{\theta^k}(v, p) < \bar{\varepsilon}_1 \leq \varepsilon_1 \quad \text{и} \quad |(v^k)_{,1}| = \theta^k |(v)_{,\theta^k}| < M,$$

мы получаем

$$Y_{\theta}(v^k, p^k) \leq c_1 \theta^{\frac{2}{3}} Y_1(v^k, p^k) < \theta^{\frac{2+3\beta}{6}} Y_1(v^k, p^k),$$

что эквивалентно третьему соотношению в (2.31). Предложение 2.5 доказано.

Прямым следствием предложения 2.5 и преобразования подобия

$$v^R(y, s) = Rv(x_0 + Ry, t_0 + R^2 s), \quad p^R(y, s) = R^2 p(x_0 + Ry, t_0 + R^2 s)$$

является следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Пусть M, β, θ и $\bar{\varepsilon}_1$ – числа из предложения 2.5. Пусть пара v и p – произвольное подходящее слабое решение уравнений Навье–Стокса в параболическом цилиндре $Q(z_0, R)$, удовлетворяющее дополнительным условиям

$$R|(v)_{z_0, R}| < M, \quad RY(z_0, R; v, p) < \bar{\varepsilon}_1. \quad (2.32)$$

Тогда для любого $k = 1, 2, \dots$ мы имеем

$$Y(z_0, \theta^k R; v, p) \leq \theta^{\frac{2+3\beta}{6}k} Y(z_0, R; v, p). \quad (2.33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.2. Начнем со случая $k = 1$. Положим

$$A = \int_Q (|U|^3 + |P|^{\frac{3}{2}}) dz.$$

Затем, пусть $M = 2002$, $\beta = 1/3$ и θ выбрано согласно (2.29) и зафиксировано.

Заметим сначала, что

$$Q(z_0, 1/4) \subset Q \quad \text{при} \quad z_0 \in \overline{Q}(3/4)$$

и

$$\frac{1}{4}Y(z_0, 1/4; U, P) \leq c_{10}(A^{\frac{1}{3}} + A^{\frac{2}{3}}), \quad \frac{1}{4}|(U)_{z_0, \frac{1}{4}}| \leq c_{10}A^{\frac{1}{3}}$$

для некоторой абсолютной положительной постоянной c_{10} . Выберем ε_0 так, чтобы

$$c_{10}(\varepsilon_0^{\frac{1}{3}} + \varepsilon_0^{\frac{2}{3}}) < \overline{\varepsilon}_1, \quad c_{10}\varepsilon_0^{\frac{1}{3}} < 2002.$$

Тогда, в силу (2.5), имеем

$$\frac{1}{4}Y(z_0, 1/4; U, P) < \overline{\varepsilon}_1, \quad \frac{1}{4}|(U)_{z_0, \frac{1}{4}}| < M,$$

и, таким образом, в силу предложения 2.6,

$$Y(z_0, \theta^k/4; v, p) \leq \theta^{\frac{k}{2}}Y(z_0, R; U, P) \leq \theta^{\frac{k}{2}}\overline{\varepsilon}_1$$

для всех $z_0 \in \overline{Q}(3/4)$ и всех $k = 1, 2, \dots$. Непрерывность по Гёльдеру функции v на множестве $\overline{Q}(2/3)$ следует из признака Кампанато. Более того, величина

$$\sup_{z \in \overline{Q}(2/3)} |v(z)|$$

ограничена абсолютной постоянной.

Случай $k > 1$ исследуется при помощи теории регулярности для уравнений Стокса и пошаговых аргументов, см. детали в [28], предложение 2.1. Лемма 2.2 доказана.

§ 3. Доказательство основных результатов

Начнем с доказательства теоремы 1.3, предполагая, что утверждение теоремы 1.4 верно.

Наш подход основан на сведении проблемы регулярности к некоторым задачам теории однозначного продолжения и обратной единственности для оператора теплопроводности. Мы следуем статье [40].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. Первое наблюдение есть следствие (1.13) и может быть сформулировано следующим образом:

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}^3} v(x, t) \cdot w(x) dx \text{ непрерывна на } [0, T] \text{ для всех } w \in L_{\frac{3}{2}}. \quad (3.1)$$

Это означает, что норма $\|v(\cdot, t)\|_3$ ограничена при всех $t \in [0, T]$.

Используя известную процедуру, основанную на коэрцитивных оценках (см. [11], [24], [44]) и теореме единственности для задачи Стокса, можно ввести так называемое ассоциированное давление p и, поскольку $|\operatorname{div} v \otimes v| \in L_{\frac{4}{3}}(Q_T)$, получить, что

$$v \in L_4(Q_T), \quad \partial_t v, \nabla^2 v, \nabla p \in L_{\frac{4}{3}}(Q_{\delta_1, T}) \quad (3.2)$$

для любого числа $\delta_1 > 0$, где $Q_{\delta_1, T} = \mathbb{R}^3 \times]\delta_1, T[$. Пара v и p удовлетворяет уравнениям Навье–Стокса п.в. в Q_T . Более того, в силу уравнения для давления

$$\Delta p = -\operatorname{div} \operatorname{div} v \otimes v, \quad (3.3)$$

имеем

$$p \in L_{\frac{3}{2}, \infty}(Q_T). \quad (3.4)$$

Ясно, что пара v и p есть подходящее слабое решение в любом ограниченном цилиндре множества Q_T . Более того, в силу (3.2), локальное энергетическое неравенство выполняется как равенство. Итак, мы можем применить теорему 1.4 и утверждать, что:

$$\begin{aligned} &\text{для любого } z_0 \in \mathbb{R}^3 \times]0, T] \text{ существует окрестность } \mathcal{O}_{z_0} \text{ точки } z_0 \\ &\text{такая, что } v \text{ непрерывна по Гёльдеру в } \mathbb{R}^3 \times]0, T] \cap \mathcal{O}_{z_0}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

В самом деле, для любого z_0 , удовлетворяющего (3.5), существует число $R > 0$ такое, что пара v и p есть подходящее слабое решение в $Q(z_0, R)$. В результате очевидного преобразования подобия $\tilde{v}(x, t) = Rv(x_0 + Rx, t_0 + R^2t)$ и $\tilde{p}(x, t) = R^2p(x_0 + Rx, t_0 + R^2t)$ мы видим, что пара $\tilde{v}$ и $\tilde{p}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.4. Это значит, что функция $\tilde{v}$ непрерывна по Гёльдеру в $\overline{Q}(1/2)$ и, следовательно, функция v непрерывна по Гёльдеру в $\overline{Q}(z_0, R/2)$. Итак, (3.5) есть следствие теоремы 1.4.

Сейчас мы объясним, как, в свою очередь, (3.5) влечет теорему 1.3. Для этого заметим, что

$$\lim_{|z_0| \rightarrow +\infty} \int_{Q(z_0, R)} (|v|^3 + |p|^{\frac{3}{2}}) dz = 0, \quad Q(z_0, R) \subset Q_T.$$

Следовательно, используя преобразование подобия, лемму 2.2 и утверждение (3.5), мы видим, что

$$\max_{z \in \mathbb{R}^3 \times [-T_1 + \delta, T]} |v(z)| < C_1(\delta) < +\infty \quad (3.6)$$

для всех $\delta > 0$. Полагая $w = |v|^{\frac{3}{2}}$, находим из (1.13) и (3.6)

$$w \in L_{2, \infty}(Q_T) \cap L_2(\delta, T; W_2^1(\mathbb{R}^3))$$

и затем при помощи мультипликативного неравенства

$$\|w(\cdot, t)\|_{\frac{10}{3}} \leq C_2 \|w(\cdot, t)\|_2^{\frac{2}{5}} \|\nabla w(\cdot, t)\|_2^{\frac{3}{5}} \quad (3.7)$$

ВЫВОДИМ

$$w \in L_{\frac{10}{3}}(Q_{\delta,T}) \iff v \in L_5(Q_{\delta,T})$$

для любого $\delta > 0$. С другой стороны, поскольку $a \in L_3 \cap \overset{\circ}{J}$ (это – необходимое условие, вытекающее из (3.1)), можно применить теорему 7.4 и заключить, что

$$v \in L_5(Q_{\delta_0})$$

для некоторого $\delta_0 > 0$. Итак, мы показали, что теорема 1.3 следует из (3.5). Теорема 1.3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Сначала заметим, что v и p , удовлетворяющие условиям (1.15) и (1.16), образуют подходящее слабое решение уравнений Навье–Стокса в Q . Это может быть проверено при помощи обычного сглаживания и того факта, что $v \in L_4(Q)$. Последнее есть следствие известного мультипликативного неравенства.

Далее, докажем два утверждения:

$$\begin{aligned} t \rightarrow \int_{B(3/4)} v(x, t) \cdot w(x) dx \text{ непрерывна на } [-(3/4)^2, 0] \\ \text{для любого } w \in L_{\frac{3}{2}}(B(3/4)) \end{aligned} \quad (3.8)$$

и, следовательно,

$$\sup_{-(3/4)^2 \leq t \leq 0} \|v(\cdot, t)\|_{3, B(3/4)} \leq \|v\|_{3, \infty, Q}. \quad (3.9)$$

Утверждение (3.8) можно оправдать следующим образом. Используя локальное энергетическое неравенство, можно оценить $\|\nabla v\|_{2, Q(5/6)}$ только через нормы $\|v\|_{3, \infty, Q}$ и $\|p\|_{\frac{3}{2}, Q}$. Затем при помощи известного мультипликативного неравенства оцениваем норму $\|v\|_{4, Q(5/6)}$. Таким образом, $|\operatorname{div} v \otimes v| \in L_{\frac{4}{3}}(Q(5/6))$. Теперь, используя подходящую срезающую функцию, $L_{s,l}$ -коэрцитивные оценки для решений нестационарной системы Стокса и известные аргументы двойственности, устанавливаем следующую оценку:

$$\int_{Q(3/4)} (|v|^4 + |\partial_t v|^{\frac{4}{3}} + |\nabla^2 v|^{\frac{4}{3}} + |\nabla p|^{\frac{4}{3}}) dz \leq c_{01} \quad (3.10)$$

с постоянной c_{01} , зависящей только от норм $\|v\|_{3, \infty, Q}$ и $\|p\|_{\frac{3}{2}, Q}$. В частности, из (3.10) следует, что $v \in C([-(3/4)^2, 0]; L_{\frac{4}{3}}(B(3/4)))$, а это в свою очередь влечет (3.8).

Как и в доказательстве предложения 2.4, представим давление p в виде

$$p = p_1 + p_2,$$

где функция $p_1(\cdot, t)$ есть единственное решение следующей краевой задачи: найти функцию $p_1(\cdot, t) \in L_{\frac{3}{2}}(B)$ такую, что

$$\int_B p_1(x, t) \Delta \psi(x) dx = - \int_B v(x, t) \otimes v(x, t) : \nabla^2 \psi(x) dx$$

для всех гладких функций ψ , удовлетворяющих граничному условию $\psi|_{\partial B} = 0$. Ясно, что $\Delta p_2(\cdot, t) = 0$ в B . Те же рассуждения, что и в §2, ведут к оценкам

$$\|p_1\|_{\frac{3}{2}, \infty, Q} \leq c_1 \|v\|_{\frac{3}{2}, \infty, Q}^2 \quad (3.11)$$

и

$$\|p_2\|_{\infty, \frac{3}{2}, B(3/4) \times]-1, 0[} = \left(\int_{-1}^0 \sup_{x \in B(3/4)} |p_2(x, t)|^{\frac{3}{2}} dt \right)^{\frac{2}{3}} \leq c_1 (\|p\|_{\frac{3}{2}, Q} + \|v\|_{\frac{3}{2}, \infty, Q}^2), \quad (3.12)$$

где c_1 — абсолютная положительная постоянная.

Допустим, что утверждение теоремы 1.4 неверно. Пусть $z_0 \in \overline{Q}(1/2)$ — сингулярная точка (определение регулярных точек см. в доказательстве теоремы 1.3). Далее, как показано в [39], найдется последовательность положительных чисел R_k такая, что $R_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$ и

$$A(R_k) \equiv \sup_{t_0 - R_k^2 \leq t \leq t_0} \frac{1}{R_k} \int_{B(x_0, R_k)} |v(x, t)|^2 dx > \varepsilon_* \quad (3.13)$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. Здесь ε_* — абсолютная положительная постоянная.

Продолжим нулем функции v и p на все пространство $\mathbb{R}^{3+1}$. Продолженные функции будут обозначаться через $\tilde{v}$ и $\tilde{p}$ соответственно. Теперь положим

$$\begin{aligned} v^{R_k}(x, t) &= R_k \tilde{v}(x_0 + R_k x, t_0 + R_k^2 t), & p^{R_k}(x, t) &= R_k^2 \tilde{p}(x_0 + R_k x, t_0 + R_k^2 t), \\ p_1^{R_k}(x, t) &= R_k^2 \tilde{p}_1(x_0 + R_k x, t_0 + R_k^2 t), & p_2^{R_k}(x, t) &= R_k^2 \tilde{p}_2(x_0 + R_k x, t_0 + R_k^2 t), \end{aligned}$$

где $\tilde{p}_1$ и $\tilde{p}_2$ — продолжения для p_1 и p_2 соответственно.

Очевидно, что для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |v^{R_k}(x, t)|^3 dx = \int_{\mathbb{R}^3} |\tilde{v}(x, t_0 + R_k^2 t)|^3 dx, \quad (3.14)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |p_1^{R_k}(x, t)|^{\frac{3}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}^3} |\tilde{p}_1(x, t_0 + R_k^2 t)|^{\frac{3}{2}} dx \quad (3.15)$$

и для любого $\Omega \in \mathbb{R}^3$

$$\int_{\mathbb{R}} \sup_{x \in \Omega} |p_2^{R_k}(x, t)|^{\frac{3}{2}} dt = R_k \int_{\mathbb{R}} \sup_{x \in \Omega} |\tilde{p}_2(x_0 + R_k x, s)|^{\frac{3}{2}} ds. \quad (3.16)$$

Таким образом, без потери общности можно допустить, что

$$v^{R_k} \xrightarrow{*} u \text{ в } L_{\infty}(\mathbb{R}; L_3) \text{ при } k \rightarrow +\infty, \quad (3.17)$$

где $\operatorname{div} u = 0$ в $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, и

$$p_1^{R_k} \xrightarrow{*} q \text{ в } L_{\infty}(\mathbb{R}; L_{\frac{3}{2}}) \text{ при } k \rightarrow +\infty, \quad (3.18)$$

$$p_2^{R_k} \rightarrow 0 \text{ в } L_{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}; L_{\infty}(\Omega)) \text{ при } k \rightarrow +\infty \quad (3.19)$$

для любого $\Omega \in \mathbb{R}^3$. Для оправдания (3.18) и (3.19) примем во внимание равенства (3.15), (3.16) и оценки (3.11), (3.12).

Для того чтобы получить дополнительную информацию об ограниченности различных норм функций v^{R_k} и p^{R_k} , зафиксируем срезающую функцию $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{3+1})$ и введем функцию ϕ^{R_k} следующим образом:

$$\phi(y, \tau) = R_k \phi^{R_k}(x_0 + R_k y, t_0 + R_k^2 \tau), \quad y \in \mathbb{R}^3, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Выберем R_k настолько малым, чтобы

$$\begin{aligned} \text{supp } \phi &\subset \{(y, \tau) \mid t_0 + R_k^2 \tau \in]-(3/4)^2, (3/4)^2[, x_0 + R_k y \in B(3/4)\} \\ &\implies \text{supp } \phi^{R_k} \subset B(3/4) \times]-(3/4)^2, (3/4)^2[. \end{aligned}$$

Тогда, поскольку пара v и p – подходящее слабое решение, будем иметь

$$2 \int_{-1}^0 \int_B \phi^{R_k} |\nabla v|^2 dz \leq \int_{-1}^0 \int_B \{ |v|^2 (\Delta \phi^{R_k} + \partial_t \phi^{R_k}) + v \cdot \nabla \phi^{R_k} (|v|^2 + 2p) \} dz,$$

и после замены переменных получаем неравенство

$$2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \phi |\nabla v^{R_k}|^2 dz \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \{ |v^{R_k}|^2 (\Delta \phi + \partial_t \phi) + v^{R_k} \cdot \nabla \phi (|v^{R_k}|^2 + 2p^{R_k}) \} dz.$$

Сейчас наша цель – оценить величину $\|p^{R_k}\|_{\frac{3}{2}, \Omega \times]a, b[}$ для всех $\Omega \in \mathbb{R}^3$ и всех $-\infty < a < b < +\infty$. Находим

$$\begin{aligned} \|p^{R_k}\|_{\frac{3}{2}, \Omega \times]a, b[} &\leq \|p_1^{R_k}\|_{\frac{3}{2}, \Omega \times]a, b[} + \|p_2^{R_k}\|_{\frac{3}{2}, \Omega \times]a, b[} \\ &\leq c_2(a, b, \Omega) \left[\|p_1^{R_k}\|_{\frac{3}{2}, \infty, \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}} + \left(\int_a^b \int_{\Omega} \sup_{y \in \Omega} |p_2^{R_k}(y, t)|^{\frac{3}{2}} dx dt \right)^{\frac{2}{3}} \right] \\ &\leq c'_2(a, b, \Omega) \left[\|p_1^{R_k}\|_{\frac{3}{2}, \infty, \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}} + \left(R_k \int_{\mathbb{R}} \sup_{y \in \Omega} |\tilde{p}_2(x_0 + R_k y, s)|^{\frac{3}{2}} ds \right)^{\frac{2}{3}} \right] \\ &\leq c''_2(a, b, \Omega) (\|p\|_{\frac{3}{2}, Q} + \|v\|_{3, \infty, Q}^2). \end{aligned}$$

Итак, из двух последних неравенств выводим оценку

$$\int_Q (|p^{R_k}|^{\frac{3}{2}} + |\nabla v^{R_k}|^2) dz \leq c_3(Q) < +\infty \quad (3.20)$$

для любой области $Q \in \mathbb{R}^{3+1}$ с постоянной c_3 в (3.20), не зависящей от R_k . Затем применяем обычные аргументы, включающие мультипликативные неравенства, $L_{s,l}$ -коэрцитивные оценки для решений нестационарных уравнений Стокса и двойственность. В результате получаем

$$\int_Q (|v^{R_k}|^4 + |\partial_t v^{R_k}|^{\frac{4}{3}} + |\nabla^2 v^{R_k}|^{\frac{4}{3}} + |\nabla p^{R_k}|^{\frac{4}{3}}) dz \leq c_4(Q). \quad (3.21)$$

Последняя оценка совместно с (3.17) влечет

$$v^{R_k} \rightarrow u \text{ в } L_3(Q) \quad (3.22)$$

для $Q \in \mathbb{R}^{3+1}$. Покажем, что дополнительно

$$v^{R_k} \rightarrow u \text{ в } C([a, b]; L_2(\Omega)) \quad (3.23)$$

для любых $-\infty < a < b < +\infty$ и для любой $\Omega \in \mathbb{R}^3$. В самом деле, в силу (3.21),

$$v^{R_k} \rightarrow u \text{ в } C([a, b]; L_{\frac{4}{3}}(\Omega)),$$

и тогда (3.23) может быть легко получено из интерполяционного неравенства

$$\begin{aligned} & \|v^{R_k}(\cdot, t + \Delta t) - v^{R_k}(\cdot, t)\|_{2, \Omega} \\ & \leq \|v^{R_k}(\cdot, t + \Delta t) - v^{R_k}(\cdot, t)\|_{\frac{2}{3}, \Omega}^{\frac{2}{5}} \|v^{R_k}(\cdot, t + \Delta t) - v^{R_k}(\cdot, t)\|_{\frac{4}{3}, \Omega}^{\frac{3}{5}} \end{aligned}$$

и из (3.17).

Теперь мы собираем всю информацию о предельных функциях u и q , вытекающую из (3.14)–(3.23), и заключаем, что:

$$\int_Q (|u|^4 + |\nabla u|^2 + |\partial_t u|^{\frac{4}{3}} + |\nabla^2 u|^{\frac{4}{3}} + |\nabla q|^{\frac{4}{3}}) dz \leq c_3(Q) \quad (3.24)$$

для любого $Q \in \mathbb{R}^{3+1}$;

$$u \in C([a, b]; L_2(\Omega)) \quad (3.25)$$

для любых $-\infty < a < b < +\infty$ и для любой $\Omega \in \mathbb{R}^3$;

$$u \text{ и } q \text{ удовлетворяют уравнениям Навье–Стокса п.в. в } \mathbb{R}^3; \quad (3.26)$$

$$2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \phi |\nabla u|^2 dz = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \{ |u|^2 (\Delta \phi + \partial_t \phi) + u \cdot \nabla \phi (|u|^2 + 2q) \} dz \quad (3.27)$$

для всех функций $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{3+1})$. Нетрудно показать, что согласно (3.24)–(3.27) пара u и q есть подходящее слабое решение уравнений Навье–Стокса в $\Omega \times [a, b]$ для любой ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^3$ и для любых $-\infty < a < b < +\infty$. Более того, благодаря (3.13)

$$\sup_{-R_k^2 \leq t \leq 0} \frac{1}{R_k} \int_{B(0, R_k)} |v(x, t)|^2 dx = \sup_{-1 \leq t \leq 0} \int_{B(0, 1)} |v^{R_k}(x, t)|^2 dx > \varepsilon_*$$

для всех $k \in \mathbb{N}$ и, в силу (3.23), мы имеем

$$\sup_{-1 \leq t \leq 0} \int_{B(0, 1)} |u(x, t)|^2 dx > \varepsilon_*. \quad (3.28)$$

Продолжим доказательство теоремы 1.4. Покажем, что найдутся положительные числа R_2 и T_2 такие, что для любого $k = 0, 1, \dots$ функция $\nabla^k u$ непрерывна по Гёльдеру и ограничена на множестве

$$(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}(R_2/2)) \times]-2T_2, 0].$$

Для этого зафиксируем произвольное число $T_2 > 2$ и заметим, что

$$\int_{-4T_2}^0 \int_{\mathbb{R}^3} (|u|^3 + |q|^{\frac{3}{2}}) dz < +\infty.$$

Следовательно,

$$\int_{-4T_2}^0 \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}(0,R)} (|u|^3 + |q|^{\frac{3}{2}}) dz \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow +\infty.$$

Это значит, что существует число $R_2(\varepsilon_0, T_2) > 4$ такое, что

$$\int_{-4T_2}^0 \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}(0, R_2/4)} (|u|^3 + |q|^{\frac{3}{2}}) dz < \varepsilon_0. \quad (3.29)$$

Допустим теперь, что $z_1 = (x_1, t_1) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}(R_2/2)) \times]-2T_2, 0]$. Тогда

$$Q(z_1, 1) \equiv B(x_1, 1) \times]t_1 - 1, t_1[\subset (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}(0, R_2/4)) \times]-4T_2, 0].$$

Итак, в силу (3.29),

$$\int_{t_1-1}^{t_1} \int_{B(x_1, 1)} (|u|^3 + |q|^{\frac{3}{2}}) dz < \varepsilon_0 \quad (3.30)$$

для любого $z_1 \in (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}(R_2/2)) \times]-2T_2, 0]$, где $T_2 > 2$ и $R_2 > 4$. Но тогда из (3.30) и леммы 2.2 следует, что для любого $k = 0, 1, \dots$

$$\max_{z \in Q(z_1, 1/2)} |\nabla^k u(z)| \leq c_{0k} < +\infty \quad (3.31)$$

и $\nabla^k u$ непрерывна по Гёльдеру на $(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}(R_2/2)) \times]-2T_2, 0]$.

Введем теперь завихренность ω для u , т.е. $\omega = \nabla \wedge u$. Функция ω удовлетворяет уравнению

$$\partial_t \omega + u_k \omega_{,k} - \omega_k u_{,k} - \Delta \omega = 0 \text{ в } (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}(R_2)) \times]-T_2, 0].$$

Вспоминая (3.31), мы видим, что на множестве $(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}(R_2)) \times]-T_2, 0]$ функция ω удовлетворяет следующим соотношениям:

$$|\partial_t \omega - \Delta \omega| \leq M(|\omega| + |\nabla \omega|) \quad (3.32)$$

для некоторой постоянной $M > 0$ и

$$|\omega| \leq c_{00} + c_{01} < +\infty. \quad (3.33)$$

Покажем, что

$$\omega(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}(R_2). \quad (3.34)$$

Для этого учтем, что $u \in C([-T_2, 0]; L_2)$, и тогда получим

$$\begin{aligned} & \left(\int_{B(x_*, 1)} |u(x, 0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\int_{B(x_*, 1)} |v^{R_k}(x, 0) - u(x, 0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{B(x_*, 1)} |v^{R_k}(x, 0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \|v^{R_k} - u\|_{C([-T_2, 0]; L_2)} + |B|^{\frac{1}{6}} \left(\int_{B(x_*, 1)} |v^{R_k}(x, 0)|^3 dx \right)^{\frac{1}{3}} \\ & \leq \|v^{R_k} - u\|_{C([-T_2, 0]; L_2)} + |B|^{\frac{1}{6}} \left(\int_{B(x_0 + R_k x_*, R_k)} |v(y, t_0)|^3 dy \right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Поскольку норма $\|v(\cdot, t)\|_{3, B(3/4)}$ ограничена для любого $t \in [-(3/4)^2, 0]$, см. (3.9), убеждаемся, что, в силу (3.23),

$$\int_{B(x_*, 1)} |u(x, 0)|^2 dx = 0$$

для всех $x_* \in \mathbb{R}^3$. Итак, (3.34) доказано.

Соотношения (3.32)–(3.34) позволяют нам применить теорему об обратной единственности из § 5, см. теорему 5.1, и заключить, что

$$\omega(z) = 0, \quad z \in (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}(R_2)) \times]-T_2, 0]. \quad (3.35)$$

Если мы покажем, что

$$\omega(\cdot, t) = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^3 \quad (3.36)$$

для п.в. $t \in]-T_2, 0[$, то теорема будет доказана. В самом деле, в силу (3.36), функция $u(\cdot, t)$ гармонична и имеет конечную L_3 -норму. В свою очередь, этот факт ведет к тождеству $u(\cdot, t) = 0$ для п.в. $t \in]-T_2, 0[$. Но это противоречит (3.28).

Итак, наша цель показать, что (3.35) влечет (3.36).

Для того чтобы упростить наши обозначения, положим $T = T_2/2$, $R = 2R_2$. Нам известно, что функции u и q удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \partial_t u + \operatorname{div} u \otimes u &= -\nabla q, \\ \operatorname{div} u &= 0, \quad \Delta u = 0, \quad \nabla \wedge u = 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

на множестве $(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}(R/2)) \times]-2T, 0]$. Из (3.37) выводится следующая оценка:

$$\max_{z \in Q_0} (|\nabla^k u(z)| + |\nabla^k \partial_t u(z)| + |\nabla^k q(z)|) \leq c_{0k}^1 < +\infty \quad (3.38)$$

для всех $k = 0, 1, \dots$. Здесь $Q_0 = (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}(R)) \times]-T, 0]$.

Далее, фиксируем гладкую срезающую функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, подчиненную условиям: $\varphi(x) = 1$, если $x \in B(2R)$, $\varphi(x) = 0$, если $x \notin B(3R)$. Положим затем $w = \varphi u$, $r = \varphi q$. Новые функции w и r удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \partial_t w + \operatorname{div} w \otimes w - \Delta w + \nabla r &= g, \\ \operatorname{div} w &= u \cdot \nabla \varphi \end{aligned} \quad (3.39)$$

в $Q_\star = B(4R) \times]-T, 0[$ и граничному условию

$$w|_{\partial B(4R) \times [-T, 0]} = 0, \quad (3.40)$$

где

$$g = (\varphi^2 - \varphi) \operatorname{div} u \otimes u + uu \cdot \nabla \varphi^2 + q \nabla \varphi - 2 \nabla u \nabla \varphi - u \Delta \varphi.$$

Функция g удовлетворяет соотношениям:

$$g(x, t) = 0, \quad \text{если } x \in B(2R) \text{ или } x \notin B(3R), \quad (3.41)$$

$$\sup_{z \in Q_0} (|\nabla^k g(z)| + |\nabla^k \partial_t g(z)|) \leq c_{0k}^2 < +\infty \quad (3.42)$$

для всех $k = 0, 1, \dots$. Очевидно, (3.42) следует из (3.31), (3.38) и (3.41).

К сожалению, функция w несоленоидальна. По этой причине мы вводим функции $\tilde{w}$ и $\tilde{r}$ как решение системы Стокса

$$-\Delta \tilde{w} + \nabla \tilde{r} = 0, \quad \operatorname{div} \tilde{w} = u \cdot \nabla \varphi$$

в $Q_\star$ с однородным граничным условием $\tilde{w}|_{\partial B(4R) \times [-T, 0]} = 0$. Благодаря теории регулярности для стационарных задач и в силу (3.38), можно утверждать, что

$$\sup_{z \in Q_\star} (|\nabla^k \partial_t \tilde{w}(z)| + |\nabla^k \tilde{w}(z)| + |\nabla^k \tilde{r}(z)|) \leq c_{0k}^3 < +\infty \quad (3.43)$$

при всех $k = 0, 1, \dots$.

Полагая $U = w - \tilde{w}$ и $P = r - \tilde{r}$, замечаем, что, в силу (3.41) и (3.42), U и P удовлетворяют уравнениям Навье–Стокса с младшими членами:

$$\left. \begin{aligned} \partial_t U + \operatorname{div} U \otimes U - \Delta U + \nabla P &= -\operatorname{div}(U \otimes \tilde{w} + \tilde{w} \otimes U) + G, \\ \operatorname{div} U &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{в } Q_\star, \quad (3.44)$$

$$U|_{\partial B(4R) \times [-T, 0]} = 0, \quad (3.45)$$

где $G = -\operatorname{div} \tilde{w} \otimes \tilde{w} + g - \partial_t \tilde{w}$, и, учитывая (3.42) и (3.43), имеем

$$\sup_{z \in Q_\star} |\nabla^k G(z)| \leq c_{0k}^4 < +\infty \quad (3.46)$$

при всех $k = 0, 1, \dots$. Стандартная теория регулярности и дифференциальные свойства функций u и q , указанные в (3.24), (3.25) и (3.26), приводят к следующим утверждениям относительно U и P :

$$U \in L_{3,\infty}(Q_*) \cap C([-T, 0]; L_2(B(4R))) \cap L_2(-T, 0; W_2^1(B(4R))), \\ \partial_t U, \nabla^2 U, \nabla P \in L_{\frac{4}{3}}(Q_*).$$

Пусть $t_0 \in]-T, 0[$ выбрано так, что

$$\|\nabla U(\cdot, t_0)\|_{2, B(4R)} < +\infty. \quad (3.47)$$

Тогда, в силу известных результатов о локальной однозначной разрешимости для системы Навье–Стокса (см. [14], [16]), можно найти число $\delta_0 > 0$ такое, что

$$\partial_t U, \nabla^2 U, \nabla P \in L_2(B(4R) \times]t_0, t_0 + \delta_0[).$$

В свою очередь, теория регулярности для линейных систем дает оценки

$$\sup_{t_0 + \varepsilon < t < t_0 + \delta_0 - \varepsilon} \sup_{x \in B(4R)} |\nabla^k U(x, t)| \leq c_{0k}^5 < +\infty$$

для всех $k = 0, 1, \dots$ и для некоторого неотрицательного числа $\varepsilon < \delta_0/4$. Из них мы немедленно выводим следующую информацию о гладкости исходной функции u :

$$\sup_{t_0 + \varepsilon < t < t_0 + \delta_0 - \varepsilon} \sup_{x \in B(4R)} |\nabla^k u(x, t)| \leq c_{0k}^6 < +\infty$$

для всех $k = 0, 1, \dots$. Таким образом, мы можем утверждать, что $|\partial_t \omega - \Delta \omega| \leq M(|\omega| + |\nabla \omega|)$ и $|\omega| \leq M_1$ в $B(4R) \times]t_0 + \varepsilon, t_0 + \delta_0 - \varepsilon[$ для некоторых положительных постоянных M и M_1 . Но мы знаем, что $\omega(z) = 0$, если $z \in (B(4R) \setminus \overline{B}(R)) \times]t_0 + \varepsilon, t_0 + \delta_0 - \varepsilon[$. Благодаря теореме об однозначном продолжении, см. теорему 4.1, мы заключаем, что

$$\omega = 0 \text{ в } B(4R) \times]t_0 + \varepsilon, t_0 + \delta_0 - \varepsilon[.$$

Поскольку (3.47) выполняется для п.в. $t_0 \in]-T, 0[$, мы находим, что $\omega(\cdot, t) = 0$ в $\mathbb{R}^3$ для п.в. $t \in]-T, 0[$. Повторяя эти же рассуждения в интервале $]-T_2, -T_2/2[$, получаем (3.36). Теорема 1.4 доказана.

Мы хотели бы отметить, что заключительная часть доказательства теоремы 1.4 может быть проведена разными методами. Например, можно рассуждать следующим образом. Функция $U(\cdot, t)$ и, следовательно, функция $u(\cdot, t)$ должны быть аналитическими в шаре $B(2R)$ для $t_0 + \varepsilon < t < t_0 + \delta_0 - \varepsilon$, см. [25]. Это означает, что завихренность ω — также аналитическая функция относительно пространственных переменных на том же множестве. Поскольку $\omega = 0$ вне $B(R)$, можно заключить, что $\omega = 0$ в $\mathbb{R}^3 \times]t_0 + \varepsilon, t_0 + \delta_0 - \varepsilon[$ и т. д.

§ 4. Однозначное продолжение через пространственные границы

В этом параграфе мы обсудим известные факты теории однозначного продолжения для дифференциальных неравенств. Мы ограничимся доказательством только тех утверждений, которые будут использоваться в дальнейшем и которые могут быть легко доказаны в рамках нашего единого подхода. Надеемся, что это сделает представленную статью более независимой и удобной для чтения. По поводу современной теории в этом направлении мы отсылаем читателя к статье [4], см. также список публикаций в ней.

Мы будем работать с обратным оператором теплопроводности $\partial_t + \Delta$ вместо обычного оператора теплопроводности $\partial_t - \Delta$, поскольку это избавит нас от написания знаков минус во многих формулах. В пространственно-временном цилиндре $Q(R, T) \equiv B(R) \times]0, T[\subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1$ рассмотрим векторнозначную функцию $u = (u_i) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, удовлетворяющую трем условиям:

$$u \in W_2^{2,1}(Q(R, T); \mathbb{R}^n); \quad (4.1)$$

$$|\partial_t u + \Delta u| \leq c_1(|u| + |\nabla u|) \quad \text{п.в. в } Q(R, T) \quad (4.2)$$

для некоторой положительной постоянной c_1 ;

$$|u(x, t)| \leq C_k(|x| + \sqrt{t})^k \quad (4.3)$$

для всех $k = 0, 1, \dots$, для всех $(x, t) \in Q(R, T)$ и для некоторых положительных постоянных C_k . Здесь

$$W_2^{2,1}(Q(R, T); \mathbb{R}^n) \equiv \{|u| + |\nabla u| + |\nabla^2 u| + |\partial_t u| \in L_2(Q(R, T))\}.$$

Условие (4.3) означает, что начало координат является нулем бесконечного порядка функции u .

ТЕОРЕМА 4.1. *Допустим, что функция u удовлетворяет условиям (4.1)–(4.3). Тогда $u(x, 0) = 0$ при всех $x \in B(R)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. По поводу более общих результатов в этом направлении мы отсылаем читателя к статье Исауриазы и Фернандеза, см. [4].

Без потери общности можно считать, что $T \leq 1$. Теорема 4.1 есть простое следствие следующей леммы.

ЛЕММА 4.3. *Предположим, что все условия теоремы 4.1 выполнены. Тогда существуют постоянная $\gamma = \gamma(c_1) \in]0, 3/16[$ и абсолютные постоянные β_1 и β_2 такие, что*

$$|u(x, t)| \leq c_2(c_1, n)A_0(R, T)e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \quad (4.4)$$

для всех $(x, t) \in Q(R, T)$, удовлетворяющих следующим ограничениям:

$$0 < t \leq \gamma T, \quad |x| \leq \beta_1 R, \quad \beta_2 t \leq |x|^2.$$

Здесь

$$A_0 \equiv \max_{(x,t) \in Q(\frac{3}{4}R, \frac{3}{4}T)} |u(x, t)| + \sqrt{T} |\nabla u(x, t)|.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Согласно утверждению леммы 4.3, $u(x, 0) = 0$, если $|x| \leq \beta_1 R$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. Из теории регулярности для параболических уравнений (см. [18]) следует, что

$$A_0 \leq c_3(R, T) \left(\int_{Q(R, T)} |u|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.3. Положим $\lambda = \sqrt{2t}$ и $\varrho = 2|x|/\lambda$. Предположим, что $|x| \leq \frac{3}{8}R$ и $8t \leq |x|^2$. Тогда, как легко проверить, мы имеем $\varrho \geq 4$ и

$$\lambda y \in B(3R/4), \quad \text{если } y \in B(\varrho); \quad \lambda^2 s \in]0, 3/4[, \quad \text{если } s \in]0, 2[,$$

при условии $0 < \gamma \leq 3/16$. Таким образом, функция $v(y, s) = u(\lambda y, \lambda^2 s)$ хорошо определена на $Q(\varrho, 2) = B(\varrho) \times]0, 2[$. Эта функция удовлетворяет условиям:

$$|\partial_s v + \Delta v| \leq c_1 \lambda (|v| + |\nabla v|) \quad (4.5)$$

в $Q(\varrho, 2)$;

$$|v(y, s)| \leq C'_k (|y| + \sqrt{s})^k \quad (4.6)$$

для всех $k = 0, 1, \dots$ и для всех $(y, s) \in Q(\varrho, 2)$. Здесь $C'_k = C_k \lambda^k$.

Для заданного $\varepsilon > 0$ введем две гладкие срезающие функции со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi(y, s) &= \begin{cases} 1, & (y, s) \in Q(\varrho - 1, 3/2) \\ 0, & (y, s) \notin Q(\varrho, 2) \end{cases} \leq 1, \\ 0 \leq \varphi_\varepsilon(s) &= \begin{cases} 1, & s \in]2\varepsilon, 2[\\ 0, & s \in]0, \varepsilon[\end{cases} \leq 1. \end{aligned}$$

Положим, далее, $w = \varphi v$ и $w_\varepsilon = \varphi_\varepsilon w$. Очевидно, (4.5) влечет следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |\partial_s w_\varepsilon + \Delta w_\varepsilon| &\leq c_1 \lambda (|w_\varepsilon| + |\nabla w_\varepsilon|) \\ &+ c_4 (|\nabla \varphi| |v| + |\nabla \varphi| |v| + |\Delta \varphi| |v| + |\partial_s \varphi| |v|) + c_4 |\varphi'_\varepsilon| |v|. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Центральным моментом является следующее неравенство карлемановского типа, примененное к функции w_ε , детали см. в § 6, предложение 6.1:

$$\begin{aligned} &\int_{Q(\varrho, 2)} h^{-2a}(s) e^{-\frac{|y|^2}{4s}} (|\nabla w_\varepsilon| + |w_\varepsilon|)^2 dy ds \\ &\leq c_5 \int_{Q(\varrho, 2)} h^{-2a}(s) e^{-\frac{|y|^2}{4s}} |\partial_s w_\varepsilon + \Delta w_\varepsilon|^2 dy ds. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь c_5 – абсолютная положительная постоянная, a – произвольное положительное число и $h(t) = te^{\frac{1-t}{3}}$. Положим

$$A = \max_{(y, s) \in Q(\varrho, 2) \setminus \overline{Q}(\varrho - 1, \frac{3}{2})} |v(y, s)| + |\nabla v(y, s)|$$

и выберем γ настолько малым, чтобы обеспечить выполнение условия

$$10c_5c_1^2\lambda^2 \leq 20c_5c_1^2\gamma < \frac{1}{2}. \quad (4.9)$$

Условие (4.9) делает возможным перенести старший член правой части неравенства (4.8) в левую часть того же неравенства. Итак, выводим из (4.7)–(4.9) следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & \int_{Q(\varrho, 2)} h^{-2a}(s) e^{-\frac{|y|^2}{4s}} (|\nabla w_\varepsilon| + |w_\varepsilon|)^2 dy ds \\ & \leq c_6 A^2 \int_{Q(\varrho, 2)} h^{-2a}(s) e^{-\frac{|y|^2}{4s}} \chi(y, s) dy ds \\ & \quad + c_6 \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{Q(\varrho, 2\varepsilon)} h^{-2a}(s) e^{-\frac{|y|^2}{4s}} |v|^2 dy ds. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Здесь χ – характеристическая функция множества $Q(\varrho, 2) \setminus \overline{Q}(\varrho-1, 3/2)$. Зафиксируем a и учтем (4.6). В результате предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем из (4.10)

$$\begin{aligned} D & \equiv \int_{Q(\varrho-1, 3/2)} h^{-2a}(s) e^{-\frac{|y|^2}{4s}} (|\nabla v| + |v|)^2 dy ds \\ & \leq c_6 A^2 \int_{Q(\varrho, 2)} h^{-2a}(s) e^{-\frac{|y|^2}{4s}} \chi(y, s) dy ds \\ & \leq c'_6 A^2 \left(h^{-2a}(3/2) + \rho^{n-1} \int_0^2 h^{-2a}(s) e^{-\frac{(\varrho-1)^2}{4s}} ds \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Поскольку $\varrho \geq 4$, из (4.11) следует, что

$$D \leq c_7 A^2 \left(h^{-2a}(3/2) + \rho^{n-1} \int_0^2 h^{-2a}(s) e^{-\frac{\varrho^2}{8s}} ds \right). \quad (4.12)$$

В (4.12) постоянная c_7 зависит только от n и c_1 .

Для заданного положительного числа β можно взять число a следующим образом:

$$a = \frac{\beta \varrho^2}{2 \ln h(3/2)}. \quad (4.13)$$

Это допустимо, поскольку $h(3/2) > 1$. Таким образом, в силу (4.13), неравенство (4.12) может быть приведено к виду

$$D \leq c_7 A^2 e^{-\beta \rho^2} \left(1 + \rho^{n-1} e^{-\beta \varrho^2} \int_0^2 h^{-2a}(s) e^{2\beta \varrho^2 - \frac{\varrho^2}{8s}} ds \right).$$

Фиксируем $\beta \in]0, 1/64[$, скажем, $\beta = 1/100$. Тогда последнее соотношение влечет оценку

$$D \leq c'_7(c_1, n) A^2 e^{-\beta \varrho^2} \left(1 + \int_0^2 h^{-2a}(s) e^{-\frac{\varrho^2}{16s}} ds \right). \quad (4.14)$$

Нетрудно проверить, что $\beta \leq \frac{\ln(3/2)}{12}$ и, следовательно, $g'(s) \geq 0$, если $s \in]0, 2[$, где $g(s) = h^{-2a}(s)e^{-\frac{\varrho^2}{16s}}$, и a и ϱ удовлетворяют условию (4.13). Итак, имеем

$$D \leq c_8(c_1, n)A^2e^{-\beta\varrho^2}, \quad (4.15)$$

где β – абсолютная положительная постоянная.

В силу выбора ϱ и λ , имеем $B(\mu\frac{x}{\lambda}, 1) \subset B(\varrho - 1)$ для любого $\mu \in]0, 1[$. Затем, полагая $\tilde{Q} = B(\mu\frac{x}{\lambda}, 1) \times]1/2, 1[$, находим

$$D \geq \int_{\tilde{Q}} e^{-\frac{|y|^2}{2}} |v|^2 dy ds. \quad (4.16)$$

Замечая, что $|y|^2 \leq 2\mu^2\frac{|x|^2}{\lambda^2} + 2$, если $y \in B(\mu\frac{x}{\lambda}, 1)$, и полагая $\mu = \sqrt{2\beta}$, выводим из (4.15) и (4.16) следующую оценку:

$$\int_{\tilde{Q}} |v|^2 dy ds \leq c'_8 A^2 e^{(-2\beta + \frac{\mu^2}{2})\frac{|x|^2}{t}} = c'_8 A^2 e^{-\beta\frac{|x|^2}{t}}. \quad (4.17)$$

С другой стороны, теория регулярности для линейных параболических уравнений дает нам:

$$|v(\mu x/\lambda, 1/2)|^2 \leq c_9(c_1, n) \int_{\tilde{Q}} |v|^2 dy ds. \quad (4.18)$$

Объединяя (4.17) и (4.18), показываем, что

$$|u(\sqrt{2\beta}x, t)|^2 = |u(\mu x, t)|^2 = |v(\mu x/\lambda, 1/2)|^2 \leq c'_9 A^2 e^{-\beta\frac{|x|^2}{t}}.$$

Заменив переменные $\tilde{x} = \sqrt{2\beta}x$, будем иметь

$$|u(\tilde{x}, t)| \leq \sqrt{c'_9} A e^{-\frac{|\tilde{x}|^2}{4t}}$$

для $|\tilde{x}| \leq \beta_1 R$ и $|\tilde{x}|^2 \geq \beta_2 t$ с $\beta_1 = 3/8\sqrt{2\beta}$ и $\beta_2 = 16\beta$. Остается заметить, что $\lambda \leq \sqrt{2T}$ и

$$A \leq \max_{(x,t) \in Q(\frac{3}{4}R, \frac{3}{4}T)} |u(x, t)| + \lambda |\nabla u(x, t)|.$$

Лемма 4.3 доказана.

§ 5. Обратная единственность для оператора теплопроводности в полупространстве

В этом параграфе мы имеем дело с проблемой обратной единственности для оператора теплопроводности. Наш подход взят из статьи [7], см. также [5] и [6].

Пусть $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ и $Q_+ = \mathbb{R}_+^n \times]0, 1[$. Рассмотрим векторнозначную функцию $u: Q_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, которая “достаточно гладкая” и удовлетворяет

$$|\partial_t u + \Delta u| \leq c_1(|\nabla u| + |u|) \quad \text{в } Q_+ \quad (5.1)$$

для некоторой $c_1 > 0$ и

$$u(\cdot, 0) = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^n. \quad (5.2)$$

Следует ли из (5.1) и (5.2), что $u \equiv 0$ в Q_+ ? Мы докажем, что ответ положительный, если наложены естественные ограничения на рост функции u на бесконечности. Например, можно рассмотреть

$$|u(x, t)| \leq e^{M|x|^2} \quad (5.3)$$

для всех $(x, t) \in Q_+$ и для некоторого $M > 0$. Естественные предположения о гладкости, при которых можно рассматривать (5.1)–(5.3), например, следующие:

$$\left. \begin{array}{l} u \text{ и обобщенные производные } \partial_t u, \nabla^2 u \text{ суммируемы с квадратом} \\ \text{по любой ограниченной подобласти множества } Q_+. \end{array} \right\} \quad (5.4)$$

Сформулируем основной результат этого параграфа.

ТЕОРЕМА 5.1. *В введенных выше обозначениях допустим, что u удовлетворяет условиям (5.1)–(5.4). Тогда $u \equiv 0$ в Q_+ .*

Это усиливает основной результат работ [5] и [6], где аналог теоремы 5.1 был доказан для Q_+ , замененной на $(\mathbb{R}^n \setminus B(R)) \times]0, T[$. Так же, как и в тех статьях, доказательство теоремы 5.1 основано на двух неравенствах карлемановского типа, см. (6.1) и (6.12).

Такие результаты интересны и в теории управления, см., например, [27]. Дело в том, что краевые условия не контролируются нашими предположениями.

Читатель без труда докажет, что теорема 5.1 верна для функций $u: Q_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ с $1 \leq m < +\infty$.

Мы начнем с доказательства нескольких лемм. Первая из них играет существенную роль в нашем подходе. Она позволяет нам применить мощную технику неравенств Карлемана.

ЛЕММА 5.2. *Предположим, что условия (5.1), (5.2) и (5.4) выполнены. Существует абсолютная положительная постоянная $A_0 < 1/32$ со следующими свойствами. Если*

$$|u(x, t)| \leq e^{A|x|^2} \quad (5.5)$$

для всех $(x, t) \in Q_+$ и для некоторого $A \in [0, A_0]$, то найдутся постоянные $\beta(A) > 0$, $\gamma(c_1) \in]0, 1/12[$ и $c_2(c_1, A) > 0$ такие, что

$$|u(x, t)| \leq c_2 e^{4A|x'|^2} e^{-\beta \frac{x_n^2}{t}} \quad (5.6)$$

для всех $(x, t) \in (\mathbb{R}_+^n + 2e_n) \times]0, \gamma[$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В дальнейшем мы всегда будем считать, что функция u продолжена нулем на отрицательные значения t .

Согласно теории регулярности решений параболических уравнений, см. [18], можно допустить, что

$$|u(x, t)| + |\nabla u(x, t)| \leq c_3 e^{2A|x|^2} \quad (5.7)$$

при всех $(x, t) \in (\mathbb{R}_+^n + e_n) \times]0, 1/2[$.

Фиксируем $x_n > 2$ и $t \in]0, \gamma[$ и вводим новую функцию v при помощи обычного параболического преобразования подобия

$$v(y, s) = u(x + \lambda y, \lambda^2 s - t/2).$$

Функция v хорошо определена на множестве $Q_\rho = B(\rho) \times]0, 2[$, где $\rho = (x_n - 1)/\lambda$ и $\lambda = \sqrt{3t} \in]0, 1/2[$. Тогда соотношения (5.1), (5.2) и (5.7) принимают вид:

$$|\partial_s v + \Delta v| \leq c_1 \lambda (|\nabla v| + |v|) \quad \text{п.в. в } Q_\rho; \quad (5.8)$$

$$|v(y, s)| + |\nabla v(y, s)| \leq c_3 e^{4A|x|^2} e^{4A\lambda^2|y|^2} \quad (5.9)$$

при $(y, s) \in Q_\rho$;

$$v(y, s) = 0 \quad (5.10)$$

для $y \in B(\rho)$ и для $s \in]0, 1/6[$.

Для того чтобы применить неравенство (6.1), возьмем две гладкие срезающие функции:

$$\begin{aligned} \phi_\rho(y) &= \begin{cases} 0, & |y| > \rho - 1/2, \\ 1, & |y| < \rho - 1, \end{cases} \\ \phi_t(s) &= \begin{cases} 0, & 7/4 < s < 2, \\ 1, & 0 < s < 3/2. \end{cases} \end{aligned}$$

Эти функции принимают значения в $[0, 1]$. Кроме того, функция ϕ_ρ удовлетворяет условиям: $|\nabla^k \phi_\rho| < C_k$, $k = 1, 2$. Положим $\eta(y, s) = \phi_\rho(y)\phi_t(s)$ и $w = \eta v$. Из (5.8) следует, что

$$|\partial_s w + \Delta w| \leq c_1 \lambda (|\nabla w| + |w|) + \chi c_4 (|\nabla v| + |v|). \quad (5.11)$$

Здесь c_4 — положительная постоянная, зависящая только от c_1 и C_k , $\chi(y, s) = 1$, если $(y, s) \in \omega = \{\rho - 1 < |y| < \rho, 0 < s < 2\} \cup \{|y| < \rho - 1, 3/2 < s < 2\}$, и $\chi(y, s) = 0$, если $(y, s) \notin \omega$. Очевидно, функция w имеет компактный носитель в $\mathbb{R}^n \times]0, 2[$, и можно воспользоваться неравенством (6.1), см. предложение 6.1. В результате будем иметь

$$I \equiv \int_{Q_\rho} h^{-2a}(s) e^{-\frac{|y|^2}{4s}} (|w|^2 + |\nabla w|^2) dy ds \leq c_0 10 (c_1^2 \lambda^2 I + c_6^2 I_1), \quad (5.12)$$

где

$$I_1 = \int_{Q_\rho} \chi(y, s) h^{-2a}(s) e^{-\frac{|y|^2}{4s}} (|v|^2 + |\nabla v|^2) dy ds.$$

Выбирая $\gamma = \gamma(c_1)$ достаточно малым, мы можем считать, что неравенство $c_0 10 c_1^2 \lambda^2 \leq 1/2$ выполнено, и тогда (5.12) влечет

$$I \leq c_5(c_1)I_1. \quad (5.13)$$

С другой стороны, если $A < 1/32$, то

$$8A\lambda^2 - \frac{1}{4s} < -\frac{1}{8s} \quad (5.14)$$

для $s \in]0, 2]$. В силу (5.9) и (5.14), мы имеем

$$\begin{aligned} I_1 &\leq c_3^2 e^{8A|x|^2} \int_0^2 \int_{B(\rho)} \chi(y, s) h^{-2a}(s) e^{-\frac{|y|^2}{8s}} dy ds \\ &\leq c_6 e^{8A|x|^2} \left[h^{-2a}(3/2) + \int_0^2 h^{-2a}(s) e^{-\frac{(\rho-1)^2}{8s}} ds \right]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Теперь, принимая во внимание (5.15), выводим оценку

$$\begin{aligned} D &\equiv \int_{B(1)} \int_{\frac{1}{2}}^1 |w|^2 dy ds = \int_{B(1)} \int_{\frac{1}{2}}^1 |v|^2 dy ds \\ &\leq c_7 \int_{Q_\rho} h^{-2a}(s) e^{-\frac{|y|^2}{4s}} (|w|^2 + |\nabla w|^2) dy ds \\ &\leq c_8(c_1) e^{8A|x|^2} \left[h^{-2a}(3/2) + \int_0^2 h^{-2a}(s) e^{-\frac{\rho^2}{32s}} ds \right] \\ &= c_8 e^{8A|x|^2 - 2\beta\rho^2} \left[h^{-2a}(3/2) e^{2\beta\rho^2} + \int_0^2 h^{-2a}(s) e^{2\beta\rho^2 - \frac{\rho^2}{32s}} ds \right]. \end{aligned}$$

Мы можем взять $\beta = 8A < 1/256$ и затем выбрать

$$a = \beta\rho^2 / \ln h(3/2).$$

Поскольку $\rho \geq x_n$, такой выбор ведет к оценке

$$D \leq c_8 e^{8A|x'|^2} e^{-\beta\rho^2} \left[1 + \int_0^2 g(s) ds \right],$$

где $g(s) = h^{-2a}(s) e^{-\frac{\rho^2}{64s}}$. Нетрудно проверить, что $g'(s) \geq 0$ при $s \in]0, 2[$, если $\beta < \frac{1}{96} \ln h(3/2)$. Итак, мы имеем

$$D \leq 2c_8 e^{8A|x'|^2} e^{-\beta\rho^2} \leq 2c_8 e^{8A|x'|^2} e^{-\frac{\beta x_n^2}{12t}}. \quad (5.16)$$

С другой стороны, теория регулярности влечет

$$|v(0, 1/2)|^2 = |u(x, t)|^2 \leq c'_8 D. \quad (5.17)$$

Объединяя (5.16) и (5.17), заканчиваем доказательство леммы 5.2. Лемма 5.2 доказана.

Следующая лемма будет следствием леммы 5.2 и второго неравенства карлемановского типа (см. (6.12)).

ЛЕММА 5.3. *Предположим, что функция u удовлетворяет условиям (5.1), (5.2), (5.4) и (5.5). Существует число $\gamma_1(c_1, c_*) \in]0, \gamma/2]$ такое, что*

$$u(x, t) = 0 \quad (5.18)$$

для всех $x \in \mathbb{R}_+^n$ и для всех $t \in]0, \gamma_1[$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как обычно, в силу леммы 5.2 и в силу теории регулярности можно допустить, что

$$|u(x, t)| + |\nabla u(x, t)| \leq c_9(c_1, A)e^{8A|x'|^2}e^{-\beta\frac{x_n^2}{2t}} \quad (5.19)$$

для всех $x \in \mathbb{R}_+^n + 3e_n$ и для всех $t \in]0, \gamma/2]$.

При помощи преобразования подобия определим функцию $v(y, s) = u(\lambda y, \lambda^2 s - \gamma_1)$ для $(y, s) \in Q_+$ с $\lambda = \sqrt{2\gamma_1}$. Эта функция удовлетворяет соотношениям:

$$|\partial_s v + \Delta v| \leq c_1 \lambda (|\nabla v| + |v|) \quad \text{п.в. в } Q_+; \quad (5.20)$$

$$v(y, s) = 0 \quad (5.21)$$

при всех $y \in \mathbb{R}_+^n$ и при всех $s \in]0, 1/2[$:

$$|\nabla v(y, s)| + |v(y, s)| \leq c_9 e^{8A\lambda^2|y'|^2} e^{-\frac{\beta\lambda^2 y_n^2}{2(\lambda^2 s - \gamma_1)}} \leq c_9 e^{8A\lambda^2|y'|^2} e^{-\beta\frac{y_n^2}{2s}} \quad (5.22)$$

при всех $1/2 < s < 1$ и при всех $y \in \mathbb{R}_+^n + \frac{3}{\lambda}e_n$. Поскольку $A < 1/32$ и $\lambda \leq \sqrt{\gamma} \leq 1/\sqrt{12}$, (5.22) может быть приведено к виду

$$|\nabla v(y, s)| + |v(y, s)| \leq c_{11} e^{\frac{|y'|^2}{48}} e^{-\beta\frac{y_n^2}{2s}} \quad (5.23)$$

при тех же y и s , что и в (5.22).

Фиксируем две гладкие срезающие функции:

$$\begin{aligned} \psi_1(y_n) &= \begin{cases} 0, & y_n < \frac{3}{\lambda} + 1, \\ 1, & y_n > \frac{3}{\lambda} + \frac{3}{2}, \end{cases} \\ \psi_2(r) &= \begin{cases} 1, & r > -1/2, \\ 0, & r < -3/4. \end{cases} \end{aligned}$$

Положим (см. предложение 6.2 по поводу определения функций $\phi^{(1)}$ и $\phi^{(2)}$)

$$\phi_B(y_n, s) = \frac{1}{a} \phi^{(2)}(y_n, s) - B = (1-s) \frac{y_n^{2\alpha}}{s^\alpha} - B,$$

где $\alpha \in]1/2, 1[$ фиксировано, $B = \frac{2}{a} \phi^{(2)}(\frac{3}{\lambda} + 2, 1/2)$, и

$$\eta(y_n, s) = \psi_1(y_n) \psi_2(\phi_B(y_n, s)/B), \quad w(y, s) = \eta(y_n, s) v(y, s).$$

Хотя функция w не имеет компактного носителя в $Q_+^1 = (\mathbb{R}_+^3 + e_n) \times]0, 1[$, но, благодаря утверждению леммы 5.2 и специальной структуре веса в (6.12), можно утверждать справедливость неравенства (6.12) и для w . В результате будем иметь

$$\int_{Q_+^1} s^2 e^{2\phi^{(1)}} e^{2a\phi_B} (|w|^2 + |\nabla w|^2) dy ds \leq c_* \int_{Q_+^1} s^2 e^{2\phi^{(1)}} e^{2a\phi_B} |\partial_s w + \Delta w|^2 dy ds.$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 5.2, выбираем $\gamma_1(c_1, c_*)$ настолько малым, чтобы

$$\begin{aligned} I &\equiv \int_{Q_+^1} s^2 e^{2a\phi_B} (|w|^2 + |\nabla w|^2) e^{-\frac{|y'|^2}{4s}} dy ds \\ &\leq c_{10}(c_1, c_*) \int_{(\mathbb{R}_+^n + (\frac{3}{\lambda} + 1)e_n) \times]1/2, 1[} \chi(y_n, s) (sy_n)^2 e^{2a\phi_B} (|v|^2 + |\nabla v|^2) e^{-\frac{|y'|^2}{4s}} dy ds, \end{aligned}$$

где $\chi(y_n, s) = 1$, если $(y_n, s) \in \omega$, $\chi(y_n, s) = 0$, если $(y_n, s) \notin \omega$, и

$$\omega \equiv \{(y_n, s) \mid y_n > 1, 1/2 < s < 1, \phi_B(y_n, s) < -D/2\},$$

где $D = -2\phi_B(\frac{3}{\lambda} + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}) > 0$. Сейчас мы хотели бы оценить правую часть последнего неравенства при помощи (5.23). Находим

$$I \leq c_{11} e^{-Da} \int_{\frac{3}{\lambda} + 1}^{+\infty} \int_{1/2}^1 (y_n s)^2 e^{-\beta \frac{y_n^2}{s}} dy_n ds \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{(\frac{1}{24} - \frac{1}{4s})|y'|^2} dy'.$$

Переходя к пределу при $a \rightarrow +\infty$, получаем, что $v(y, s) = 0$, если $1/2 \leq s < 1$ и $\phi_B(y_n, s) > 0$. Используя однозначную продолжимость через пространственные границы, см. §4, убеждаемся, что $v(y, s) = 0$, если $y \in \mathbb{R}_+^n$ и $0 < s < 1$. Лемма 5.3 доказана.

Теперь теорема 5.1 следует из лемм 5.2 и 5.3 при помощи более или менее стандартных аргументов. Мы приводим их исключительно ради полноты изложения.

ЛЕММА 5.4. *Предположим, что функция u удовлетворяет всем условиям леммы 5.3. Тогда $u \equiv 0$ в Q_+ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 5.3 $u(x, t) = 0$ при $x \in \mathbb{R}_+^n$ и при $t \in]0, \gamma_1[$. При помощи преобразования подобия введем функцию $u^{(1)}(y, s) = u(\sqrt{1 - \gamma_1} y, (1 - \gamma_1)s + \gamma_1)$. Нетрудно проверить, что функция $u^{(1)}$ хорошо определена на Q_+ и удовлетворяет всем условиям леммы 5.3 с теми же постоянными c_1 и A . Следовательно, $u^{(1)}(y, s) = 0$ при $y_n > 0$ и при $0 < s < \gamma_1$. Последнее означает, что функция $u(x, t) = 0$ при $x_n > 0$ и при $0 < t < \gamma_2 = \gamma_1 + (1 - \gamma_1)\gamma_1$. Далее, вводим функцию

$$u^{(2)}(y, s) = u(\sqrt{1 - \gamma_2} y, (1 - \gamma_2)s + \gamma_2), \quad (y, s) \in Q_+,$$

и применяем лемму 5.3. После k шагов мы увидим, что $u(x, t) = 0$ при $x_n > 0$ и при $0 < t < \gamma_{k+1}$, где $\gamma_{k+1} = \gamma_k + (1 - \gamma_k)\gamma_1 \rightarrow 1$. Лемма 5.4 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Допустим, что $A_0 < M$. Тогда $\lambda^2 \equiv \frac{A_0}{2M} < \frac{1}{2}$. Вводя функцию $v(y, s) = u(\lambda y, \lambda^2 s)$, $(y, s) \in Q_+$, мы видим, что эта функция удовлетворяет всем условиям леммы 5.4 с постоянными c_1 и $A = \frac{1}{2}A_0$. Следовательно, $u(x, t) = 0$ при $x_n > 0$ и при $0 < t < \frac{A_0}{2M}$. Теперь мы повторяем рассуждения леммы 5.4, заменяя γ_1 на $\frac{A_0}{2M}$ и A на M , и заканчиваем доказательство теоремы. Теорема 5.1 доказана.

§ 6. Неравенства карлемановского типа

Первое неравенство карлемановского типа, по существу, такое же, как и то, что было использовано в [5] и [6] (см. также [3], [8] и [46]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Для любой функции $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times]0, 2[; \mathbb{R}^n)$ и для любого положительного числа a верно следующее неравенство:*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \times]0, 2[} h^{-2a}(t) e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(\frac{a}{t} |u|^2 + |\nabla u|^2 \right) dx dt \\ \leq c_0 \int_{\mathbb{R}^n \times]0, 2[} h^{-2a}(t) e^{-\frac{|x|^2}{4t}} |\partial_t u + \Delta u|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь c_0 – абсолютная положительная постоянная и $h(t) = te^{\frac{1-t}{3}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наше доказательство использует стандартную технику L_2 -теории неравенств карлемановского типа, см., например, [13] и [46].

Пусть u – произвольная функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times]0, 2[; \mathbb{R}^n)$. Положим $\phi(x, t) = -|x|^2/(8t) - (a+1) \ln h(t)$ и $v = e^\phi u$. Тогда мы будем иметь

$$Lv \equiv e^\phi (\partial_t u + \Delta u) = \partial_t v - \operatorname{div}(v \otimes \nabla \phi) - \nabla v \nabla \phi + \Delta v + (|\nabla \phi|^2 - \partial_t \phi) v.$$

Основной трюк в упомянутом выше подходе заключается в разложении оператора tL на симметричную и антисимметричную составляющие, т.е.

$$tL = S + A, \quad (6.2)$$

где

$$Sv \equiv t(\Delta v + (|\nabla \phi|^2 - \partial_t \phi)v) - \frac{1}{2}v \quad (6.3)$$

и

$$Av \equiv \frac{1}{2}(\partial_t(tv) + t\partial_t v) - t(\operatorname{div}(v \otimes \nabla \phi) + \nabla v \nabla \phi). \quad (6.4)$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \int t^2 e^{2\phi} |\partial_t u + \Delta u|^2 dx dt &= \int t^2 |Lv|^2 dx dt \\ &= \int |Sv|^2 dx dt + \int |Av|^2 dx dt + \int [S, A]v \cdot v dx dt, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где $[S, A] = SA - AS$ – коммутатор для S и A . Простые вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} I \equiv \int [S, A]v \cdot v dx dt \\ = 4 \int t^2 [\phi_{,ij} v_{,i} \cdot v_{,j} + \phi_{,ij} \phi_{,i} \phi_{,j} |v|^2] dx dt \\ + \int t^2 |v|^2 (\partial_t^2 \phi - 2\partial_t |\nabla \phi|^2 - \Delta^2 \phi) dx dt \\ + \int t |\nabla v|^2 dx dt - \int t |v|^2 (|\nabla \phi|^2 - \partial_t \phi) dx dt. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Здесь и в дальнейшем мы принимаем соглашение о суммировании по повторяющимся латинским индексам, изменяющимся от 1 до n . Частные производные относительно пространственных переменных обозначаются запятой в нижних индексах, т.е. $v_{,i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}$, $\nabla v = (v_{,i,j})$ и т.д. Для данного выбора функции ϕ имеем

$$I = (a+1) \int t^2 \left[-\left(\frac{h'(t)}{h(t)} \right)' - \frac{h'(t)}{th(t)} \right] |v|^2 dx dt = \frac{a+1}{3} \int t |v|^2 dx dt. \quad (6.7)$$

В силу простого тождества

$$|\nabla v|^2 = \frac{1}{2} (\partial_t + \Delta) |v|^2 - v \cdot (\partial_t v + \Delta v), \quad (6.8)$$

находим

$$\int t^2 |\nabla v|^2 dx dt = - \int t |v|^2 dx dt - \int t^2 v \cdot Lv dx dt + \int t^2 |v|^2 (|\nabla \phi|^2 - \partial_t \phi) dx dt. \quad (6.9)$$

В нашем случае

$$|\nabla \phi|^2 - \partial_t \phi = -|\nabla \phi|^2 + (a+1) \frac{h'(t)}{h(t)}.$$

Последнее соотношение (вместе с (6.7)) влечет оценку

$$\int t^2 (|\nabla v|^2 + |v|^2 |\nabla \phi|^2) dx dt \leq 3I - \int t^2 v \cdot Lv dx dt \leq b_1 \int t^2 |Lv|^2 dx dt, \quad (6.10)$$

где b_1 – абсолютная положительная постоянная. Поскольку

$$e^\phi |\nabla u| \leq |\nabla v| + |v| |\nabla \phi|, \quad (6.11)$$

из (6.5)–(6.10) следует, что

$$\begin{aligned} & \int h^{-2a}(t) (th^{-1}(t))^2 \left((a+1) \frac{|u|^2}{t} + |\nabla u|^2 \right) e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx dt \\ & \leq b_2 \int h^{-2a}(t) (th^{-1}(t))^2 |\partial_t u + \Delta u|^2 e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx dt. \end{aligned}$$

Здесь b_2 – абсолютная положительная постоянная. Неравенство (6.1) доказано.

Второе неравенство карлемановского типа в некотором смысле анизотропно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. Пусть

$$\phi = \phi^{(1)} + \phi^{(2)},$$

где $\phi^{(1)}(x, t) = -\frac{|x'|^2}{8t}$ и $\phi^{(2)}(x, t) = a(1-t)\frac{x_n^{2\alpha}}{t^\alpha}$, $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, так что $x = (x', x_n)$, и $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Тогда для любой функции $u \in C_0^\infty((\mathbb{R}_+^n + e_n) \times]0, 1[; \mathbb{R}^n)$ и любого числа $a > a_0(\alpha)$ справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \int_{(\mathbb{R}_+^n + e_n) \times]0, 1[} t^2 e^{2\phi(x, t)} \left(a \frac{|u|^2}{t^2} + \frac{|\nabla u|^2}{t} \right) dx dt \\ & \leq c_\star \int_{(\mathbb{R}_+^n + e_n) \times]0, 1[} t^2 e^{2\phi(x, t)} |\partial_t u + \Delta u|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Здесь $c_\star = c_\star(\alpha)$ – положительная постоянная и $\alpha \in]1/2, 1[$ фиксировано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in C_0^\infty(Q_+^1; \mathbb{R}^n)$. Мы собираемся воспользоваться формулами (6.2)–(6.6) для новых функций u , v и ϕ . Все интегралы в этих формулах берутся теперь по Q_+^1 .

Заметим сначала, что

$$\begin{aligned} \nabla \phi &= \nabla \phi^{(1)} + \nabla \phi^{(2)}, \\ \nabla \phi^{(1)}(x, t) &= -\frac{x'}{4t}, \quad \nabla \phi^{(2)}(x, t) = 2\alpha a \frac{1-t}{t^\alpha} x_n^{2\alpha-1} e_n. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Следовательно,

$$\nabla \phi^{(1)} \cdot \nabla \phi^{(2)} = 0, \quad |\nabla \phi|^2 = |\nabla \phi^{(1)}|^2 + |\nabla \phi^{(2)}|^2. \quad (6.14)$$

Более того,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \nabla^2 \phi^{(1)} + \nabla^2 \phi^{(2)}, \\ \phi_{,ij}^{(1)} &= \begin{cases} -\frac{\delta_{ij}}{4t}, & \text{если } 1 \leq i, j \leq n-1, \\ 0, & \text{если } i = n \text{ или } j = n, \end{cases} \\ \phi_{,ij}^{(2)} &= \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq n \text{ или } j \neq n, \\ 2\alpha(2\alpha-1)a \frac{1-t}{t^\alpha} x_n^{2\alpha-2}, & \text{если } i = n \text{ и } j = n. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.15)$$

В частности, (6.15) влечет

$$\phi_{,ij} \phi_{,i} \phi_{,j} = -\frac{1}{4t} |\nabla \phi^{(1)}|^2 + 2\alpha(2\alpha-1)a \frac{1-t}{t^\alpha} x_n^{2\alpha-2} |\nabla \phi^{(2)}|^2 \geq -\frac{1}{4t} \frac{|x'|^2}{16t^3}. \quad (6.16)$$

Используя (6.14)–(6.16), представим интеграл I в (6.6) следующим образом:

$$I = I_1 + I_2 + \int t |\nabla v|^2 dx dt, \quad (6.17)$$

где

$$I_s = 4 \int t^2 [\phi_{,ij}^{(s)} v_{,i} \cdot v_{,j} + \phi_{,ij}^{(s)} \phi_{,i}^{(s)} \phi_{,j}^{(s)} |v|^2] dx dt + \int t^2 |v|^2 \left(\partial_t^2 \phi^{(s)} - 2 \partial_t |\nabla \phi^{(s)}|^2 - \Delta^2 \phi^{(s)} - \frac{1}{t} |\nabla \phi^{(s)}|^2 + \frac{1}{t} \partial_t \phi^{(s)} \right) dx dt,$$

$s = 1, 2$. Прямые вычисления дают нам

$$I_1 = - \int t (|\nabla v|^2 - |v_{,n}|^2) dx dt,$$

и, следовательно,

$$I = \int t |v_{,n}|^2 dx dt + I_2. \quad (6.18)$$

Сейчас наша цель – оценить I_2 снизу. Поскольку $\alpha \in]1/2, 1[$, можно опустить первый интеграл в выражении для I_2 . В результате будем иметь

$$I_2 \geq \int t^2 |v|^2 (A_1 + A_2 + A_3) dx dt, \quad (6.19)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= -\partial_t |\nabla \phi^{(2)}|^2, \\ A_2 &= A_1 - \Delta^2 \phi^{(2)} - \frac{1}{t} |\nabla \phi^{(2)}|^2, \\ A_3 &= \partial_t^2 \phi^{(2)} + \frac{1}{t} \partial_t \phi^{(2)}. \end{aligned}$$

Для A_2 находим

$$A_2 \geq \frac{1-t}{t^\alpha} x_n^{2\alpha-4} a (2\alpha-1) \left[\frac{4\alpha^2 a x_n^{2\alpha+2}}{t^{\alpha+1}} - 2\alpha(2\alpha-2)(2\alpha-3) \right].$$

Поскольку $x_n \geq 1$ и $0 < t < 1$, мы видим, что $A_2 > 0$ для всех $a \geq 2$. Таким образом, из (6.18) и (6.19) следует, что

$$I \geq \int t^2 |v|^2 (A_1 + A_3) dx dt. \quad (6.20)$$

Нетрудно проверить следующее неравенство:

$$A_3 \geq a(2\alpha-1) \frac{x_n^{2\alpha}}{t^{\alpha+2}}. \quad (6.21)$$

С другой стороны,

$$-\partial_t |\nabla \phi^{(2)}|^2 - \frac{1}{t} |\nabla \phi^{(2)}|^2 \geq (2\alpha-1) \frac{1-t}{t^{2\alpha+1}} 4\alpha^2 a^2 x_n^{2(2\alpha-1)} \geq 0$$

и, таким образом,

$$A_1 \geq \frac{1}{t} |\nabla \phi^{(2)}|^2. \quad (6.22)$$

Объединяя (6.20)–(6.22), выводим из (6.5) оценку

$$\begin{aligned} \int t^2 |Lv|^2 dx dt &\geq I \geq a(2\alpha - 1) \int \frac{x_n^{2\alpha}}{t^\alpha} |v|^2 dx dt + \int t |v|^2 |\nabla \phi^{(2)}|^2 dx dt \\ &\geq a(2\alpha - 1) \int |v|^2 dx dt + \int t |v|^2 |\nabla \phi^{(2)}|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Используя (6.8), находим следующий аналог для (6.9):

$$\int t |\nabla v|^2 dx dt = -\frac{1}{2} \int |v|^2 dx dt - \int tv \cdot Lv dx dt + \int t |v|^2 (|\nabla \phi|^2 - \partial_t \phi) dx dt. \quad (6.24)$$

Благодаря специальной структуре ϕ имеем

$$|\nabla \phi|^2 - \partial_t \phi = |\nabla \phi^{(1)}|^2 - \partial_t \phi^{(1)} + |\nabla \phi^{(2)}|^2 - \partial_t \phi^{(2)} = -|\nabla \phi^{(1)}|^2 + |\nabla \phi^{(2)}|^2 - \partial_t \phi^{(2)},$$

и, следовательно, (6.24) может быть приведено к виду

$$\begin{aligned} &\int (t |\nabla v|^2 + t |v|^2 (|\nabla \phi^{(1)}|^2 + |\nabla \phi^{(2)}|^2)) dx dt \\ &= \int t (|\nabla v|^2 + |v|^2 |\nabla \phi|^2) dx dt \\ &= -\frac{1}{2} \int |v|^2 dx dt - \int tv \cdot Lv dx dt \\ &\quad + 2 \int t |v|^2 |\nabla \phi^{(2)}|^2 dx dt - \int t |v|^2 \partial_t \phi^{(2)} dx dt. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Но

$$-t \partial_t \phi^{(2)} \leq a \frac{x_n^{2\alpha}}{t^\alpha}$$

и, в силу (6.11) и (6.25),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int t e^{2\phi} |\nabla u|^2 &\leq - \int v \cdot (tLv) dx dt \\ &\quad + 2 \int t |v|^2 |\nabla \phi^{(2)}|^2 dx dt + a \int \frac{x_n^{2\alpha}}{t^\alpha} |v|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Неравенство Коши–Шварца, (6.23) и (6.26) влекут требуемое неравенство (6.12).

§ 7. Дополнение

Уравнение теплопроводности. Начнем с вывода известных оценок решений задачи Коши для уравнения теплопроводности. Итак, рассмотрим следующую начальную задачу

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \quad \text{в } Q_T, \quad (7.1)$$

$$u(\cdot, 0) = a(\cdot) \quad \text{в } \mathbb{R}^3. \quad (7.2)$$

ЛЕММА 7.1. Для решений задачи (7.1) и (7.2) верны следующие оценки:

$$\|u(\cdot, t)\|_s \leq c_1(s, s_1) t^{-\frac{1}{t}} \|a\|_{s_1}, \quad t > 0, \quad (7.3)$$

при $s \geq s_1$;

$$\|u\|_{s,l,Q_T} \leq c_1(s, s_1) \|a\|_{s_1} \quad (7.4)$$

при $s > s_1$. Здесь

$$\frac{1}{l} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s} \right). \quad (7.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Оценки (7.4) получены в [18; гл. 3, теорема 9.1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы не собираемся доказывать лемму 7.1 в полной общности. Наша цель лишь показать, как это может быть сделано. Сначала мы замечаем, что решение задачи Коши имеет вид

$$u(\cdot, t) = \Gamma(\cdot, t) * a(\cdot), \quad (7.6)$$

где Γ – фундаментальное решение для уравнения теплопроводности, т.е.

$$\Gamma(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \begin{cases} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & \text{если } t > 0, \\ 0, & \text{если } t \leq 0. \end{cases}$$

Тогда (7.3) может быть получено из (7.6) при помощи неравенства Гёльдера и преобразования подобия.

Оценка (7.5) чуть деликатней, и мы доказываем ее в специальном случае $s = 5$ и $s_1 = 3$. Можно допустить, что

$$a \in C_0^\infty. \quad (7.7)$$

Тогда все дальнейшие операции будут законными. Требуемая оценка может быть достигнута предельным переходом.

Умножая (7.1) на $|u|u$ и интегрируя по частям, находим

$$\frac{1}{3} \partial_t \|u(\cdot, t)\|_3^3 + \int_{\mathbb{R}^3} |u(\cdot, t)| |\nabla u(\cdot, t)|^2 dx + \frac{4}{9} \|\nabla |u(\cdot, t)|^{\frac{3}{2}}\|_2^2 = 0. \quad (7.8)$$

Полагая $g = |u|^{\frac{3}{2}}$, заметим, что (7.8) влечет оценку

$$\|g\|_{2,Q_T}^2 \equiv \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \|g(\cdot, t)\|_2^2 + \|\nabla g\|_{2,Q_T}^2 \leq c_2 \|a\|_3^3, \quad (7.9)$$

где c_2 — абсолютная положительная постоянная. Теперь, в силу мультипликативного неравенства (см. [18]),

$$\|g(\cdot, t)\|_{\frac{10}{3}} \leq c'_2 \|g(\cdot, t)\|_2^{\frac{2}{5}} \|\nabla g(\cdot, t)\|_2^{\frac{3}{5}} \quad (7.10)$$

и, следовательно,

$$\|u\|_{5, Q_T} = \|g\|_{\frac{10}{3}, Q_T}^{\frac{2}{3}} \leq c''_2 \|a\|_3$$

для некоторой абсолютной положительной постоянной c''_2 . Лемма 7.1 доказана.

Система Стокса. Простые аргументы предыдущего раздела работают также и в случае задачи Коши для системы Стокса:

$$\left. \begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= \operatorname{div} f - \nabla q \\ \operatorname{div} u &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{в } Q_T, \quad (7.11)$$

$$u(\cdot, 0) = a(\cdot) \quad \text{в } \mathbb{R}^3. \quad (7.12)$$

ТЕОРЕМА 7.3. *Допустим, что*

$$f \in L_{\frac{5}{2}}(Q_T) \cap L_2(Q_T) \quad (7.13)$$

и

$$a \in L_3 \cap \overset{\circ}{J}. \quad (7.14)$$

Для любого $T > 0$ существует пара функций u и q со следующими свойствами:

$$u \in C([0, T]; L_2) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{J}_2^1), \quad \partial_t u \in L_2(0, T; (\overset{\circ}{J}_2^1)'); \quad (7.15)$$

$$u \in C([0, T]; L_3) \cap L_5(Q_T) \cap L_4(Q_T); \quad (7.16)$$

$$q \in L_2(Q_T) \cap L_{\frac{5}{2}}(Q_T); \quad (7.17)$$

$$u \text{ и } q \text{ удовлетворяют уравнениям (7.11)} \quad (7.18)$$

в смысле распределений;

начальное условие выполняется в смысле

$$\|u(\cdot, t) - a(\cdot)\|_3 \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 0; \quad (7.19)$$

$$\|u\|_{3, \infty, Q_T} + \|u\|_{5, Q_T} \leq c_3 (\|f\|_{\frac{5}{2}, Q_T} + \|a\|_3); \quad (7.20)$$

$$\|u\|_{4, Q_T} \leq c_3 (\|f\|_{\frac{5}{2}, Q_T} + \|a\|_3 + \|f\|_{2, Q_T} + \|a\|_2), \quad (7.21)$$

где c_3 — абсолютная положительная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как обычно, можно считать дополнительно, что

$$f \in C_0^\infty(Q_T), \quad a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Общий случай может быть изучен при помощи подходящих аппроксимаций.

L_2 -оценки очевидны:

$$\|u\|_{2,\infty,Q_T} + \|\nabla u\|_{2,Q_T} + \|\partial_t u\|_{L_2(0,T;(\dot{J}_2^1)')} \leq C(\|a\|_2 + \|f\|_2). \quad (7.22)$$

Здесь C – абсолютная положительная постоянная.

Далее, применив дивергенцию к первому уравнению в (7.11), находим уравнение для давления

$$\Delta q = \operatorname{div} \operatorname{div} f.$$

Следовательно, (7.17) доказано и, более того,

$$\|q\|_{\frac{5}{2}} \leq C_0 \|f\|_{\frac{5}{2}}. \quad (7.23)$$

Как и при доказательстве леммы 7.1, используем в нашем уравнении в качестве пробной функции $|u|u$ и, применяя неравенство Гёльдера, приходим к оценке

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \partial_t \|u\|_3^3 + \int_{\mathbb{R}^3} |u| |\nabla u|^2 dx + \frac{4}{9} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} (p \operatorname{div}(|u|u) - f : \nabla(|u|u)) dx \\ &\leq C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^3} (|f|^2 + |q|^2) |u| dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u| |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{(7.23)}{\leq} C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u| |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{\frac{10}{3}}^{\frac{1}{3}} \|f\|_{\frac{5}{2}} \equiv A, \end{aligned} \quad (7.24)$$

где $v = |u|^{\frac{3}{2}}$. Правая часть в (7.24) может быть оценена при помощи мультипликативного неравенства (см. (7.10)) следующим образом:

$$A \leq C_2 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u| |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} (\|v\|_2^{\frac{1}{3}})^{\frac{2}{5}} (\|\nabla v\|_2^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{5}} \|f\|_{\frac{5}{2}}.$$

Применяя дважды неравенство Юнга и тождество $\|v\|_2^2 = \|u\|_3^3$, из (7.24) и из последней оценки получаем основную оценку

$$\partial_t \|u\|_3^3 + \int_{\mathbb{R}^3} |u| |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v|^2 dx \leq C_3 \|u\|_3^{\frac{1}{2}} \|f\|_{\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}}. \quad (7.25)$$

Очевидно, (7.25) влечет неравенство

$$\|u\|_{3,\infty,Q_T} \leq C_4 (\|f\|_{\frac{5}{2},Q_T}^{\frac{5}{2}} + \|a\|_3), \quad (7.26)$$

где C_4 — абсолютная положительная постоянная. Тогда, в силу (7.25) и (7.26),

$$\int_{Q_T} (|u| |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx dt \leq C_5 (\|f\|_{\frac{5}{2}, Q_T} + \|a\|_3)^3$$

и, таким образом (см. (7.10)),

$$\|u\|_{5, Q_T} \leq C_6 \|u\|_{\frac{5}{3}, \infty, Q_T}^{\frac{2}{5}} \|\nabla v\|_{2, Q_T}^{\frac{2}{5}} \leq C'_6 (\|f\|_{\frac{5}{2}, Q_T} + \|a\|_3),$$

где C'_6 — абсолютная положительная постоянная.

С другой стороны, еще одно мультипликативное неравенство говорит, что

$$\|u\|_{4, Q_T} \leq C_7 \|u\|_{\frac{3}{4}, \infty, Q_T}^{\frac{3}{4}} \|\nabla u\|_{2, Q_T}^{\frac{1}{4}} \leq C'_7 (\|u\|_{3, \infty, Q_T} + \|\nabla u\|_{2, Q_T}).$$

Итак, (7.20) и (7.21) доказаны.

Остается показать, что

$$u \in C([0, T]; L_3). \quad (7.27)$$

Для этого вернемся к первому равенству в (7.24). Оно дает нам:

$$\int_0^T |\partial_t \|u\|_3^3| dt \leq C_8 \left[\|f\|_{\frac{5}{2}, Q_T}^2 \|u\|_{5, Q_T} + \int_{Q_T} (|u| |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx dt \right].$$

Таким образом, можно утверждать, что функция $t \mapsto \|u(\cdot, t)\|_3$ непрерывна. Но благодаря известным аргументам функция $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) \cdot w(x) dx$ непрерывна на $[0, T]$ для всех $w \in L_{\frac{3}{2}}$. Эти два факта влекут (7.27). Теорема 7.3 доказана.

Система Навье—Стокса. Здесь мы собираемся рассмотреть задачу Коши для уравнений Навье—Стокса:

$$\left. \begin{aligned} \partial_t u + \operatorname{div} u \otimes u - \Delta u &= -\nabla q \\ \operatorname{div} u &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ в } Q_T, \quad (7.28)$$

$$u(\cdot, 0) = a(\cdot) \text{ в } \mathbb{R}^3. \quad (7.29)$$

Следующее утверждение доказано Т. Като [21].

ТЕОРЕМА 7.4. *Допустим, что условие (7.14) выполняется. Тогда существует положительное число T_* , зависящее только от a и обладающее следующими свойствами. Найдется единственная пара функций u и q такая, что:*

$$u \in C([0, T_*]; L_2) \cap L_2(0, T_*; \mathring{J}_2^1), \quad \partial_t u \in L_2(0, T_*; (\mathring{J}_2^1)'); \quad (7.30)$$

$$u \in C([0, T_*]; L_3) \cap L_5(Q_{T_*}) \cap L_4(Q_{T_*}); \quad (7.31)$$

$$q \in C([0, T_*]; L_{\frac{3}{2}}) \cap L_2(Q_{T_*}) \cap L_{\frac{5}{2}}(Q_{T_*}); \quad (7.32)$$

$$u \text{ и } q \text{ удовлетворяют уравнениям (7.28)} \quad (7.33)$$

в смысле распределений;

начальное условие выполнено в смысле

$$\|u(\cdot, t) - a(\cdot)\|_3 \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 0. \quad (7.34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство более или менее стандартное (см., например, [9] и [23]) и основано на последовательных итерациях. Пусть

$$\begin{aligned} u^1(\cdot, t) &= \Gamma(\cdot, t) * a(\cdot), \quad t > 0, \\ \kappa(T_\star) &= \|u^1\|_{5, Q_{T_\star}} + \|u^1\|_{4, Q_{T_\star}} \end{aligned} \quad (7.35)$$

и

$$u^{k+1} = w + u^1,$$

где w – решение следующей задачи Коши:

$$\left. \begin{aligned} \partial_t w - \Delta w &= -\operatorname{div} u^k \otimes u^k - \nabla q^k \\ \operatorname{div} w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{в } Q_{T_\star}, \quad (7.36)$$

$$w(\cdot, 0) = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^3. \quad (7.37)$$

Положим также

$$f = -u^k \otimes u^k.$$

Согласно теореме 7.3, имеем оценку (см. (7.20) и (7.21))

$$\|u^{k+1} - u^1\|_{5, Q_{T_\star}} + \|u^{k+1} - u^1\|_{4, Q_{T_\star}} \leq 2c_3(\|u^k\|_{5, Q_{T_\star}} + \|u^k\|_{4, Q_{T_\star}})^2.$$

Она может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} \|u^{k+1}\|_{5, Q_{T_\star}} + \|u^{k+1}\|_{4, Q_{T_\star}} &\leq 2c_3(\|u^k\|_{5, Q_{T_\star}} + \|u^k\|_{4, Q_{T_\star}})^2 \\ &\quad + \|u^1\|_{5, Q_{T_\star}} + \|u^1\|_{4, Q_{T_\star}}. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Теперь наша цель показать, что число $T_\star$ может быть выбрано так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\|u^{k+1}\|_{5, Q_{T_\star}} + \|u^{k+1}\|_{4, Q_{T_\star}} \leq 2\kappa(T_\star) \quad (7.39)$$

для $k = 1, 2, \dots$. Мы рассуждаем по индукции относительно k . Тогда (7.38) и (7.39) дают нам:

$$\|u^{k+1}\|_{5, Q_{T_\star}} + \|u^{k+1}\|_{4, Q_{T_\star}} \leq 8c_3\kappa^2(T_\star) + \kappa(T_\star) = \kappa(T_\star)(8c_3\kappa(T_\star) + 1).$$

Очевидно, неравенства (7.39) верны, если мы выберем $T_\star$ так, чтобы

$$\kappa(T_\star) < \frac{1}{8c_3}. \quad (7.40)$$

Для того чтобы показать, что это возможно, введем

$$a_\rho = \omega_\rho * a,$$

где ω_ρ – обычное сглаживающее ядро. Положим $u_\rho^1(\cdot, t) = \Gamma(\cdot, t) * a_\rho(\cdot)$ и тогда

$$\kappa(T_\star) \leq I_\rho^1 + I_\rho^2, \quad (7.41)$$

где

$$I_\rho^1 = \|u_\rho^1\|_{5, Q_{T_\star}} + \|u_\rho^1\|_{4, Q_{T_\star}}, \quad I_\rho^2 = \|u^1 - u_\rho^1\|_{5, Q_{T_\star}} + \|u^1 - u_\rho^1\|_{4, Q_{T_\star}}.$$

Конечно, теорема 7.3 верна и для уравнения теплопроводности. Следовательно,

$$I_\rho^2 \leq C_9(\|a - a_\rho\|_3 + \|a - a_\rho\|_2),$$

где C_9 – абсолютная постоянная. Фиксируем $\rho > 0$ таким образом, чтобы

$$C_9(\|a - a_\rho\|_3 + \|a - a_\rho\|_2) < \frac{1}{16c_3}. \quad (7.42)$$

Оценим I_ρ^1 при помощи леммы 7.1. Итак, имеем

$$\|u_\rho^1(\cdot, t)\|_5 \leq c_1 t^{-\frac{3}{40}} \|a_\rho\|_4, \quad \|u_\rho^1(\cdot, t)\|_4 \leq c_1 t^{-\frac{3}{40}} \|a_\rho\|_3,$$

и, таким образом,

$$\|u_\rho^1\|_{5, Q_{T_\star}} \leq C_{10} T_\star^{\beta_1} \|a_\rho\|_4, \quad \|u_\rho^1\|_{4, Q_{T_\star}} \leq C_{10} T_\star^{\beta_2} \|a_\rho\|_3$$

для некоторых абсолютных положительных постоянных C_{10} , β_1 и β_2 . Остается выбрать $T_\star > 0$ так, чтобы

$$C_{10}(T_\star^{\beta_1} \|a_\rho\|_4 + T_\star^{\beta_2} \|a_\rho\|_3) < \frac{1}{16c_3}. \quad (7.43)$$

Объединяя (7.41)–(7.43), доказываем (7.40). Затем, переходя к пределу при $k \rightarrow +\infty$, выводим все утверждения теоремы 7.4, исключая непрерывность u относительно t со значениями в L_3 и непрерывность q относительно t со значениями в $L_{\frac{3}{2}}$. Непрерывность u немедленно следует из теоремы 7.3 и наблюдения, что $f = -u \otimes u \in L_{\frac{5}{2}}(Q_{T_\star})$. Непрерывность q есть следствие уравнения для давления

$$\Delta q = -\operatorname{div} \operatorname{div} u \otimes u.$$

Теорема 7.4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.5. Нетрудно проверить, что функция u теоремы 7.4 является на самом деле слабым решением Лерэ–Хопфа. Поскольку оно принадлежит $L_5(Q_{T_\star})$, любое другое слабое решение совпадает с u (см. теорему 1.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Beirao da Veiga. On the smoothness of a class of weak solutions to the Navier–Stokes equations // J. Math. Fluid Mech. 2000. V. 2. P. 315–323.
- [2] L. Caffarelli, R.-V. Kohn, L. Nirenberg. Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier–Stokes equations // Comm. Pure Appl. Math. 1982. V. 35. P. 771–831.
- [3] L. Escauriaza. Carleman inequalities and the heat operator // Duke Math. J. 2000. V. 104. №1. P. 113–127.
- [4] L. Escauriaza, F. J. Fernández. Unique continuation for parabolic operators // Ark. Mat. (to appear).

- [5] L. Escauriaza, G. Seregin, V. Šverák. On backward uniqueness for parabolic equations // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2002. Т. 288. С. 100–103.
- [6] L. Escauriaza, G. Seregin, V. Šverák. On backward uniqueness for parabolic equations // Arch. Ration. Mech. Anal. (to appear).
- [7] L. Escauriaza, G. Seregin, V. Šverák. Backward uniqueness for the heat operator in halfspace // Алгебра и анализ. 2003. Т. 15. № 1 (в печати).
- [8] L. Escauriaza, L. Vega. Carleman inequalities and the heat operator. II // Indiana Univ. Math. J. 2001. V. 50. № 3. P. 1149–1169.
- [9] G. P. Galdi. An introduction to the Navier–Stokes initial-boundary value problem // Fundamental Directions in Mathematical Fluid Mechanics / ed. G. P. Galdi et al. Basel: Birkhäuser, 2000. P. 1–70.
- [10] Y. Giga. Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier–Stokes system // J. Differential Equations. 1986. V. 62. № 2. P. 186–212.
- [11] Y. Giga, H. Sohr. Abstract L^p -estimates for the Cauchy problem with applications to the Navier–Stokes equations in exterior domains // J. Funct. Anal. 1991. V. 102. № 1. P. 72–94.
- [12] E. Hopf. Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen // Math. Nachr. 1951. V. 4. P. 213–231.
- [13] Л. Хёрмандер. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965.
- [14] О. А. Ладыженская. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматгиз, 1961.
- [15] О. А. Ладыженская. О единственности и гладкости обобщенных решений уравнений Навье–Стокса // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1967. Т. 5. С. 169–185.
- [16] О. А. Ладыженская. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
- [17] O. A. Ladyzhenskaya, G. A. Seregin. On partial regularity of suitable weak solutions to the three-dimensional Navier–Stokes equations // J. Math. Fluid Mech. 1999. V. 1. № 4. P. 356–387.
- [18] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
- [19] J. Leray. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace // Acta Math. 1934. V. 63. P. 193–248.
- [20] F.-H. Lin. A new proof of the Caffarelli–Kohn–Nirenberg theorem // Comm. Pure Appl. Math. 1998. V. 51. № 3. P. 241–257.
- [21] T. Kato. Strong L^p -solutions of the Navier–Stokes equations in R^m with applications to weak solutions // Math. Z. 1984. V. 187. P. 471–480.
- [22] H. Kozono. Uniqueness and regularity of weak solutions to the Navier–Stokes equations // Lect. Notes Numer. Appl. Anal. 1998. V. 16. P. 161–208.
- [23] H. Kozono, H. Sohr. Remark on uniqueness of weak solutions to the Navier–Stokes equations // Analysis. 1996. V. 16. № 3. P. 255–271.
- [24] П. Маремонти, В. А. Солонников. Об оценках решений нестационарной задачи Стокса в анизотропных пространствах С. Л. Соболева со смешанной нормой // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1995. Т. 222. С. 124–150.
- [25] K. Masuda. On the analyticity and the unique continuation theorem for solutions of the Navier–Stokes equations // Proc. Japan Acad. 1967. V. 43. P. 827–832.
- [26] K. Masuda. Weak solutions of the Navier–Stokes equations // Tôhoku Math. J. (2). 1984. V. 36. P. 623–646.
- [27] S. Micu, E. Zuazua. On the lack of null-controllability of the heat equation on the half space // Port. Math. 2001. V. 58. № 1. P. 1–24.
- [28] J. Nečas, M. Ruzička, V. Šverák. On Leray's self-similar solutions of the Navier–Stokes equations // Acta Math. 1996. V. 176. № 2. P. 283–294.
- [29] J. Neustupa. Partial regularity of weak solutions to the Navier–Stokes equations in the class $L^\infty(0, T; L^3(\Omega)^3)$ // J. Math. Fluid Mech. 1999. V. 1. № 4. P. 309–325.

- [30] G. Prodi. Un teorema di unicità per le equazioni di Navier–Stokes // *Ann. Mat. Pura Appl.* (4). 1959. V. 48. P. 173–182.
- [31] V. Scheffer. Partial regularity of solutions to the Navier–Stokes equations // *Pacific J. Math.* 1976. V. 66. P. 535–552.
- [32] V. Scheffer. Hausdorff measure and the Navier–Stokes equations // *Comm. Math. Phys.* 1977. V. 55. P. 97–112.
- [33] V. Scheffer. The Navier–Stokes equations in a bounded domain // *Comm. Math. Phys.* 1980. V. 73. P. 1–42.
- [34] V. Scheffer. Boundary regularity for the Navier–Stokes equations in a half-space // *Comm. Math. Phys.* 1982. V. 85. P. 275–299.
- [35] G. A. Seregin. Interior regularity for solutions to the modified Navier–Stokes equations // *J. Math. Fluid Mech.* 1999. V. 1. №3. P. 235–281.
- [36] G. A. Seregin. On the number of singular points of weak solutions to the Navier–Stokes equations // *Comm. Pure Appl. Math.* 2001. V. 54. №8. P. 1019–1028.
- [37] G. A. Seregin. Local regularity of suitable weak solutions to the Navier–Stokes equations near the boundary // *J. Math. Fluid Mech.* 2002. V. 4. №1. P. 1–29.
- [38] Г. А. Серёгин. Дифференциальные свойства решений слабых решений уравнений Навье–Стокса // *Алгебра и анализ.* 2002. Т. 14. №1. С. 193–237.
- [39] G. A. Seregin, V. Šverák. Navier–Stokes equations with lower bounds on pressure // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 2002. V. 163. №1. P. 65–86.
- [40] G. Seregin, V. Šverák. The Navier–Stokes equations and backward uniqueness // *Nonlinear Problems in Mathematical Physics and Related Topics II. In Honor of Professor O. A. Ladyzhenskaya* / ed. M. Sh. Birman et al. New York: Kluwer/Plenum, 2002. P. 359–370. (Int. Math. Ser. V. 2.)
- [41] J. Serrin. On the interior regularity of weak solutions of the Navier–Stokes equations // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1962. V. 9. P. 187–195.
- [42] J. Serrin. The initial value problem for the Navier–Stokes equations // *Nonlinear Problems* / ed. R. Langer. Madison: Univ. of Wisconsin Press, 1963. P. 69–98.
- [43] H. Sohr, W. von Wahl. On the singular set and the uniqueness of weak solutions of the Navier–Stokes equations // *Manuscripta Math.* 1984. V. 49. P. 27–59.
- [44] В. А. Солонников. Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса // *Труды МИАН.* 1964. Т. 70. С. 213–317.
- [45] M. Struwe. On partial regularity results for the Navier–Stokes equations // *Comm. Pure Appl. Math.* 1988. V. 41. №4. P. 437–458.
- [46] D. Tataru. Carleman estimates, unique continuation, and applications // <http://math.berkeley.edu/~tataru/ucp.html>.

Dipartimento di Matematicas, UPV/EHU,
Bilbao, Spain;

С.-Петербургское отделение

Математического института им. В. А. Стеклова РАН,

С.-Петербург, Россия;

School of Mathematics, University of Minnesota,
Minneapolis, USA

Поступила в редакцию
15.02.2003