Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Бурский, Обобщенные решения граничных задач для дифференциальных уравнений общего вида, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 4, 215–216

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm61>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 17:59:34

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОБЩЕГО ВИДА

В. П. БУРСКИЙ

Пусть $\mathcal{L} = \sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha(x) D^\alpha$, $a_\alpha \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $D^\alpha = \frac{(-i\partial)^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$ – дифференциальный оператор общего вида с $(j \times k)$ -матрицами a_α , элементами которых являются гладкие комплекснозначные функции, и пусть Ω – произвольная область в $\mathbb{R}^n$. Оператор $\mathcal{L}$ порождает формально сопряженный оператор $\mathcal{L}^+ = \sum_{|\alpha| \leq l} D^\alpha (a_\alpha^*(x) \cdot)$, где $a_\alpha^*(x)$ – сопряженная матрица.

Ниже будут рассмотрены граничные задачи в обобщенной постановке для уравнений вида:

$$(1) \quad \mathcal{L}^+ \circ A \circ \mathcal{L} u = f$$

с некоторым непрерывным (вообще говоря, нелинейным) оператором $A: L_2^k(\Omega) \rightarrow L_2^k(\Omega)$ и их связь с теорией расширений операторов [1].

Минимальный оператор L_0 , определяемый как замыкание оператора $\mathcal{L}$, первоначально заданного на $C_0^\infty(\Omega)$, в норме графика $\|u\|_L^2 = \|u\|_{L_2^j(\Omega)}^2 + \|\mathcal{L}u\|_{L_2^k(\Omega)}^2$ и аналогичный минимальный оператор L_0^+ порождают максимальные операторы $L = (L_0^+)^*$, $L^+ = L_0^*$ с помощью сопряжения в гильбертовых пространствах. Области определения $D(L_0)$, $D(L_0^+)$, $D(L)$, $D(L^+)$ этих операторов являются гильбертовыми пространствами в соответствующей норме графика. Будем для простоты считать, что каждая функция из $D(L)$ или $D(L^+)$ может быть приближена гладкими функциями в соответствующей норме графика. Введем (см. [2]) пространство Коши $C(L) = D(L)/D(L_0)$, а также фактор-отображение $\Gamma: D(L) \rightarrow C(L)$ и аналогично $C(L^+)$ и Γ^+ . Рассмотрим следующие условия:

$$(2) \quad \text{оператор } L_0: D(L_0) \rightarrow L_2^k(\Omega) \text{ имеет непрерывный левый обратный;}$$

$$(3) \quad \text{оператор } L_0^+: D(L_0^+) \rightarrow L_2^j(\Omega) \text{ имеет непрерывный левый обратный.}$$

Однородной граничной задачей (см. [2]) называется задача нахождения решения соотношений

$$(4) \quad Lu = f, \quad \Gamma u \in B,$$

где B – линейное подпространство в пространстве Коши, определяющее граничную задачу. Задача (4) называется корректной, если оператор $L_B = L|_{D(L_B)}$, $D(L_B) = \Gamma^{-1}B$, является разрешимым расширением оператора L_0 , т.е. если оператор $L_B: D(L_B) \rightarrow L_2^k(\Omega)$ имеет непрерывный обратный (который является правым обратным к L). Хорошо известно (М. И. Вишик [1], в интерпретации Л. Хермандера [2]), что у оператора L_0 существует разрешимое расширение (и для оператора L существует корректная граничная задача (4)) тогда и только тогда, когда выполнены условия (2) и (3). Сопряженной к (4) называется граничная задача: $L^+v = g$, $\Gamma^+v \in B^+$, где пространство $B^+ = \Gamma^+D_B^+$, $D_B^+ = \{v \in D(L^+) \mid \forall u \in \Gamma^{-1}(B), [u, v] = 0\}$, порождено формой Грина: $[u, v] = \int_\Omega (Lu \cdot \bar{v} - u \cdot \overline{L^+v}) dx = \langle \mathcal{L}_{\partial\Omega} \Gamma u, \Gamma^+v \rangle = -\langle \Gamma u, \mathcal{L}_{\partial\Omega}^+ \Gamma^+v \rangle$.

Рассмотрим теперь обобщенные постановки граничных задач (ср. [3], [4]). Задача (4) порождает следующую граничную задачу для уравнения (1): найти функцию $u \in D(L_B)$, называемую обобщенным решением, такую, что для любой $v \in D(L_B)$ выполнено интегральное тождество

$$(5) \quad \langle A \circ L_B u, L_B v \rangle = \langle f, v \rangle, \quad f \in D'(L_B),$$

которое можно понимать как задачу решения уравнения $Qu: L'_B \circ A \circ L_B u = f$, где $L'_B: L_2^k(\Omega) \rightarrow D'(L_B)$ – дуальный оператор. Если функция u такова, что $Lu \in D(L^+)$, то граничное условие здесь можно записать в виде: $\Gamma u \in B$; $\Gamma^+ A \mathcal{L} u \in B^+$. Задачу (5) назовем задачей Дирихле, если $B = \{0\}$, и задачей Неймана, если $B = C(L)$. Задачу (5) назовем нормально корректно разрешимой, если пространство $\text{Im } Q \subset D'(L_B)$ совпадает с ортогональным пространством K к ядру $\ker L_B$ и существует непрерывный оператор $R: K \rightarrow D(L_B)$, правый обратный к оператору $Q: D(L_B) \rightarrow K$. Задачу (5) назовем корректно разрешимой, если оператор $Q: D(L_B) \rightarrow D'(L_B)$ имеет непрерывный двусторонний обратный Q^{-1} .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Задача (5) нормально корректно разрешима тогда и только тогда, когда оператор L_B нормально разрешим и оператор $P \circ A$, где $P: L_2^k(\Omega) \rightarrow \text{Im } L_B$ – ортопроектор, является гомеоморфизмом пространства $\text{Im } L_B$ на себя. Задача (5) корректно разрешима тогда и только тогда, когда она нормально корректно разрешима и ядро $\ker L_B$ тривиально.

Из утверждения 1 вытекают полезные следствия.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть расширение L_B разрешимо. Тогда задача (5) корректно разрешима, если и только если оператор A является гомеоморфизмом в пространстве $L_2^k(\Omega)$. Если $A = \text{id}$, то корректность задачи (4) влечет корректную разрешимость задачи (5).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $A = \text{id}$. Задача Дирихле (5) (с $D(L_B) = D(L_0)$) корректно разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие Вишика (2).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть $A = \text{id}$. Задача Неймана (5) (с $D(L_B) = D(L)$) нормально корректно разрешима тогда и только тогда, когда оператор L нормально разрешим, в частности, если выполнено условие Вишика (3) (в этом случае $\text{Im } L = L_2^k(\Omega)$).

ПРИМЕР 1. Рассмотрим обобщенную задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = f$: $\mathcal{L} = \text{grad}$, $\mathcal{L}^+ = \text{div}$, $D(L) = W_2^1(\Omega)$, $D(L_0) = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, $f \in [\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)]'$. Утверждение 3 говорит здесь, что обобщенная задача Дирихле корректно разрешима, если и только если в области Ω справедливо неравенство Фридрихса: $\|\nabla u\| \geq C\|u\| \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega)$, которое является неравенством Вишика для оператора ∇ .

ПРИМЕР 2. Рассмотрим обобщенную задачу Неймана для уравнения Лапласа. Из утверждения 4 вытекает, в частности, что эта задача нормально корректно разрешима в области Ω с конечномерным пространством первых когомологий с коэффициентами в поле $\mathbb{C}$ (например, в ограниченной области с гладкой границей). Действительно, в этом случае по теореме де Рама замкнутое в $L_2^k(\Omega)$ ядро непрерывного оператора rot (= внешний дифференциал) шире образа оператора grad на конечномерное пространство, поэтому пространство потенциальных векторных полей $\nabla W_2^1(\Omega)$ замкнуто в $L_2^k(\Omega)$.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим обобщенную задачу (5) для уравнения (1) со скалярными функциями и операторами, где $A: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ – оператор Немыцкого, заданный отображением a в $\mathbb{R}$: $A(v)(x) = a(v(x))$. Условия: 1) гомеоморфность отображения $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и 2) линейный рост $C_1|\xi| + C_2 \leq a(\xi) \leq C_3|\xi| + C_4$ обеспечивают гомеоморфность отображения A , поэтому корректность задачи (4) по утверждению 2 влечет корректную разрешимость нелинейной задачи (5) с таким оператором A . В частности, отсюда следует корректная разрешимость следующей граничной задачи: $\square a(\square u) = f \in D'(\square_B)$ в единичном круге K , $u \in D(\square_B)$, $a(\square u) \in D(\square_{B^+})$, $\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$, где $D(\square_B) = \{u \in D(\square) | u(\tau) = 0 \text{ на } \Gamma_1 = \{\angle \tau \in \partial K, \frac{\pi}{2} \leq \tau \leq 2\pi\}, u'_\nu(\tau) = 0 \text{ на } \Gamma_2 = \{\angle \tau \in \partial K, \pi \leq \tau \leq \frac{3\pi}{2}\}\}$, $u(\tau) \in B$; $D(\square_B^+) = \{u \in D(\square) | \Gamma^+ u \in B^+\}$, $B^+ = \{u(\tau) | u(\tau) = 0 \text{ на } \mathbb{C}\Gamma_1 = \{\angle \tau \in \partial K, 0 \leq \tau \leq \frac{\pi}{2}\}, u'_\nu(\tau) = 0 \text{ на } \mathbb{C}\Gamma_2 = \{\angle \tau \in \partial K, -\frac{\pi}{2} \leq \tau \leq \pi\}\}$, а функция a удовлетворяет условиям 1), 2).

О корректности задачи (4) с оператором $L_B = \square_B$ см. [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Вишик М. И. // Труды ММО. 1952. Т. 1. С. 187–246. [2] Хермандер Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. М.: ИЛ, 1959. [3] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. [4] Гаевский Х., Греггер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. [5] Burskii V. P. Non-linear boundary value problems, 7, 1997. IAMM Nat. Acad. Sci. Ukraine, 1997.