Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Ладыженская, Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье–Стокса, существование и гладкость, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 2, 45–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm610>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 17:33:28

УДК 517.9

**ШЕСТАЯ ПРОБЛЕМА ТЫСЯЧЕЛЕТИЯ: УРАВНЕНИЯ
НАВЬЕ–СТОКСА, СУЩЕСТВОВАНИЕ И ГЛАДКОСТЬ**

О. А. ЛАДЫЖЕНСКАЯ

В статье излагаются основные результаты по разрешимости основной начально-краевой задачи и задачи Коши для трехмерных нестационарных уравнений Навье–Стокса, а также то, что достаточно сделать для решения шестой проблемы, содержащейся среди семи проблем тысячелетия, объявленных на сайте интернета http://claymath.org/Millennium_Prize_Problems.

Библиография: 59 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	45
§ 2. Начальные результаты 50-х годов по стационарной задаче Стокса ..	50
§ 3. Результаты 50-х годов по нестационарным задачам для системы Стокса и ее обобщений	56
§ 4. О единственности и регулярности обобщенных решений уравнений Навье–Стокса	64
§ 5. Исследования в пространствах L_m , $L_{m,s}$ и пространствах Гёльдера	74
Список литературы	76

§ 1. Введение

В середине 2000 года на сайте Clay Mathematics Institute (<http://claymath.org/>) появилась статья под названием “Millennium Prize Problems”. В ней выделены семь проблем, названных проблемами нового тысячелетия. Каждой из них посвящен свой раздел. Шестой раздел [1] имеет название “Навье–Стокс, существование и регулярность”.¹ Его автор Чарльз Л. Фефферман (Принстонский университет, США) ограничивается двумя простейшими для уравнений Навье–Стокса задачами: задачей Коши и задачей с периодическими по пространственным переменным краевыми условиями. В них жидкость заполняет все пространство. Никаких препятствий (тел) на ее пути нет. Эти задачи отражают часть трудностей, имеющихся в начально-краевых задачах для жидкостей, заполняющих только часть пространства $\mathbb{R}^n$, $n = 2$ или 3.

---

¹В [1], как и в данной статье, речь идет только о несжимаемых жидкостях.

Ч. Фефферман считает физически осмысленными только те решения, которые являются бесконечно-гладкими функциями u , в случае задачи Коши, убывающими быстрее любой степени x . Для той и другой задачи ставятся два вопроса:

- 1) имеет ли она указанного типа решение во все моменты времени $t \in \mathbb{R}_+^1 = [0, \infty)$ или
- 2) существует конечный момент времени t_1 , в который нарушается требуемая гладкость? При этом данные задачи – начальное поле скоростей и внешние силы – предполагаются бесконечно-гладкими и быстро убывающими при x или (x, t) , стремящимися к бесконечности.

Я с моим почти пятидесятилетним опытом исследования уравнений Навье–Стокса и более полувековым опытом исследования краевых и начально-краевых задач для линейных и нелинейных уравнений в частных производных различных типов сформулировала бы главный вопрос относительно уравнений Навье–Стокса совсем иначе, а именно так:

ПРОБЛЕМА 1. *Дают ли уравнения Навье–Стокса вместе с начальными и краевыми условиями детерминистическое описание динамики несжимаемой жидкости или не дают?*

В данной статье я хочу довести до широкого круга математиков, что же достаточно сделать для уравнений Навье–Стокса, чтобы дать ответ на проблему 1. Нетерпеливые или любящие читать работы (книги) в обратном порядке, могут познакомиться с моими выводами в разделе “Заключение”, помещенном в конце § 4.

При решении проблемы 1 выбор фазового пространства и класса обобщенных решений надо предоставить исследователю, не предписывать ему заранее бесконечную или какую-либо иную гладкость решений. Требовать же надо одно – чтобы в выделенном классе обобщенных решений имела место теорема единственности. Целесообразно начинать исследование любой начально-краевой задачи (а также задачи Коши) с нахождения классов единственности.

Именно эта идея была отчетливо сформулирована мною в конце 40-х гг. и реализована для линейных нестационарных уравнений второго порядка разных типов. За основу я взяла энергетические соотношения и ближайшие к ним гильбертовы пространства. Для гиперболических уравнений это пространство $W_2^1(Q_T)$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, для параболических – пространство $W_2^{1,0}(Q_T)$. Обобщенные решения начально-краевых задач для них я взяла именно из этих классов (пространств), определив их с помощью интегральных тождеств в соответствии с этим выбором. Первым этапом было доказательство теорем единственности в этих классах решений. Это удалось сделать непосредственно, голыми руками, не используя ни представлений для решений, ни каких-либо предложений о разрешимости исследуемых или близких к ним задач в классах гладких функций. Второй этап состоял в доказательстве существования по крайней мере одного такого решения. Этот факт доказывался сравнительно просто с помощью метода конечных разностей или метода Галёркина–Фаэдо (историческая справка: Галёркин предложил такого рода аппроксимации для стационарных задач, а Фаэдо для нестационарных). Эти два этапа давали положительный ответ на главный вопрос о детерминированности описания рассмотренных эволюций. Третий этап имеет технический характер. Он состоит в исследовании гладкости найденных обобщенных решений в зависимости от гладкости данных. Как это можно делать, я продемонстрировала на многих задачах (см. [2], [3] и др.). Начинаю я с установления

повышения гладкости решения v по t , а потом по x . Для последнего привлекаются результаты для эллиптических задач. Успех такого порядка исследования гладкости связан с тем, что производная v_t решения v является (пока формально) решением задачи того же типа, что и само v , и потому для $w \equiv v_t$ справедливы утверждения, доказанные для v на первых двух этапах. То, что так найденное w является действительно производной от v по t , проверяется с помощью теоремы единственности, доказанной на первом этапе.

На третьем этапе, в частности, дается ответ – когда же задача имеет классическое решение. У меня еще в памяти годы (сороковые и пятидесятые), когда большинство мэтров (и прежде всего И. Г. Петровский) считали проблему нерешенной, если на избранном пути исследователь не гарантировал существование классического решения. Но и тогда никто не требовал предъявить бесконечно-гладкое или, тем более, аналитическое решение, ибо уже в 30-е годы поняли, что вопросы качественного анализа решений надо отделить от вопросов существования и единственности.

Моя книга [2] “Смешанная задача для гиперболического уравнения” (1953 г.)² была, по-видимому, первой, в которой была сформулирована идея свободы выбора пространств, в которых ищутся решения начально-краевых задач, правила переформулировки всех требований задачи в соответствии с этим выбором, а затем и реализация всех трех этапов, описанных выше. При этом важным было и то, что предложенная форма переформулировки задачи не требовала ее линейности и смогла охватить большинство задач математической физики. Частично эта идеология (программа) содержалась в формулировках 19-й и 20-й проблем Гильберта. А именно, в них имеется важная идея искать решения вариационных задач не в пространствах гладких функций, а в пространствах, диктуемых функционалом. После того как такие, “плохие”, решения пойманы, рассматривать их более детально, т.е. изучать их действительную гладкость в зависимости от гладкости данных. Конечно, при отработке способов исследования начально-краевых задач я руководствовалась этими указаниями, но называть предложенные мною формы определения обобщенных решений задач вариационными вряд ли правильно (а это делается в ряде работ и даже книг; из последних см., например, [5]), ибо большинство из рассмотренных мною уравнений не являются уравнениями Эйлера какого-либо функционала. Сходство между теми и другими по-настоящему, состоящее лишь в том, что там и тут имеются интегральные тождества.

Сделаем еще одно замечание общего характера. Оно относится к выбору “первой ступеньки” в шкале функциональных пространств, с которой “выгоднее всего” начинать исследование задачи. Однозначной рекомендации здесь нет, как нет и обязательных предписаний к выбору всей шкалы пространств. Иногда то и другое четко диктуется задачей (например, гладкостью функций, образующих уравнения), а иногда их можно варьировать, как например, для двумерных нестационарных уравнений Навье–Стокса (для них можно начинать с решений Хопфа и затем двигаться в сторону получения более гладких решений; но такой путь менее выгоден, чем тот, который выбрала я: сначала нашла сравнительно хорошие решения, от которых легко двигаться как в сторону классических решений, так и в сторону слабых решений Хопфа). Но во всех случаях решающая роль принадлежит априорным оценкам, которыми владеет исследователь (при этом я имею в виду исследователей, действительно стремящихся

²Эта книга не переведена на иностранные языки, но мои лекции [3], пропагандирующие те же идеи, изданы Springer-Verlag (см. [4]).

найти новые закономерности, а не занимающихся тиражированием чужих результатов; такое тиражирование действительно может быть “neverending”, как написано в названии статьи [6], а освещение истории вопроса людьми, не читающими оригинальные работы, весьма далеким от действительности).

Вскоре после появления в свет книги [2] мною было сделано одно весьма важное к ней добавление: сформулирована и доказана теорема единственности в классе обобщенных решений из $L_2(Q_T)$, т.е. решений u , о которых известна лишь их принадлежность к пространству $L_2(Q_T)$ ([7], 1954 г.). Такая сильная теорема единственности позволила “почти даром”, только с помощью априорных оценок, гарантировать существование решения задачи, причем сравнительно хорошего. В [7] я реализовала свое юношеское желание – установить для линейных начально-краевых задач аналог основной теоремы линейной алгебры для систем

$$Ax = y, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad A = (A_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

утверждающей, что из единственности следует разрешимость.

Способы доказательства теорем единственности в $L_2(Q_T)$ и гарантированных ими теорем существования проиллюстрированы в [7] на примерах уравнения теплопроводности и волнового уравнения. Кроме этого в [7] сказано, что предложенный метод применим к линейным уравнениям и системам математической физики всех классических типов и, более того, дает возможность исследовать разрешимость задачи Коши для абстрактных уравнений вида

$$\frac{du}{dt} + A(t)u = f(t), \quad u|_{t=0} = u^0, \quad (1.11)$$

и

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A_1(t)\frac{du}{dt} + A_2(t)u = f(t), \quad u|_{t=0} = u^0, \quad \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0} = u^1 \quad (1.12)$$

в гильбертовых пространствах H с неограниченными линейными операторами $A_k(t)$, обладающими теми или иными свойствами (например, самосопряженностью или полуограниченностью) и зависящими от t . Так начался новый этап в изучении дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в бесконечномерных пространствах. Я посвятила ему одну работу [8], а в [9] показала, что дают результаты [8] для уравнений с частными производными разных типов.

Здесь я остановлюсь лишь на одном из приложений результатов работ [7], [8]. Оно касается системы Стокса, а также других линеаризаций уравнений Навье–Стокса. Эти системы являются естественным преддверием к пониманию свойств самих уравнений Навье–Стокса. Они, например, ответственны за теоремы единственности: разность двух возможных решений какой-нибудь начально-краевой задачи (в том числе и задачи Коши) для уравнений Навье–Стокса может трактоваться как решение той же однородной задачи для некоторой линеаризации уравнений Навье–Стокса. Единственность решения этой последней дает единственность исследуемой задачи для самих уравнений Навье–Стокса. Ввиду этого я и начала изучение уравнений Навье–Стокса с их линеаризаций.

Обозначения. Для $u, v \in \mathbb{R}^l, l = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} u \cdot v = uv &= \sum_{i=1}^l u_i v_i, \quad u^2 = \sum_{i=1}^l u_i^2, \quad |u| = \sqrt{u^2}; \\ u_x &= (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}), \quad u_{x_k} = (u_{1x_k}, \dots, u_{lx_k}), \\ u_x^2 &= \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^n u_{ix_k}^2, \quad |u_x| = \sqrt{u_x^2}; \\ u_{xx} &= (u_{x_j x_k}) = (u_{ix_j x_k}), \quad i = 1, \dots, l, \quad j, k = 1, \dots, n; \\ u_{xx}^2 &= \sum_{i=1}^l \sum_{j,k=1}^n u_{ix_j x_k}^2, \quad |u_{xx}| = \sqrt{u_{xx}^2}; \\ v \cdot \nabla v(x) &= \sum_{k=1}^n v_k \cdot v_{x_k}(x) \in \mathbb{R}^n \quad \text{для } v(x) \in \mathbb{R}^n; \\ v \otimes v &= (v_i v_j) - \text{матрица размера } l \times l; \\ v \otimes v \cdot \nabla \eta &= \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \eta_{ix_j}; \end{aligned}$$

Ω – область в $\mathbb{R}^n$; $Q_T = \Omega \times (0, T) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^1$, $Q_{\varepsilon T} = \Omega \times (\varepsilon, T)$, $S_T = \partial\Omega \times [0, T]$.

Функциональные пространства: $L_m(\Omega) = L_m(\Omega; \mathbb{R}^l) = \{u \mid u(x) \in \mathbb{R}^l, |u| \in L_m(\Omega)\}$; норма в них определяется равенством

$$\|u\|_{m,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^m dx \right)^{1/m}, \quad m \geq 1.$$

$L_2(\Omega)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx.$$

Аналогично определяются $L_m(Q_T) = L_m(Q_T; \mathbb{R}^l)$. Пространство $L_{m,s}(Q_T)$ состоит из измеримых функций $u: Q_T \rightarrow \mathbb{R}^l$, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{m,s,Q_T} = \left(\int_0^T \left(\int_{\Omega} |u(x,t)|^m dx \right)^{s/m} dt \right)^{1/s}.$$

Элементами пространства $W_m^s(\Omega) = W_m^s(\Omega; \mathbb{R}^l)$ являются все функции $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^l$, имеющие обобщенные производные по всем x_k до порядка s включительно, суммируемые по Ω со степенью m . Норма в $W_m^s(\Omega)$ есть сумма $L_m(\Omega)$ -норм самой функции u и всех ее производных $\partial_x^k u$, $k \leq s$;

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{W}_{m,0}^1(\Omega) &= \{u \mid u \in W_m^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\}, \\ W_{m,0}^2(\Omega) &= \{u \mid u \in W_m^2(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\}. \end{aligned}$$

Для функций $u: Q_T \rightarrow \mathbb{R}^l$ используются нижеследующие пространства: гильбертово пространство

$$W_2^{1,0}(Q_T) = \{u \mid u, u_x \in L_2(Q_T)\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} = \left(\int_{Q_T} (|u|^2 + |u_x|^2) dx dt \right)^{1/2}$$

и его подпространство

$$W_{2,0}^{1,0}(Q_T) = \{u \mid u \in W_2^{1,0}(Q_T), u|_{S_T} = 0\}.$$

Пространство $W_m^{2,1}(Q_T)$ состоит из всех функций $u \in L_m(Q_T)$, имеющих u_x, u_{xx}, u_t , принадлежащие $L_m(Q_T)$. Норма $\|u\|_{W_m^{2,1}(Q_T)}$ складывается из $L_m(Q_T)$ -норм для u, u_x, u_{xx} и u_t . Энергетическая норма

$$|u|_{Q_T} = \operatorname{vrai} \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{2, \Omega} + \|u_x\|_{2, Q_T}$$

в пространстве $L_\infty((0, T); L_2(\Omega)) \cap L_2((0, T); W_2^1(\Omega))$.

Буква J с разными индексами в обозначении пространств указывает на то, что элементы u этих пространств суть соленоидальные поля (т.е. $\operatorname{div} u = 0$). У нас встретятся такие пространства:

$$J_m(\Omega) = \left\{ u \mid u \in L_m(\Omega; \mathbb{R}^n), \operatorname{div} u = \sum_{i=1}^n u_{ix_i} = 0 \right\},$$

$$J_m^s(\Omega) = \{u \mid u \in W_m^s(\Omega), \operatorname{div} u = 0\}$$

и аналогично $\overset{\circ}{J}_m^1(\Omega)$, $J_{2,0}^{2,1}(Q_T)$ и др.,

$$\dot{C}^\infty(\Omega) = \{u \mid \partial_x^s u \in C(\Omega), \forall s = 0, 1, 2, \dots, \operatorname{supp} u \text{ есть компакт, лежащий в } \Omega\},$$

$$\dot{J}^\infty(\Omega) = \{u \mid u \in \dot{C}^\infty(\Omega), \operatorname{div} u = 0\}.$$

Подпространство $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ пространства $L_2(\Omega)$ есть замыкание множества $\dot{J}^\infty(\Omega)$ в норме $L_2(\Omega)$, а $\overset{\circ}{J}_2(Q_T) = L_2((0, T); \overset{\circ}{J}(\Omega))$.

$H(\Omega)$ есть замыкание $\dot{J}^\infty(\Omega)$ в норме интеграла Дирихле.

§ 2. Начальные результаты 50-х годов по стационарной задаче Стокса

Начнем с основной стационарной задачи для системы Стокса в произвольной ограниченной области Ω евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Для однородного краевого условия она имеет вид

$$-\nu \Delta u + \nabla q = f, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad (2.1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \nu = \operatorname{const} > 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n. \quad (2.2)$$

В ней неизвестными являются поле скоростей $v(x) \in \mathbb{R}^n$ и поле давления $q(x) \in \mathbb{R}^1$, а известными – внешние силы $f(x) \in \mathbb{R}^n$ и краевые значения u (в данном случае они равны нулю). Уравнение $\operatorname{div} u = 0$ указывает на то, что речь идет о несжимаемых жидкостях. Система (2.1) не принадлежит ни к одному из классических типов систем. Однако она связана с условной вариационной задачей о нахождении минимума функционала

$$J(u) = \int_{\Omega} (\nu u_x^2 - 2uf) dx \quad (2.3_1)$$

среди полей u , удовлетворяющих условиям

$$\operatorname{div} u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.3_2)$$

Если эта задача имеет решение u , то для него

$$\delta J(u; \eta) = 2 \int_{\Omega} (\nu u_x \eta_x - f\eta) dx = 0 \quad (2.3_3)$$

для всех допустимых пробных функций η (последние должны удовлетворять условиям (2.3₂)). Проведя в первом члене формальное интегрирование по частям с учетом $\eta|_{\partial\Omega} = 0$, получим тождество

$$\int_{\Omega} (\nu \Delta u + f)\eta dx = 0. \quad (2.3_4)$$

Если бы оно было справедливо для любой гладкой вектор-функции η хотя бы с компактным носителем, лежащим в Ω , и если бы мы знали, что u принадлежит $W_2^2(\Omega')$ для любой $\Omega' \Subset \Omega$ и $f \in L_2(\Omega)$, то из (2.3₄) можно было бы сделать вывод, что $\nu \Delta u + f = 0$ в Ω . Однако (2.3₃) несет в себе существенно меньшую информацию – (2.3₃) справедливо лишь для η , удовлетворяющих обоим условиям из (2.3₂). Более того, если об u известно лишь то, что $u \in W_{2,\text{loc}}^2(\Omega)$, а $f \in L_2(\Omega)$, то переход от (2.3₃) к (2.3₄) можно сделать лишь для соленоидальных η , равных нулю в полной окрестности границы $\partial\Omega$. Ответ на вопрос о том, что следует из таких равенств (2.3₃), дает доказанная мною теорема 2.1. Она является первым опорным камнем на том пути, который начал формироваться в середине 50-х годов для изучения уравнений Навье–Стокса и которому следуют авторы всех монографий по уравнениям Навье–Стокса. Приведем ее здесь:

ТЕОРЕМА 2.1. *Ортогональным дополнением в пространстве $L_2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ к множеству*

$$\dot{J}^\infty(\Omega) \equiv \{u \mid u \in \dot{C}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n), \operatorname{div} u = 0\} \quad (2.4_1)$$

является множество

$$G(\Omega) \equiv \{u \mid u = \nabla p, p \in L_{2,\text{loc}}(\Omega), \nabla p \in L_2(\Omega)\}. \quad (2.4_2)$$

В соответствии с этим

$$L_2(\Omega; \mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}(\Omega) \oplus G(\Omega), \quad (2.4_3)$$

где

$$\overset{\circ}{J}(\Omega) \equiv \{\dot{J}^\infty(\Omega)\}_{L_2(\Omega)} - \text{замыкание } \dot{J}^\infty(\Omega) \text{ в } L_2(\Omega). \quad (2.4_4)$$

Здесь $\dot{C}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ есть множество бесконечно дифференцируемых полей с компактными носителями, лежащими в Ω , а Ω – произвольная область в $\mathbb{R}^n$. С формулировки и доказательства этой теоремы начинается моя книжка [10₁] по уравнениям Навье–Стокса. Я не нашла аналогичного утверждения в работах, выполненных до меня.³

Теорема 2.1 позволила мне кроме пространства $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ ввести еще одно пространство, плотно вложенное в $\overset{\circ}{J}(\Omega)$, а именно пространство

$$H(\Omega) = \{\dot{J}^\infty(\Omega)\}_{D(\Omega)} \quad (2.45)$$

– замыкание $\dot{J}^\infty(\Omega)$ в норме интеграла Дирихле, т.е. в норме

$$\|u\|_{H(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u_x(x)|^2 dx \right)^{1/2} \equiv \|u_x\|_{2,\Omega}. \quad (2.46)$$

Соответствующее (2.46) скалярное произведение в $H(\Omega)$ обозначим так:

$$[u, v] = \int_{\Omega} u_x v_x dx \equiv (u_x, v_x).$$

Для ограниченных областей Ω с не очень плохой границей элементы $G(\Omega)$ суть градиенты ∇p , $p \in W_2^1(\Omega)$, а норма $\|\cdot\|_{2,\Omega} = \|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$ подчинена $\|\cdot\|_{H(\Omega)}$. Благодаря этому и благодаря теореме 2.1 справедливо следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Множество $\dot{J}^\infty(\Omega)$ является плотным в пространстве $H(\Omega)$, а множество элементов $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ в случае ограниченной области Ω является плотным в пространстве $\overset{\circ}{J}(\Omega)$.*

В рамках пары пространств $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ и $H(\Omega)$ задача (2.1), (2.2) исследуется весьма просто и внешне так же, как задача Дирихле для оператора Лапласа в рамках пространств $L_2(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$. Если $f \in L_2(\Omega)$, то задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение u, q , обладающее свойствами:

$$u \in H(\Omega) \cap W_{2,\text{loc}}^2(\Omega), \quad q \in W_{2,\text{loc}}^1(\Omega)$$

(заметим, что давление q всегда определяется с точностью до произвольной константы, но мы этот произвол не отмечаем явно).

Для более полного анализа задачи (2.1), (2.2) надо было доказать аналог так называемого “второго основного неравенства”, установленного мною для всех эллиптических и параболических операторов второго порядка при любом из классических

---

³В работе [11] 1957 года мы использовали теорему 2.1, но не привели ее доказательства, поверив на слово С.Л. Соболеву, что она содержится в его работе [12]. При этом он упомянул и работу Г. Вейля [13]. Позже мы убедились, что в этих работах нет не только доказательства теоремы 2.1, но даже и ее формулировки. Вместо этого есть утверждение о плотности в $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ гладких соленоидальных полей, имеющих нулевую проекцию на нормаль к $\partial\Omega$. Ниже мы обсуждаем этот факт в связи с разложением (2.6₅).

краевых условий ([14], [15], 1950–51 гг., см. также [2] или [3]). Для оператора Лапласа оно имеет вид:

$$\|u_{xx}\|_{2,\Omega} \leq c(\Omega) \|\Delta u\|_{2,\Omega} \quad (2.5_1)$$

для любой $u \in W_{2,0}^2(\Omega)$ (т.е. $u \in W_2^2(\Omega)$, $u|_{\partial\Omega} = 0$). Для задачи (2.1), (2.2) его аналогом является неравенство

$$\nu \|u_{xx}\|_{2,\Omega} + \|q_x\|_{2,\Omega} \leq c(\Omega) \|f\|_{2,\Omega}. \quad (2.5_2)$$

Я предложила доказать его моему тогда еще только начинающему свою научную деятельность ученику В. Солонникову, используя (2.5₁) и представление решения задачи с помощью тепловых потенциалов, данное Оджвистом ([16], см. также [10₁]). Это им было быстро сделано и опубликовано в [17] (полное доказательство дано в [10₁]). Более того, доказательство без труда обобщалось и на случай пространств $L_r(\Omega)$ с любым $r \in (1, \infty)$ (см. [10₂]). Вскоре Каттабрига обобщил результат (2.5₂) на случай $\operatorname{div} u = \varphi \neq 0$ [18], а затем система (2.1) была включена Агмоном, Даглисом, Ниренбергом в класс “обобщенных эллиптических систем”, для которого имеет место пётерова разрешимость задач с краевыми условиями, удовлетворяющими так называемым условиям дополнителности [19].

Оценки (2.5_k), $k = 1, 2$, требуют некоторой гладкости границы, например, они верны для $\partial\Omega \subset C^2$. Для таких Ω при $f \in L_2(\Omega)$ решение задачи u, q обладает свойствами $u \in W_2^2(\Omega)$, $\nabla q \in L_2(\Omega)$, и для него верна оценка (2.5₂).

Вернемся к теореме 2.1. Для областей Ω с гладкими компактными границами с конца 19-го столетия известна возможность представить (причем единственным образом) любое гладкое поле $v \in L_2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ в виде суммы

$$v(x) = u(x) + \nabla q(x), \quad (2.6_1)$$

где u обладает свойствами

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (u.n)|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.6_2)$$

(n есть внешняя нормаль к $\partial\Omega$). Ясно, что из (2.6_k), $k = 1, 2$, следуют равенства

$$\Delta q = \operatorname{div} v, \quad \left. \frac{\partial q}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = (v.n)|_{\partial\Omega}. \quad (2.6_3)$$

Задача (2.6₃), как было установлено в конце 19-го столетия, разрешима (с точностью до произвольной константы) для любого гладкого поля v , а это дает разложение (2.6₁). Было замечено также, что поля u и ∇q ортогональны друг другу в $L_2(\Omega)$, т.е. что

$$\int_{\Omega} u(x) \cdot \nabla q(x) dx = 0. \quad (2.6_4)$$

Благодаря этому, когда в начале 20-го века появился интеграл Лебега и пространства $L_m(\Omega)$ и когда поняли выгоду работать в полных функциональных пространствах, разложение (2.6₁) замкнули в $L_2(\Omega)$ и сделали вывод: пространство $L_2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ разлагается в сумму двух (нетривиальных) подпространств, которые мы обозначим пока $\overset{\vee}{J}(\Omega)$ и $\overset{\vee}{G}(\Omega)$, так что

$$L_2(\Omega; \mathbb{R}^n) = \overset{\vee}{J}(\Omega) \oplus \overset{\vee}{G}(\Omega). \quad (2.6_5)$$

Но такой информации о разложении (2.6₅) явно недостаточно, чтобы вернуться от тождества (2.3₄) с $\eta \in \dot{J}^\infty(\Omega)$ к системе (2.1) или утверждать справедливость следствия 2.1, а оно необходимо для доказательства разрешимости краевых задач для системы Навье–Стокса и ее линеаризаций только с помощью теорем функционального анализа и теорем вложения. Для этого нужна теорема 2.1. По существу, она используется во всех работах и монографиях по уравнениям Навье–Стокса, написанных после 50-х годов, но ссылок в них на [10₁] нет (см. [5], [20]–[24] и др.). Вместо нее ссылаются на работу [13] Г. Вейля и само разложение называют разложением Вейля. То и другое не соответствует действительности: теорема 2.1 не содержится и не вытекает из работы Вейля. Более того, в [13] нет даже и самих разложений (2.6₁), (2.6₅).

Эти последние для $\Omega = \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, встречаются в работах середины 19-го века у физиков (например, у Гельмгольца), а для Ω с гладкими компактными границами у многих исследователей с конца 19-го века (например, Заремба работает в 30-х годах 20-го столетия уже с замыканием (2.6₅)). Желательно, чтобы кто-нибудь затратил время и расставил имена в связи с разложениями (2.4₃) и (2.6₁)&(2.6₂)&(2.6₅).

Что касается самих разложений (2.4₃) и (2.6₅), то они для областей Ω с гладкими компактными границами совпадают, ибо, как доказано в [10_k; гл. I, § 2], $\check{G}(\Omega)$ есть не что иное, как $G(\Omega)$.

Но вернемся к задаче (2.1), (2.2). В соответствии с разложением (2.4₃) введем ортопроектор P из $L_2(\Omega)$ на $\overset{\circ}{J}(\Omega)$, так что

$$PL_2(\Omega) = \overset{\circ}{J}(\Omega), \quad (2.7)$$

и применим его к уравнению (2.1), считая, что каждое слагаемое в нем есть элемент $L_2(\Omega)$. Результат запишем в виде

$$-\nu \tilde{\Delta} u = Pf, \quad \text{где } \tilde{\Delta} = P\Delta. \quad (2.8_1)$$

Оператор $\tilde{\Delta}$ рассмотрим как неограниченный оператор в пространстве $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ и назовем его оператором Стокса.⁴

Для удобства будем считать, что f в (2.1) и (2.8₁) принадлежит $\overset{\circ}{J}(\Omega)$, и переформулируем задачу (2.1), (2.2) как задачу нахождения u , подчиняющегося требованиям

$$-\nu \tilde{\Delta} u = f, \quad u \in H(\Omega) \subset \overset{\circ}{J}(\Omega). \quad (2.8_2)$$

Обобщенным решением этой задачи из класса $H(\Omega)$ является u , принадлежащее $H(\Omega)$ и удовлетворяющее тождеству

$$\nu[u, \eta] = (f, \eta) \quad \text{для всех } \eta \in H(\Omega). \quad (2.8_3)$$

Такое u мы называем обобщенным решением из класса $H(\Omega)$ для задачи (2.1), (2.2). Существование (и единственность) такого решения u непосредственно следует из теоремы Рисса о представимости линейного ограниченного функционала $l_f(\eta) \equiv (f, \eta)$

⁴В [10_k] я через $\tilde{\Delta}$ обозначила оператор $\nu P\Delta$; но обозначение $\tilde{\Delta} = P\Delta$ более естественно.

на $H(\Omega)$ в виде скалярного произведения $[u, \eta]$ с некоторым $u \in H(\Omega)$ (заметим, что для этого от f требуется меньше, чем его принадлежность к $L_2(\Omega)$).

Примечательной стороной такого подхода к исследованию краевых задач является и то, что он позволил доказать существование обобщенных решений у многих нелинейных стационарных задач математической физики, в их числе и уравнений Навье–Стокса ([25] и [26]; см. также [10_k] и др.).

Гладкость решений u из $H(\Omega)$ в $\Omega' \Subset \Omega$ удалось исследовать очень просто (см. [10_k]). Гладкость же u возле границы зависит от гладкости $\partial\Omega$ и анализируется сложнее, с помощью оценки (2.5₂) и ее локального аналога.

Для удобства читателя приведем здесь результаты по линейным стационарным задачам для оператора Стокса в ограниченных областях, используемые в следующих параграфах.

ТЕОРЕМА 2.2. 1) *Задача (2.1), (2.2) имеет единственное обобщенное решение u из $H(\Omega)$ при любой f , являющейся элементом сопряженного к $H(\Omega)$ пространства $H'(\Omega)$. Для него верна оценка*

$$\nu \|u_x\|_{2,\Omega} \leq \|f\|_{(-1),\Omega} = \sup_{\eta \in H(\Omega)} \frac{|(f, \eta)|}{\|\eta_x\|_{2,\Omega}}. \quad (2.9_1)$$

Системе (2.1) оно удовлетворяет в форме (2.8₃). В частности, для f вида $\sum_{k=1}^n \partial f^k / \partial x_k$, $f^k \in L_2(\Omega)$, правая часть (2.9₁) мажорируется

$$\left(\int \sum_{k=1}^n (f^k)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Неограниченный оператор $\tilde{\Delta}$, поначалу определенный на $H(\Omega) \cap W_2^2(\Omega) \subset \mathring{J}(\Omega)$ как произведение $P\Delta$, допускает самосопряженное, положительно-определенное расширение по Фридрихсу. Его спектр дискретен, отрицателен и может быть упорядочен так: $0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \leq \dots$, $\lambda_k \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Система собственных функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ для $\tilde{\Delta}$ может быть ортонормирована в $\mathring{J}(\Omega)$. Она является базисом в $\mathring{J}(\Omega)$ и в $H(\Omega)$.

2) *При не очень плохой границе $\partial\Omega$ полю и соответствует давление $q \in L_2(\Omega)$ и для q верна оценка*

$$\left\| q - \int_{\Omega} q \right\|_{2,\Omega} \leq c(\Omega, \nu) \|f\|_{(-1),\Omega}. \quad (2.9_2)$$

Системе Стокса пара u , q удовлетворяет в смысле тождества

$$\nu(u_x, \eta_x) - (q, \operatorname{div} \eta) = (f, \eta) \quad \forall \eta \in \mathring{W}_2^1(\Omega). \quad (2.9_3)$$

3) *Если дополнительно к п. 1) известно, что $f \in L_{2,\operatorname{loc}}(\Omega)$, то u имеет $u_{xx} \in L_{2,\operatorname{loc}}(\Omega)$, $q \in W_{2,\operatorname{loc}}^1(\Omega)$ и для них верны оценки*

$$\nu \|u_{xx}\|_{2,\Omega''} + \|\nabla q\|_{2,\Omega''} \leq c(\Omega', \Omega'') \|f\|_{2,\Omega'} \quad (2.9_4)$$

при любых $\Omega' \in \Omega'' \in \Omega$.

4) Если $f \in L_2(\Omega)$ и $\partial\Omega \subset C^2$, то $u \in W_2^2(\Omega)$, $\nabla q \in L_2(\Omega)$ и для них верна оценка

$$\nu \|u_{xx}\|_{2,\Omega} + \|\nabla q\|_{2,\Omega} \leq c(\Omega) \|f\|_{2,\Omega} = c(\Omega) \nu \|\tilde{\Delta} u\|_{2,\Omega}. \quad (2.9_5)$$

Кроме того, для резольвенты $\tilde{\Delta}$ справедлива оценка

$$\|(\tilde{\Delta} - \lambda I)^{-1}\|_{2,\Omega} \leq \frac{c(\varepsilon, \Omega)}{|\lambda|}, \quad |\arg \lambda| \leq \pi - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.9_6)$$

5) При условиях п. 4) система $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ является базисом и в $H(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$.

Многое из сказанного в теореме 2.2 справедливо и для неограниченных Ω . Утверждения 1) и 3) были доказаны мною в середине 50-х годов. Утверждение 2) было доказано позднее (см., например, [27], [5]). О результате п. 4) было сказано выше. Последний п. 5) был доказан мною сразу же после доказательства оценки (2.9₅).

§ 3. Результаты 50-х годов по нестационарным задачам для системы Стокса и ее обобщений

Начнем с первой начально-краевой задачи для системы Стокса

$$u_t - \Delta u + \nabla q = f, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad (3.1_1)$$

$$u|_{t=0} = u^0, \quad u|_{S_T} = 0, \quad (3.1_2)$$

в $Q_T = \Omega \times (0, T)$; $S_T = \partial\Omega \times [0, T]$. Случай неоднородного краевого условия легко сводится к однородному. Результаты будем формулировать для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, хотя методы, которыми мы работаем, применимы и для случаев неограниченных Ω , а окончательные выводы в большинстве своем совпадают.

Аналогично стационарной задаче эта задача может быть редуцирована к задаче Коши для одного операторного уравнения

$$\frac{du(t)}{dt} + A_1 u(t) = f(t), \quad u|_{t=0} = u^0, \quad A_1 = -\tilde{\Delta} = -P\Delta, \quad (3.2)$$

в гильбертовом пространстве $\dot{J}(\Omega)$. Свойства оператора A_1 описаны в § 2. Для случая областей Ω с негладкими границами область $D(A_1)$ определения A_1 составляет некоторую часть множества $H(\Omega) \cap W_{2,\text{loc}}^2(\Omega)$, а в случае областей с $\partial\Omega \subset C^2$ $D(A_1) = H(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$. Во всех случаях A_1 является на $D(A)$ самосопряженным, положительно определенным оператором.

Уравнение (3.2) является простейшим представителем класса уравнений (1.1_k), которые я назвала абстрактно параболическими. Из теорем, доказанных мною в [8], [9], для задачи (3.1_k), $k = 1, 2$, вытекают такие следствия.

ТЕОРЕМА 3.1. 1) Однородная задача (3.1_k), $k = 1, 2$, имеет в классе обобщенных решений из $L_2(Q_T)$ только нулевое решение.

2) Для $u^0 \in H(\Omega)$ и $f \in L_2((0, T); \overset{\circ}{J}(\Omega))$ задача (3.1_k), $k = 1, 2$, имеет обобщенное решение u , q , обладающее свойствами: $u_t, \tilde{\Delta}u \in L_2(Q_T)$, $u_{xx}, q_x \in L_2(\Omega' \times (0, T))$, $\Omega' \Subset \Omega$ и $u \in C([0, T]; H(\Omega))$. Для него справедливы неравенства

$$\|u_x(t)\|_{2,\Omega}^2 + \|u_t\|_{2,Q_t}^2 + \|\tilde{\Delta}u\|_{2,Q_t}^2 \leq \|u_x^0\|_{2,\Omega}^2 + \int_0^t \|f\| \|u_t - \tilde{\Delta}u\| dt \quad (3.3)$$

и вытекающие из них оценки

$$\|u_x(t)\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{2}(\|u_t\|_{2,Q_t}^2 + \|\tilde{\Delta}u\|_{2,Q_t}^2) \leq \|u_x^0\|_{2,\Omega}^2 + \|f\|_{2,Q_t}^2, \quad t \in [0, T]. \quad (3.4)$$

3) Если при условиях п. 2) $\partial\Omega \subset C^2$, то u_{xx}, q_x принадлежат $L_2(Q_T)$ и для них верны оценки

$$\|u_{xx}\|_{2,Q_t}^2 + \|q_x\|_{2,Q_t}^2 \leq 2c^2(\Omega)(\|u_x^0\|_{2,\Omega}^2 + \|f\|_{2,Q_t}^2), \quad t \in [0, T]. \quad (3.5)$$

4) Если $u^0 \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$, а f имеет вид $\sum_{i=1}^n \partial_{x_i} F_i(x, t)$ с $F_i \in L_2(Q_T)$, то задача (3.1_k), $k = 1, 2$, имеет обобщенное решение u , принадлежащее $C([0, T]; \overset{\circ}{J}(\Omega)) \cap L_2((0, T); H(\Omega))$. Для него при почти всех $t \in [0, T]$ справедливы энергетическое равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{2,\Omega}^2 + \|u_x(t)\|_{2,\Omega}^2 = - \sum_{i=1}^n (F_i(t), u_{x_i}(t)) \quad (3.6)$$

и вытекающие из него оценки

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{2,\Omega}^2 + \|u_x\|_{2,Q_t}^2 &\leq \|u^0\|_{2,\Omega}^2 + \|F\|_{2,Q_t}^2, \\ \|F\|_{2,Q_t}^2 &= \sum_{i=1}^n \|F_i\|_{2,Q_t}^2, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Системе Стокса оно удовлетворяет в смысле тождества

$$(u(t), \varphi) - (u^0, \varphi) + (u_x(t), \varphi_x) = -(F_i(t), \varphi_x), \quad \forall \varphi \in H(\Omega). \quad (3.8)$$

В (3.8), как и всюду, $(\cdot, \cdot)$ есть скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, скалярном или векторном. В первом пункте утверждается единственность решения задачи (3.1_k), $k = 1, 2$, в классе обобщенных решений из $L_2(Q_T)$. Они определяются так: функция u принадлежит $L_2((0, T); \overset{\circ}{J}(\Omega))$ и удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} &\int_{Q_T} [-u(x, t)\eta_t(x, t) - u(x, t)\tilde{\Delta}\eta(x, t)] dx dt \\ &= \int_{\Omega} u^0(x)\eta(x, 0) dx + \int_{Q_T} f(x, t)\eta(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (3.9)$$

при любой функции η , обладающей свойствами: $\eta \in C([0, T]; H(\Omega))$, $\eta_t, \tilde{\Delta}\eta \in L_2(Q_T)$, $\eta(x, T) = 0$. Никакой информации о давлении при этом не дается. Не гарантировано и наличие давления из $L_2(Q_T)$ в п. 4).

Оправданием допустимости (“законности”) введенных в пп. 1) и 4) обобщенных решений задачи (3.1_k), $k = 1, 2$, служит то, что гладкие решения (если они существуют) совпадают с ними. Кроме того, если мы знаем, что u есть обобщенное решение задачи из класса $L_2(Q_T)$, и если оно имеет u_t и u_{xx} из $L_2(Q_T)$, то для него есть давление $q \in W_2^{1,0}(Q_T)$ и u, q удовлетворяют системе Стокса (3.1₁) (для почти всех $(x, t) \in Q_T$) и всем другим условиям задачи.

В следующем параграфе мы покажем, как теорема 3.1 участвует в доказательстве теорем единственности для уравнений Навье–Стокса. В данном же параграфе опишем, что дает метод, предложенный мною в [7] и использованный в [8], [9], для следующей задачи:

$$Lu = u_t - \Delta u + A_k u_{x_k} + \nabla q = f, \quad (3.10_1)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad u|_{t=0} = u^0, \quad u|_{S_T} = 0. \quad (3.10_2)$$

В ней $A_k = A_k(x, t) = (A_k^{ij}(x, t))$, $i, j = 1, \dots, n$, являются квадратными матрицами, элементы которых обладают свойством

$$A_k^{ij} \in L_{m,s}(Q_T), \quad i, j, k = 1, \dots, n, \quad (3.11_1)$$

с m, s , удовлетворяющими соотношению

$$\frac{n}{m} + \frac{2}{s} = 1, \quad m \in (n, \infty], \quad s \in [2, \infty), \quad (3.11_2)$$

или

$$m = n + \varepsilon, \quad s = \infty \quad \text{с каким-либо } \varepsilon > 0. \quad (3.11_3)$$

Для задачи (3.10_k), $k = 1, 2$, в случае $\partial\Omega \subset C^2$ справедливы результаты типа пп. 2) и 3) теоремы 3.1. Они доказаны в моей работе [28] (1967 г.) методом, который я назвала “функциональным” и о котором было сказано выше в связи с задачей Коши для (1.1_k). Их можно доказать и методом Галёркина, но с “правильно выбранной” фундаментальной системой ([29], 1958 г.). В качестве ее можно взять, например, собственные функции оператора Стокса $\tilde{\Delta}$.

Аналитической основой всех этих методов служит указанная ниже априорная оценка для решений задачи. Она получается из соотношения

$$\int_{Q_t} Lu(u_t - \tilde{\Delta}u) dx d\tau = \int_{Q_t} f(u_t - \tilde{\Delta}u) dx d\tau. \quad (3.12)$$

Из него следует, что

$$\begin{aligned} & \|u_t\|_{2,Q_t}^2 + \|\tilde{\Delta}u\|_{2,Q_t}^2 + \|u_x(t)\|_{2,\Omega}^2 - \|u_x(0)\|_{2,\Omega}^2 \\ & \leq (\|A\nabla u\|_{2,Q_t} + \|f\|_{2,Q_t}) \|u_t - \tilde{\Delta}u\|_{2,Q_t}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $A\nabla u = \sum_k A_k u_{x_k}$. В силу неравенств Коши и Гёльдера

$$\begin{aligned} \|A\nabla u\|_{2,Q_t} &\leq \left(\int_{Q_t} \sum_i \left(\sum_{k,j} A_k^{ij} u_{jx_k} \right)^2 dx d\tau \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{Q_t} \sum_{i,k,j} (A_k^{ij})^2 \sum_{k,j} u_{jx_k}^2 dx d\tau \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{Q_t} |A|^2 u_x^2 dx d\tau \right)^{1/2} \leq \| |A| \|_{m,s,Q_t} \|u_x\|_{\frac{2m}{m-2}, \frac{2s}{s-2}}, \end{aligned} \quad (3.14_1)$$

где

$$|A| = \left(\sum_{n,k,j} (A_k^{ij})^2 \right)^{1/2}.$$

Из (3.13) и (3.14₁) следует

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|u_t\|_{2,Q_t}^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{\Delta} u\|_{2,Q_t}^2 + \|u_x(t)\|_{2,\Omega}^2 - \|u_x(0)\|_{2,\Omega}^2 \\ &\leq (\|A\nabla u\|_{2,Q_t} + \|f\|_{2,Q_t})^2 \leq 2\| |A| \|_{m,s,Q_t}^2 \|u_x\|_{\frac{2m}{m-2}, \frac{2s}{s-2}, Q_t}^2 + 2\|f\|_{2,Q_t}^2. \end{aligned} \quad (3.14_2)$$

Для оценки предпоследнего слагаемого нам требуется мультипликативное неравенство

$$\|v\|_{m,\Omega} \leq \beta(m) \|v_x\|_{2,\Omega}^\alpha \|v\|_{2,\Omega}^{1-\alpha} \quad (3.15_1)$$

с $m \in [2, \frac{2n}{n-2}]$ при $n > 2$ и $\alpha = n(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}) \in [0, 1]$; для $n = 2$ число m можно брать любым конечным. Неравенства (3.15₁) справедливы для любых функций v из $\mathring{W}_2^1(\Omega)$; константы $\beta(m)$ в них не зависят от Ω . Они справедливы и для v , принадлежащих $W_2^1(\Omega) \cap L_1(\Omega)$ и имеющих нулевое среднее

$$\int_{\Omega} v(x) dx = 0. \quad (3.15_2)$$

В этом случае константа β зависит и от Ω , но не меняется при преобразовании подобия области Ω (так что для всех шаров она одна и та же).

Итак, вернемся к (3.14₂) и постараемся мажорировать $\|u_x\|_{m_1,s_1,Q_t}$ с $m_1 = \frac{2m}{m-2}$, $s_1 = \frac{2s}{s-2}$ величиной $|u_x|_{Q_t}$, где

$$|v|_{Q_t} = \operatorname{vrai} \max_{\tau \in [0,t]} \|v(\tau)\|_{2,\Omega} + \|v_x\|_{2,Q_t}. \quad (3.16)$$

Для этого заметим, что для $v = u_{x_k}$ справедливо (3.15₂) и потому верно (3.15₁), т.е.

$$\|u_{x_k}(t)\|_{m_1,\Omega} \leq \beta(m_1) \|\nabla u_{x_k}(t)\|_{2,\Omega}^\alpha \|u_{x_k}(t)\|_{2,\Omega}^{1-\alpha} \quad (3.17)$$

с $\alpha = n(\frac{1}{2} - \frac{1}{m_1})$, $m_1 \in [2, \frac{2n}{n-2}]$, $n > 2$ (или с любым $m_1 < \infty$ при $n = 2$). Из (3.17) следует неравенство

$$\|u_{x_k}\|_{m_1,s_1,Q_t} \leq \beta(m_1) \left(\int_0^t \|\nabla u_{x_k}\|_{2,\Omega}^{\alpha s_1} \|u_{x_k}\|_{2,\Omega}^{(1-\alpha)s_1} d\tau \right)^{1/s_1}.$$

Оно при $s_1 = \frac{2}{\alpha}$ гарантирует неравенство

$$\|u_{x_k}\|_{m_1, s_1, Q_t} \leq \beta(m_1)|u_{x_k}|_{Q_t}, \quad (3.18_1)$$

в котором m_1 и s_1 связаны равенством

$$\frac{n}{m_1} + \frac{2}{s_1} = \frac{n}{2} \quad (3.18_2)$$

с любым $m_1 \in [2, \frac{2n}{n-2}]$ при $n > 2$ и любым $m_1 \in [2, \infty)$ при $n = 2$. Из (3.18₁) следует

$$\|u_x\|_{m_1, s_1, Q_t} \leq n\beta(m_1)|u_x|_{Q_t}. \quad (3.18_3)$$

Легко подсчитать, что если пара m, s удовлетворяет (3.11₂), то пара $m_1 = \frac{2m}{m-2}$, $s_1 = \frac{2s}{s-2}$ удовлетворяет (3.18₂), и мы можем использовать (3.18₃) для оценки предпоследнего члена в (3.14₂). В результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\|u_t\|_{2, Q_t}^2 + \|\tilde{\Delta}u\|_{2, Q_t}^2) + \|u_x(t)\|_{2, \Omega}^2 \\ & \leq \|u_x(0)\|_{2, \Omega}^2 + 2n^2\beta^2(m_1)\|A\|_{m, s, Q_t}^2|u_x|_{Q_t}^2 + 2\|f\|_{2, Q_t}^2, \end{aligned} \quad (3.19_1)$$

где $|\cdot|_{Q_t}$ определена в (3.16).

Так как по условию $\partial\Omega \subset C^2$, то мы можем воспользоваться неравенством (2.9₅). Оно дает

$$\|u_{xx}(t)\|_{2, \Omega} + \|q_x(t)\|_{2, \Omega} \leq \beta_1\|\tilde{\Delta}u(t)\|_{2, \Omega}. \quad (3.19_2)$$

Постоянная $\beta_1 = c(\Omega)$ в нем не меняется при преобразовании подобия области Ω (в частности, она одна для всех шаров), и из (3.19_k), $k = 1, 2$, следует

$$\frac{1}{2}\|u_t\|_{2, Q_t}^2 + \frac{1}{2\beta_1^2}\|u_{xx}\|_{2, Q_t}^2 + \|u_x(t)\|_{2, \Omega}^2 \leq j(t), \quad (3.20_1)$$

где

$$j(t) = \|u_x(0)\|_{2, \Omega}^2 + 2n^2\beta^2(m_1)\|A\|_{m, s, Q_t}^2|u_x|_{Q_t}^2 + 2\|f\|_{2, Q_t}^2.$$

Отсюда сделаем такие выводы:

$$\begin{aligned} \|u_{xx}\|_{2, Q_t} & \leq \beta_1\sqrt{2j(t)}, \quad \sup_{\tau \in [0, t]} \|u_x(\tau)\|_{2, \Omega} \leq \sqrt{j(t)}, \\ |u_x|_{Q_t}^2 & \leq \beta_2^2 j(t), \quad \beta_2 = \sqrt{2}\beta_1 + 1. \end{aligned} \quad (3.20_2)$$

Выберем t_1 из $(0, T]$ так, чтобы

$$\|A\|_{m, s, Q_{t_1}}^2 \leq \frac{1}{4n^2\beta^2(m_1)\beta_2^2}. \quad (3.20_3)$$

Для $t \leq t_1$ из (3.20₂) следует оценка

$$|u_x|_{Q_t}^2 \leq 2\beta_2^2(\|u_x(0)\|_{2, \Omega}^2 + 2\|f\|_{2, Q_t}^2), \quad t \in [0, t_1]. \quad (3.20_4)$$

Из нее и (3.20₁) для $\|u_t\|_{2,Q_t}$ следует

$$\|u_t\|_{2,Q_t}^2 \leq 2j(t) \leq 2(1 + \beta_2^2)(\|u_x(0)\|_{2,\Omega}^2 + 2\|f\|_{2,Q_t}^2), \quad t \in [0, t_1]. \quad (3.20_5)$$

Если наибольшее из t_1 , для которых верно (3.20₃), окажется меньше, чем T , то мы можем повторить рассуждение и получить оценки вида (3.20_k), $k = 1, \dots, 5$, для $t \in [t_1, 2t_1 \wedge T]$, считая $t = t_1$ начальным моментом времени. Так за конечное число шагов установим справедливость оценки

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u_x(t)\|_{2,\Omega} + \|u_{xx}\|_{2,Q_T} + \|u_t\|_{2,Q_T} \leq C(T)(\|u_x(0)\|_{2,\Omega} + \|f\|_{2,Q_T}) \quad (3.20_6)$$

с любым $T < \infty$. Величина $C(T)$ определяется нормами $\|A_k\|_{m,s,Q_t}$, $t \in [0, T]$, а числа m, s подчинены лишь условиям (3.11₂). Константа $C(T)$ зависит и от Ω , но не меняется при дилатации Ω . Доказательство оценки (3.20₆) для случая (3.11₃) близко к случаю (3.11₂) (см. [28]).

Приведу первую из теорем, доказанных в [28].

ТЕОРЕМА 3.2. *Задача (3.10_k), $k = 1, 2$, в $Q_T = \Omega \times (0, T)$ имеет единственное решение $u \in W_2^{2,1}(Q)$, $\nabla q \in L_2(\Omega)$, если $u^0 \in H(\Omega)$, $f \in \overset{\circ}{J}_2(Q_T) \equiv L_2((0, T); \overset{\circ}{J}(\Omega))$. Для него справедлива оценка (3.20₆), причем $u \in C([0, T]; H(\Omega))$.*

(В [28] взято $n = 3$, случай любого $n \geq 2$ делается аналогично.) Доказательство теоремы 3.2 в [28] проведено “функциональным методом”, о котором я писала выше. Состоит он в следующем.

Введем неограниченный оператор B , действующий из гильбертова пространства $\overset{\circ}{J}_2(Q_T) = X$ в гильбертово пространство $Y = \overset{\circ}{J}_2(Q_T) \times H(\Omega)$ по правилу

$$Bv = \{PLv = v_t - \tilde{\Delta}v + PA_kv_{x_k}; v(\cdot, 0)\}, \quad (3.21_1)$$

с областью определения

$$D(B) = \{v \mid v \in W_2^{2,1}(Q_T) \cap C([0, T]; H(\Omega))\}. \quad (3.21_2)$$

Для него удалось дать простое, “прямое” доказательство того, что область значений $\mathcal{R}(B)$ плотна в Y . Этот факт соответствует теореме единственности для обобщенных решений из $L_2(Q_T)$ задачи, сопряженной к (3.10_k), $k = 1, 2$. Доказывается он так: предположим, что $\mathcal{R}(B)$ не плотна в Y . Тогда найдется элемент $\{w; \varphi\} \in Y$, ортогональный к $\mathcal{R}(B)$, т.е. такой, что

$$\int_{Q_T} w.PLv \, dx \, dt + \int_{\Omega} \varphi_x(x)v_x(x, 0) \, dx = 0 \quad (3.22_1)$$

при любом $v \in D(B)$. Построим по $w \in \overset{\circ}{J}_2(Q_T)$ решение U задачи

$$U_t - \tilde{\Delta}U = w, \quad \operatorname{div} U = 0, \quad U|_{t=0} = 0, \quad U \in C([0, T]; H(\Omega)). \quad (3.22_2)$$

Теорема 3.1 гарантирует существование U , принадлежащего $D(B)$. Возьмем в (3.22₁) $v = U$ и результат запишем в виде

$$\int_{Q_T} (U_t - \tilde{\Delta}U)(U_t - \tilde{\Delta}U + PA_k U_{x_k}) dv dt = 0. \quad (3.22_3)$$

Но это соотношение для U такое же, как соотношение (3.12) для u с $f \equiv 0$. Поэтому из него следует для U оценка вида (3.20₆) с правой частью, равной нулю, так что $U(x, t) \equiv 0$. В силу (3.22₂) $w \equiv 0$, и потому тождество (3.22₁) дает

$$\int_{\Omega} \varphi_x(x) v_x(x, 0) dx = 0.$$

Так как это последнее равенство должно выполняться для всех $v \in H(\Omega)$, то из него следует $\varphi \equiv 0$. Таким образом, мы доказали плотность $\mathcal{R}(B)$ в Y .

С другой стороны, (3.20₆) показывает, что замыкание $\mathcal{R}(B)$ в Y дает замыкание $D(B)$ в норме, определяемой левой частью (3.20₆). Но такое замыкание $D(B)$ дает само $D(B)$, и $D(B)$ может быть рассмотрено как замкнутое подпространство $J_{2,0}^{2,1}(Q_T)$ пространства $W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$, состоящее из всех $u \in W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$, имеющих $\operatorname{div} u = 0$. Из всего сказанного следует, что оператор B устанавливает взаимно однозначное соответствие

$$J_{2,0}^{2,1}(Q_T) \xrightleftharpoons[B^{-1}]{B} \mathring{J}_2(Q_T) \times H(\Omega).$$

Таким образом, установлена однозначная разрешимость задачи

$$PLu = f, \quad u|_{t=0} = u^0. \quad (3.23)$$

По ее решению u находится из системы (3.10₁) давление q с $q_x \in L_2(Q_T)$.

Для задачи (3.10_k), $k = 1, 2$, справедлива и теорема единственности в $L_2(Q_T)$, точнее

ТЕОРЕМА 3.3. *Если выполнены условия теоремы 3.2 и если в смысле теории распределений выполнены равенства*

$$\sum_{k=1}^n \partial_{x_k} A_k^{ij}(x, t) = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (3.24)$$

то для задачи (3.10_k), $k = 1, 2$, имеет место теорема единственности в классе $L_2(Q_T)$.

Согласно общей концепции, описанной в начале статьи, обобщенным решением задачи (3.10_k), $k = 1, 2$, в классе $L_2(Q_T)$ называется элемент $u \in \mathring{J}_2(Q_T)$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$- \int_{Q_T} u(\eta_t + \tilde{\Delta}\eta + A_k^* \eta_{x_k}) dx dt = \int_{\Omega} u^0(x) \eta(x, 0) dx + \int_{Q_T} f \eta dx dt \quad (3.25)$$

при любом $\eta \in D(A) = J_{2,0}^{2,1}(Q_T)$ с $\eta(x, T) = 0$. Это определение непротиворечиво, если об f и u^0 мы знаем, например, что $u^0 \in \mathring{J}_2(\Omega)$, а $f \in L_2(Q_T)$. Для более плохих

u^0 и f правую часть (3.25) надо представить в соответствующем виде. Но нас сейчас интересует только теорема единственности, поэтому достаточно иметь дело только с (3.25) при $u^0 = 0$, $f = 0$. В (3.25) A_k^* суть матрицы, транспонированные по отношению к A_k . Они появились при формальном интегрировании по частям в интеграле

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A_k u_{x_k} \cdot \eta \, dx &= \int_{\Omega} A_k^{ij} u_{j x_k} \eta_i \, dx = - \int_{\Omega} (A_k^{ij} u_j \eta_{x_k} + \partial_{x_k} A_k^{ij} u_j \eta_i) \, dx \\ &= - \int_{\Omega} u \cdot A_k^* \eta_{x_k} \, dx \end{aligned}$$

с учетом условия (3.24).

Для доказательства теоремы 3.3 надо убедиться, что из тождества (3.25) с $u^0 = f \equiv 0$ следует $u \equiv 0$. Для этого используем теорему 3.2, заметив, что для матриц A_k^* выполнены условия теоремы 3.2. Она нам гарантирует разрешимость задачи

$$\eta_t + \tilde{\Delta} \eta + P A_k^* \eta_{x_k} = \psi, \quad \eta \in C([0, T]; H(\Omega)), \quad \eta|_{t=T} = 0, \quad (3.26)$$

в Q_T для любого $\psi \in \mathring{J}(Q_T)$ (ибо эта задача преобразуется в задачу вида (3.10_k), $k = 1, 2$, заменой t на $-t$). Подставив это η в (3.25) с $f = u^0 = 0$, получим равенство

$$\int_{Q_T} u \psi \, dx \, dt = 0$$

для любого $\psi \in \mathring{J}_2(Q_T)$, и потому $u = 0$. Теорема 3.3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРЕМЕ 3.2. Если в теореме 3.2 условие $u^0 \in H(\Omega)$ заменить на менее ограничительное (для ограниченных Ω) условие $u^0 \in \mathring{J}(\Omega)$, то решение u, q задачи (3.10_k), $k = 1, 2$, будет обладать $u_t, u_{xx}, q_x \in L_2(Q_{\varepsilon, T})$ и $u \in C([\varepsilon, T]; H(\Omega))$ при любом $\varepsilon \in (0, T)$, а также иметь конечную энергетическую норму. Для него справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} t u_x^2(x, t) \, dx + \int_{Q_t} \tau [u_{xx}^2(x, \tau) + u_{\tau}^2(x, \tau)] \, dx \, d\tau \\ \leq C(T) \left[\int_{Q_t} \tau f^2(x, \tau) \, dx \, d\tau + \|u_x\|_{2, Q_t}^2 \right], \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Это добавление к теореме 3.2 выводится с помощью аппроксимации в метрике $L_2(\Omega)$ начального поля скоростей u^0 функциями $u_m^0 \in H(\Omega) (= \mathring{J}_2^1(\Omega))$. Для каждой из u_m^0 теорема 3.2 гарантирует существование решения u^m, q^m , обладающего свойствами, указанными в теореме 3.2. Чтобы сделать предельный переход по $m \rightarrow \infty$ и получить желаемое, надо доказать для u^m неравенство (3.27). Для этого вместо (3.12) надо взять равенства

$$\int_{Q_t} \tau L u (u_{\tau} - \tilde{\Delta} u) \, dx \, d\tau = \int_{Q_t} \tau f (u_{\tau} - \tilde{\Delta} u) \, dx \, d\tau \quad (3.12')$$

и из них вывести (3.27), следуя тому же плану и используя те же неравенства, что и при выводе оценки (3.20₆).

Именно такой вариант имеется в обзорной статье Галли [30], 2000 г. (без ссылки на работу [28]).

В следующем параграфе мы покажем, что дают теоремы § 2 и § 3 для уравнений Навье–Стокса.

§ 4. О единственности и регулярности обобщенных решений уравнений Навье–Стокса

Уравнения Навье–Стокса для несжимаемых жидкостей в декартовых координатах имеют вид

$$v_t - \nu \Delta v + v \cdot \nabla v + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad (4.1_1)$$

здесь $\nu = \operatorname{const} > 0$ есть коэффициент вязкости, v – поле скоростей, а p – давление. Для жидкостей, заполняющих все пространство $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ или 3), рассматривают задачу Коши: нахождение $v(x, t) \in \mathbb{R}^n$ и $p(x, t) \in \mathbb{R}^1$ для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^1$ ($\mathbb{R}_+^1 = [0, \infty)$) при заданных объемных силах $f(x, t) \in \mathbb{R}^n$ и начальном условии

$$v(x, t)|_{t=0} = v^0(x) \in \mathbb{R}^n. \quad (4.1_2)$$

Значительно более интересными и более трудными являются начально-краевые задачи для (4.1₁), когда жидкость заполняет не все пространство. Главной (первой) из них является задача нахождения v, p в $Q_T = \Omega \times (0, T)$, где Ω есть какая-либо подобласть $\mathbb{R}^n$, на границе которой выполняется условие

$$v|_{S_T} = 0, \quad S_T = \partial\Omega \times [0, T]. \quad (4.1_3)$$

Основное внимание мы уделим задаче (4.1_k), $k = 1, 2, 3$, для ограниченных Ω , хотя все, что будет сказано далее, переносится и на случаи неограниченных Ω , а также на ненулевое краевое условие (4.1₃).

Первые результаты относятся к задаче Коши. Озиев свел ее решение к системе интегральных уравнений, построив для этого функцию Грина. Ему принадлежат и первые результаты по локальной разрешимости задачи Коши (см. [31]). Затем Ж. Лерэ, отправляясь от этой же трансформации задачи Коши, доказал ее глобальную однозначную разрешимость в случае двумерных течений (т.е. для $n = 2$). Этот результат изложен в 4-й главе его диссертации ([32], 1933 г.). Это успех, как отмечает и сам Лерэ, связан с фактом, отмеченным разными учеными (в их числе и Волибнером): $\operatorname{rot} v$ удовлетворяет уравнению параболического типа, для решений которого справедлив принцип максимума. Это давало исследователю априорную оценку $\max_{Q_T} |\operatorname{rot} v(x, t)|$, $Q_T = \mathbb{R}^2 \times (0, T)$. С ее помощью, а также с помощью известной ранее оценки энергетической нормы $|v|_{Q_T}$ Лерэ получил оценки и других, необходимых ему более сильных норм. Но такое счастливое обстоятельство имеет место только в двумерном случае и только в задаче Коши, а также при периодических краевых условиях и при некотором специальном краевом условии, отличном от (4.1₃).

Затем Лерэ публикует свои результаты по задаче (4.1_k), $k = 1, 2, 3$, для двумерных областей Ω и по задаче Коши для $n = 3$ ([33] и [34], 1934 г.). Для первых он строит функцию Грина (для случая ограниченных выпуклых $\Omega \subset \mathbb{R}^2$) и всю задачу сводит к системе интегральных (нелинейных) уравнений. Для их исследования он получает целый ряд оценок для функции Грина и ее производных. При этом работает и теория функций комплексного переменного. С помощью этих очень сложных конструкций и новых для того времени теорем вложения он получает следующие результаты по двумерной задаче (4.1_k), $k = 1, 2, 3$:

- 1) она однозначно разрешима на интервале времени $[0, t^*)$, длина которого t^* не меньше некоторого положительного числа, определяемого данными задачи;

- 2) если данные задачи “достаточно малы”, то задача однозначно разрешима для всех $t > 0$;⁵
- 3) для всех $t > 0$ задача имеет по крайней мере одно “турбулентное” решение; оно регулярно при всех $t > 0$, кроме некоторого замкнутого множества $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}_+^1$, имеющего лебегову меру нуль.

В работе [34] Лерэ доказал аналогичные результаты для задачи Коши в $\mathbb{R}^3$. В этом случае нет сложных конструкций – работает явно выписанный тензор Озина и соответствующая ему система интегральных уравнений. Но, тем не менее, и здесь глобальная однозначная разрешимость осталась под вопросом. Лерэ ратует за “турбулентные решения”. Он (со ссылками и на высказывания Озина) считает, что уравнения Навье–Стокса не удерживают производные v от неограниченного роста даже при $n = 2$. Он пытается найти коллапсирующие решения и высказывает в связи с этим некоторую гипотезу (правда, она не оправдалась, см. [35], 1996 г.).

Долгое время исследования Лерэ не имели продолжения. Отпугивала, видимо, трудность пути, по которому шли все исследователи уравнений Стокса и Навье–Стокса. Для трехмерной задачи (4.1_k), $k = 1, 2, 3$, вообще не было никаких результатов. Но вот, в 1951 г. появилась работа [36] Э. Хопфа. В ней доказывалось для этой задачи глобальное существование по крайней мере одного “слабого решения v ” (т.е. существование решения для всех $t > 0$ без каких-либо ограничений малости на данные задачи). Это решение обладает следующими свойствами.

- 1) $v \in L_\infty((0, T); \overset{\circ}{J}(\Omega)) \cap L_2((0, T); H(\Omega))$ и удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{2} \|v(t)\|_{2,\Omega}^2 + \nu \|v_x\|_{2,Q_t}^2 \leq \frac{1}{2} \|v^0\|_{2,\Omega}^2 + \int_{Q_t} f v \, dx \, d\tau. \quad (4.2_1)$$

Его энергетическая норма мажорируется $\|v^0\|_{2,\Omega}$ и $\|f\|_{2,Q_T}$. Как легко видеть, от f можно требовать меньшего: чтобы

$$f = \sum_{k=1}^n \partial_{x_k} F^k, \quad F^k \in L_2(Q_T). \quad (4.2_2)$$

В этом случае

$$\left| \int_{Q_t} f v \, dx \, d\tau \right| \leq \|F\|_{2,Q_t} \|v_x\|_{2,Q_t}. \quad (4.2_3)$$

- 2) $v \in C_w([0, T]; \overset{\circ}{J}(\Omega))$, т.е. $(v(t), \varphi)$ непрерывно по $t \in [0, T]$ при любой $\varphi \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$.

- 3) $\|v(t) - v^0\|_{2,\Omega} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$.

- 4) Системе Навье–Стокса (4.1₁) v удовлетворяет в смысле тождества

$$\int_{Q_T} (v \eta_t + \nu v \Delta \eta + v \otimes v \cdot \nabla \eta) \, dx \, dt = - \int_{Q_T} f \eta \, dx \, dt \quad (4.2_4)$$

⁵ Для лучшего восприятия существа дела я не указываю явно, какой гладкостью обладают решения и какая при этом была использована гладкость данных. Не поясню также и слова “достаточная малость”.

при любой $\eta \in W_2^{2,1}(Q_T)$, равной нулю на всей границе ∂Q_T и бездивергентной, т.е. $\operatorname{div} \eta = 0$.⁶

Никакой информации о давлении p не дается. Вопросы о связи этого решения с классическим и о единственности таких решений оставлены открытыми. Я назвала решения v , обладающие свойствами 1)–4), слабыми решениями Хопфа. “Турбулентные решения” v , найденные Лерэ для двумерной задачи (4.1) и для задачи Коши, обладают близкими свойствами. Мне кажется, что оба исследователя допускали возможность ветвления таких решений, а тем самым и потерю детерминированности (т.е. единственности).

Следующая работа по разрешимости уравнений Навье–Стокса – это работа [11] (1957 г.) А. А. Киселева и О. А. Ладыженской, посвященная трехмерной задаче (4.1_k) $k = 1, 2, 3$. Она сделана в духе моих предыдущих работ по начально-краевым задачам для разных уравнений, в том числе и для системы Стокса. О существовании работ Лерэ и Хопфа, описанных выше, мы не знали (как не знали их и все люди, с которыми мы общались), и чувства страха перед задачей (4.1_k) у меня не было. Сначала я прикинула, что достаточно знать о решении, чтобы утверждать его единственность, и нашла, что информации $v \in W_2^1(Q_T) \cap L_\infty([0, T]; L_{3+\varepsilon}(\Omega))$ с каким-либо $\varepsilon > 0$ вполне достаточно. Оценка энергетической нормы уже имела. Значит, надо было постараться оценить v_t . Это и было сделано в [11]. Более того, мы сразу оценили энергетическую норму v_t , т.е. нормы $\|v_t\|_{2,\infty,Q_T}$ и $\|v_{tx}\|_{2,Q_T}$, причем не только для точных решений, но и для их галёркинских приближений. Однако сделано это было не для всех $t > 0$, а только на некотором интервале времени $[0, t^*]$, для длины которого мы дали положительную миноранту, определяемую данными задачи. С помощью этой оценки легко устанавливалась теорема существования на интервале $[0, t^*]$. Кроме этого была доказана и разрешимость задачи при всех $t > 0$, если данные задачи в определенном смысле “малы”. Таким образом, в [11] для трехмерной задачи (4.1_k), $k = 1, 2, 3$, доказаны результаты того же типа, что и результаты Лерэ в [33] по двумерной задаче. При этом сделано это значительно проще и без ограничений на форму или размеры Ω . Два года я тянула с опубликованием этих результатов, надеясь снять все ограничения “малости”, т.е. получить глобальную однозначную разрешимость задачи (4.1_k), $k = 1, 2, 3$. Но время шло, а желаемое не получалось, хотя я испробовала все, что было в то время в арсенале теории дифференциальных уравнений в частных производных, включая теорию полугрупп и свои собственные результаты по абстрактным уравнениям (1.1₁). В это время мы узнали о существовании вышеописанных работ Лерэ и Хопфа, пролистав реферативные журналы с момента их существования. Расширения класса классических решений, предложенные в этих работах, вызвали у меня сомнения. Мои подсчеты указывали, что такие классы недопустимо широки, т.е. что в них теряется важное качество задачи (4.1_k) – ее единственность (речь сейчас идет о случае $n = 3$). Позже я смогла подтвердить это мнение примерами [37].

Работа Ж. Лере [33] побудила меня посмотреть на двумерные задачи. Для их решения мне не хватало лишь оценки

$$\|u\|_{4,Q_T} \leq \beta |u|_{Q_T} \quad (4.31)$$

для функций, равных нулю на S_T (энергетическая норма $|u|_{Q_T}$ определена в (3.16)). Так я натолкнулась на неравенства нового типа – мультипликативные неравенства.

⁶ Лерэ и Хопф писали для v тождество (4.2₄). Вместо него можно гарантировать для v тождества иного вида (см. [10_k], $k = 1, 2$).

Первым таким неравенством было неравенство

$$\|u\|_{4,\Omega} \leq \beta \|u_x\|_{2,\Omega}^{1/2} \|u\|_{2,\Omega}^{1/2}, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^2, \quad (4.3_2)$$

справедливое для любой $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$. Постоянная в нем не зависит ни от u , ни от Ω . В качестве нее можно взять $2^{-1/4}$ (в [38] и в [10_k] она подсчитана хуже). Из (4.3₂) следует (4.3₁).

Благодаря (4.3_k), $k = 1, 2$, я смогла оценить $|v_t|_{Q_T}$ через данные задачи без каких-либо ограничений малости и доказать глобальную однозначную разрешимость двумерных задач (4.1_k), $k = 1, 2, 3$, сразу в классе сравнительно хороших решений (причем для любых $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$) ([38], 1958 г.). Дальнейший анализ гладкости таких решений v опирается, по существу, на линейную теорию. В частности, он дает возможность восстановить давление p с $\nabla p \in L_{2,\text{loc}}(Q_T)$ (это верно и для $n = 3$). Отправляясь от таких решений, можно с помощью аппроксимаций данных задачи получить более плохие решения, в их числе и слабые решения Хопфа.

Неравенство (4.3₁) и теорема 3.1 (пп. 1) и 4)) давали и теорему единственности для $n = 2$ в классе слабых решений Хопфа (об этом сказано в [10₁; с. 14], 1961 г.). Приведем здесь соответствующее рассуждение (используемое и для случая $n = 3$).

Пусть v' и v'' суть два слабых решения задачи (4.1_k), $k = 1, 2, 3$. Их разность u есть слабое решение линейной задачи

$$u_t - \nu \Delta u + \nabla q = -(v' \cdot \nabla u + u \cdot \nabla v''), \quad (4.4_1)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad u|_{S_T} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad (4.4_2)$$

имеющее конечную энергетическую норму $|u|_{Q_T}$. Если относительно v' и v'' известно, что они принадлежат $L_4(Q_T)$, то правая часть в (4.4₁) будет вектор-функцией вида

$$F = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F^k}{\partial x_k}$$

с $F_i^k = v'_k u_i + u_k v''_i \in L_2(Q_T)$, и потому в силу п. 4) теоремы 3.1 слабое решение u фактически будет принадлежать пространству $C([0, T]; \overset{\circ}{J}(\Omega))$ и для него верно энергетическое равенство

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{2,\Omega}^2 + \nu \|u_x\|_{2,Q_t}^2 = - \int_{Q_t} u \cdot \nabla v'' \cdot u \, dx \, d\tau = \int_{Q_t} v'' \cdot \nabla u \cdot u \, dx \, d\tau \equiv j(t). \quad (4.5_1)$$

В случае $n = 2$ мы имеем для v' , v'' и u оценку (4.3₁) и потому из (4.5₁) можем заключить, что

$$\|u(t)\|_{2,\Omega}^2 + 2\nu \|u_x\|_{2,Q_t}^2 \leq 2\|v''\|_{4,Q_t} \|\nabla u\|_{2,Q_t} \|u\|_{4,Q_t} \leq 2\beta \|v''\|_{4,Q_t} |u|_{Q_t}^2. \quad (4.5_2)$$

Отсюда следует

$$|u|_{Q_t} \leq (1 + (2\nu)^{-1/2}) \sqrt{2\beta \|v''\|_{4,Q_t}} |u|_{Q_t}, \quad (4.5_3)$$

и потому для $t \in [0, t_1]$, где t_1 выбрано так, чтобы

$$(1 + (2\nu)^{-1/2}) \sqrt{2\beta \|v''\|_{4, Q_{t_1}}} = \frac{1}{2},$$

из (4.5₃) получим $u \equiv 0$. Если t_1 окажется меньше T , то мы можем повторить рассуждение и за конечное число шагов убедиться, что $u \equiv 0$.

В приведенном рассуждении есть два новых для того времени момента: неравенство (4.3₂) и апелляция к теореме 3.1, позволившая без каких-либо специальных конструкций утверждать справедливость для u соотношения (4.5₁). Неравенство (4.3₂) и его польза для изучения уравнений Навье–Стокса стали сразу же после публикации [38] (и ее более подробного изложения [39]) широко известны специалистам по нелинейным проблемам. (Вскоре появилась и публикация Гальярдо [40], посвященная мультипликативным неравенствам.) А вот теорема 3.1 и возможности ее использования для получения энергетических равенств типа (4.5₁) до сих пор недопоняты даже специалистами (в их числе и авторами монографий по уравнениям Навье–Стокса). Примером этому могут служить публикации Г. Проди и Ж. Лионса [41]–[45]. Большая их часть посвящена доказательству для $u = v' - v''$ неравенства

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{2, \Omega}^2 + \nu \|u_x\|_{2, Q_t}^2 \leq \int_{Q_t} v'' \cdot \nabla u \cdot u \, dx \, d\tau \quad (4.6)$$

(из которого тоже следуют (4.5₂) и (4.5₃)). Оправдывать (4.6) надо. Известный формальный вывод его из (4.4₁) нестрог, ибо u не обладает необходимой для этого гладкостью (похоже, что этого не замечает автор обзора [46], делая акцент на вывод заключений типа (4.5_k), $k = 1, 2$, из (4.6), являющийся элементарным следствием мультипликативного неравенства).

Обнаружив неравенство (4.3₂), я, конечно, не ограничилась двумерным случаем, а рассмотрела случай любого n . В связи с обсуждаемыми проблемами меня особо интересовал случай $n = 3$. Для него аналогом (4.3₂) является неравенство

$$\|u\|_{4, \Omega} \leq \beta \|u_x\|_{2, \Omega}^{3/4} \|u\|_{2, \Omega}^{1/4}, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^3, \quad (4.7)$$

для $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$. Оно “хуже” (4.3₂) тем, что в его правой части старший множитель $\|u_x\|_{2, \Omega}$ стоит в степени $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$. Это обстоятельство, например, не позволяет мажорировать $\|v\|_{4, Q_T}$ энергетической нормой $|v|_{Q_T}$, а это, в свою очередь, не позволяет использовать теорему 3.1, пп. 1) и 4), и утверждать, что для слабого решения Хопфа в энергетическом соотношении (4.2₁) имеет место знак равенства. Неравенство (4.7) есть частный случай неравенств

$$\|u\|_{m, \Omega} \leq \beta(m) \|u_x\|_{2, \Omega}^\alpha \|u\|_{2, \Omega}^{1-\alpha}, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \quad (4.8)$$

$$\alpha = n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m} \right), \quad m \in \left[2, \frac{2n}{n-2} \right] \text{ при } n > 2 \text{ и } m \in [2, \infty) \text{ при } n = 2,$$

для $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$. В [47] мы даем доказательство неравенства (4.8) и его обобщений, используя идею рекуррентности по размерности x , предложенную мною в работе [38], 1958 г.

С их помощью доказываются для $u|_{S_T} = 0$ неравенства

$$\|u\|_{m,s,Q_T} \leq \beta(m)|u|_{Q_T}, \quad Q_T = \Omega \times (0, T), \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \quad (4.9_1)$$

с любыми m, s , удовлетворяющими условиям

$$\frac{n}{m} + \frac{2}{s} = \frac{n}{2}, \quad m \in \left[2, \frac{2n}{n-2}\right] \text{ при } n > 2 \text{ и } m \in [2, \infty) \text{ при } n = 2. \quad (4.9_2)$$

Неравенства (4.9_k) для $n = 3$ не привели к решению главной проблемы, но позволили лучше охарактеризовать классы единственности для задач (4.1_k), а именно, доказать следующее предложение.

ТЕОРЕМА 4.1. *Задача (4.1_k), $k = 1, 2, 3$, имеет не более одного слабого решения Хопфа v , принадлежащего пространству $L_{m,s}(Q_T)$ с какими-либо m, s , удовлетворяющими условиям*

$$\frac{n}{m} + \frac{2}{s} = 1, \quad m \in (n, \infty], \quad s \in [2, \infty) \quad (4.10_1)$$

или

$$m = n + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad s = \infty. \quad (4.10_2)$$

Теорема единственности для $m = n = 3, s = \infty$ была доказана много позже. О ней говорится в статье [48], посвященной, в основном, проблеме регулярности решений из $L_{3,\infty}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$.

План доказательства теоремы 4.1 такой же, как описано выше для $n = 2$. В случае $n = 2$ условие (4.10₁) вытекает из предположения, что v есть слабое решение Хопфа. В случае же $n \geq 3$ это не так, ибо норма $\|v\|_{m,s,Q_T}$ не мажорируется нормой $|v|_{Q_T}$. Но из условий теоремы во всех случаях следует, что $v \in L_4(Q_T)$. Действительно, используя неравенство Гёльдера, оценим $\|v\|_{4,Q_t}^4$ так:

$$\int_{Q_t} v^4 dx d\tau \leq \|v\|_{m,s,Q_t}^2 \|v\|_{\frac{2m}{m-2}, \frac{2s}{s-2}, Q_t}^2 \leq \|v\|_{m,s,Q_t}^2 \beta^2 |v|_{Q_t}^2. \quad (4.11)$$

При этом мы использовали то, что показатели $\frac{2m}{m-2}, \frac{2s}{s-2}$ удовлетворяют в силу (4.10₁) условию (4.9₂). Заметим, что (4.11) справедливо и для пары $m = n, s = \infty$. Благодаря ему мы можем воспользоваться теоремой 3.1, пп. 1) и 4), и утверждать, что для u справедливы соотношения (4.5₁). Из них в случае (4.10₁) выводится заключение $u = 0$ так же, как это было сделано выше для $n = 2$. Такое же заключение в случае (4.10₂) делается немного иначе (см. [10₂; гл. VI, §2]). Теорема доказана. (В работе [44] проводится кропотливое доказательство того, что для u справедливо неравенство (4.6). Остальная часть доказательства проводится так же, с использованием тех же мультипликативных неравенств, только со ссылкой на работу Гальярдо [40].)

В работе [49] Дж. Серрина имеется усиление теоремы 4.1, данное им и Сафером. Они доказали совпадение слабого решения v'' , принадлежащего $L_{m,s}(Q_T)$ с m, s , удовлетворяющими (4.10₁), с любым слабым решением v' той же задачи. Возможность такого обобщения усматривалась из соотношений (4.5₁) или (4.6), содержащих в качестве коэффициента лишь одно из решений – решение v'' . Но справедливость (4.5₁) доказана нами с использованием того, что оба решения удовлетворяют условиям теоремы 4.1. Сафер и Серрин доказывают для $u = v' - v''$ справедливость неравенств (4.6). Остальная часть доказательства такая же, как описано выше.

Другое усиление теоремы 4.1 дано мною в работе [28] 1967 г., о которой мы говорили выше, в связи с задачей (3.10_k), $k = 1, 2$. Оно следующее:

ТЕОРЕМА 4.2. *Задачи (4.1_k), $k = 1, 2, 3$, $n \geq 2$, имеют не более одного обобщенного решения v из класса $L_{m,s}(Q_T)$ с m, s , удовлетворяющими условиям (4.10₁) или (4.10₂), если $\partial\Omega \subset C^2$.*

Подчеркнем, что в этой теореме v не обязано быть слабым решением Хопфа. Пусть v' и v'' суть два решения задачи. Они являются соленоидальными полями, удовлетворяющими всем остальным условиям задачи в форме интегрального тождества

$$-\int_{Q_T} [v(\eta_t + \nu\Delta\eta) + v_k v_i \eta_{ix_k}] dx dt = \int_{Q_T} f \eta dx dt + \int_{\Omega} v^0(x) \eta(x, 0) dx \quad (4.12_1)$$

для всех соленоидальных полей $\eta \in W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$ с $\eta(x, T) = 0$. Из подсчетов, сделанных выше, видно, что $v_k v_i \eta_{ix_k} \in L_1(Q_T)$. Все остальные члены, стоящие под знаками интегралов в (4.12₁), тоже являются суммируемыми функциями. Для разности $u = v' - v''$ из (4.12₁) следует тождество

$$\int_{Q_T} u[\eta_t - \nu\Delta\eta + (v'_k \eta_{x_k} + v''_k \nabla \eta_k)] dx dt = 0 \quad (4.12_2)$$

для тех же η , что и (4.12₁). Возьмем в нем в качестве η решение задачи

$$\begin{aligned} \eta_t + \nu\Delta\eta + (v'_k \eta_{x_k} + v''_k \nabla \eta_k) + \nabla q &= \mathcal{F}, \\ \eta|_{t=T} &= 0, \quad \eta|_{S_T} = 0, \quad \operatorname{div} \eta = 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

с любым $\mathcal{F} \in \mathring{J}_2(Q_T)$. Это возможно, ибо такое η согласно теореме 3.2 существует и принадлежит $W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$. Подставляя его в (4.12₂), получим $\int_{Q_T} u \mathcal{F} dx dt = 0$. Отсюда следует, что $u \equiv 0$. Случай (4.10₂) рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Теперь сформулируем главный результат моей работы [28], 1967 г., касающийся гладкости решений из $L_{m,s}(Q_T)$:

ТЕОРЕМА 4.3. *Пусть в задаче (4.1_k), $k = 1, 2, 3$, $n \geq 2$, $f \in L_2(Q_T)$, $v^0 \in H(\Omega)$ и $\partial\Omega \subset C^2$, и пусть v есть ее обобщенное решение класса $L_{m,s}(Q_T)$ с m, s , удовлетворяющими условиям (4.10₁) или (4.10₂). Тогда фактически $v \in W_{2,0}^{2,1}(Q_T) \cap C([0, T]; H(\Omega))$, $\nabla p \in L_2(Q_T)$, v, p удовлетворяют уравнениям Навье–Стокса (при почти всех $(x, t) \in Q_T$) и всем другим требованиям задачи. Их нормы $\sup_{t \in [0, T]} \|v_x(t)\|_{2, \Omega}$, $\|v_{xx}\|_{2, Q_T}$, $\|v_t\|_{2, Q_T}$ и $\|p_x\|_{2, Q_T}$ мажорируются нормами данных $\|f\|_{2, Q_T}$ и $\|v_x^0\|_{2, \Omega}$.*

Справедливость этой теоремы выводится из теорем 3.2 и 3.3 следующим образом. Рассмотрим в Q_T линейную задачу

$$\begin{aligned} \partial_t u - \nu\Delta u + v \cdot \nabla u + \nabla q &= f, \quad \operatorname{div} u = 0, \\ u|_{t=0} &= v^0, \quad u|_{S_T} = 0, \end{aligned} \quad (4.14_1)$$

в которой исследуемое v играет роль известного коэффициента. В силу теоремы 3.2 задача (4.14₁) имеет решение $u \in \mathring{W}_{2,0}^{2,1}(Q_T)$, а в силу теоремы 3.3 это решение должно

совпасть с v , ибо v тоже является обобщенным решением из класса $L_2(Q_T)$ той же задачи (4.14₁).

Теорема 4.3 справедлива при любом $n \geq 2$, однако только для $n = 2$ и 3 из $v \in W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$ следует, что $v \in L_{m_1, s_1}(Q_T)$ с m_1, s_1 , большими, чем исходные m, s , точнее, с m_1, s_1 , удовлетворяющими соотношению

$$\frac{n}{m_1} + \frac{2}{s_1} = \frac{n-2}{2} < 1 = \frac{n}{m} + \frac{2}{s}. \quad (4.14_2)$$

Это следует из известной теоремы вложения $W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$ в $L_{m_1, s_1}(Q_T)$, где m_1, s_1 удовлетворяют (4.14₂).

Дальнейшее увеличение гладкости решений v из $W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$ для $n = 2$ и 3 при увеличении гладкости данных прослеживается уже с помощью результатов по системе Стокса. До шестидесятых годов это было сделано в рамках гильбертовых пространств $W_2^{2k,k}(Q_T)$, а внутренняя гладкость и в других пространствах [10₁]. С 1960 г. начались публикации работ моих молодых сотрудников К.К. Головкина и В.А. Солонникова, посвященных исследованию системы Стокса в пространствах $L_m(Q_T)$ и Гёльдера $H^{\alpha, \alpha/2}(\overline{Q_T})$. Часть этих результатов описана уже в первом издании моей монографии по уравнениям Навье–Стокса, а их полные доказательства даны в [50], [51]. Эти результаты давали более дифференцированное описание свойств решений задачи (3.1_k) системы Стокса и позволяли утверждать, что такими же свойствами гладкости обладают и решения v системы Навье–Стокса, принадлежащие классу $W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$ для $n = 2$ или 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Решение v из теоремы 4.3 для $n = 2$ или 3 допускает однозначное продолжение как решение из $W_2^{2,1}(Q_{T+T^*})$ задачи (4.1_k), $k = 1, 2$, с $f \in L_2(Q_{T+T^*})$. Для величины T^* можно дать положительную миноранту, зависящую лишь от норм $\|v_x(T)\|_{2,\Omega}$, $\|f\|_{2,Q_{T+T^*}}$ и некоторых констант из теорем вложения, характеризующих область Ω .

Справедливость замечания 4.1 следует из того, что теорема 4.3 гарантирует конечность нормы $\|v_x(T)\|_{2,\Omega}$, а для таких начальных данных (при $n = 2$ или 3) система Навье–Стокса с нулевым краевым условием имеет решение $v \in W_{2,0}^{2,1}(\Omega \times (T, T+T^*))$, $\nabla p \in L_2(\Omega \times (T, T+T^*))$.

Для полноты картины выделим это последнее предложение в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 4.4. Задача (4.1_k), $k = 1, 2, 3$, при $f \in L_2(Q_T)$, $v^0 \in H(\Omega)$ и $\partial\Omega \subset C^2$ в случае $n = 2$ имеет единственное решение $v \in W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$, $\nabla p \in L_2(Q_T)$ во всем Q_T при любом T .

При $n = 3$ решение v, p с такими же свойствами существует на некотором интервале времени $[0, T^*]$, $0 < T^* \leq T$, длина которого определяется нормами $\|v_x^0\|_{2,\Omega}$, $\|f\|_{2,Q_T}$ и некоторыми числовыми характеристиками Ω . Если некоторое “обобщенное число Рейнольдса”, определяемое этими $\|v_x^0\|_{2,\Omega}$, $\|f\|_{2,Q_T}$ и Ω , “мало”, то решение существует во все моменты времени.

Во всех указанных случаях дается оценка для $\|v\|_{W_{2,0}^{2,1}(Q_T)}$ и $\|\nabla p\|_{2,Q_T}$.

Я, как и выше, не привожу полных формулировок теорем с указанием явных значений входящих в них мажорант. В моих публикациях они часто подсчитаны не наилучшим образом и возможны разные их варианты.

Доказывается теорема 4.4 так же, как аналогичные утверждения в нашей работе [11] 1957 г., только для оценок нелинейных членов надо привлечь неравенство (2.5₂) или, что то же, неравенство

$$\|u_{xx}\|_{2,\Omega} \leq c(\Omega) \|\tilde{\Delta}u\|_{2,\Omega}, \quad (4.15)$$

справедливое для любых $u \in W_2^2(\Omega) \cap H(\Omega)$, а в качестве базисных функций в методе Галёркина взять собственные функции оператора Стокса (вместо них можно брать другие системы, но так, как это указано в работе [29] 1958 г.). В первом издании книги [10₁] я, экономя место, не привела ее, указав только, что в разных главах изложены разные методы доказательства и методы одной главы можно применять к другой, получая различные варианты теорем, изложенных в книге. Во второе русское издание книги я включила теорему 4.4, правда только для случая $n = 3$. Приведу еще одну мою теорему из [10₂] (теорема 12', гл. VI).

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть для всех решений v^λ из $W_2^{2,1}(Q_T)$ трехмерных задач

$$\begin{aligned} v_t - \nu \Delta v + \lambda v \cdot \nabla v + \nabla p &= f, \quad \operatorname{div} v = 0, \\ v|_{S_T} &= 0, \quad v|_{t=0} = v^0, \quad \lambda \in [0, 1] \end{aligned} \quad (4.16)$$

в $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, с фиксированными $f \in L_2(Q_T)$, $v^0 \in H(\Omega)$ и $\partial\Omega \in C^2$ имеется общая мажоранта M в неравенстве

$$\|v^\lambda\|_{m,s,Q_T} \leq M < \infty \quad (4.17_1)$$

для каких-либо показателей m, s , удовлетворяющих условиям (4.10₁) или (4.10₂). Тогда все эти задачи (4.16) действительно имеют решения $v^\lambda \in W_2^{2,1}(Q_T) \cap C([0, T]; H(\Omega))$, $\nabla p^\lambda \in L_2(Q_T)$.

Справедлив еще один вариант условной теоремы:

ТЕОРЕМА 4.6. Пусть для всех решений $v^{(k)}$ из $W_2^{2,1}(Q_T)$ трехмерных задач

$$\begin{aligned} v_t - \nu \Delta v + v_{(\rho_k)} \cdot \nabla v + \nabla p &= f, \\ \operatorname{div} v &= 0, \quad v|_{t=0} = v^0, \quad v|_{S_T} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.18_1)$$

с $\rho_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и $f \in L_2(Q_T)$, $v^0 \in H(\Omega)$ равномерно ограничены нормы $\|v^{(k)}\|_{m,s,Q_T} \leq M$ с какими-либо M и m, s , удовлетворяющими условиям (4.10₁) или (4.10₂). Тогда задача (4.1_k), $k = 1, 2, 3$, тоже однозначно разрешима в Q_T , причем $v \in W_2^{2,1}(Q_T)$, $\nabla p \in L_2(Q_T)$.

В системе (4.18₁) символ $v_{(\rho)}$ означает усреднение v с гладким ядром, имеющим носитель радиуса ρ . Точнее, в качестве $v_{(\rho)}$ можно взять

$$v_{(\rho)}(x, t) = \kappa \rho^{-n} \int_{|x-y|<\rho} \omega\left(\frac{|x-y|}{\rho}\right) v(y, t) dy \quad (4.18_2)$$

с $\kappa^{-1} = \int_{\mathbb{R}^3} \omega(|y|) dy$ и $\operatorname{supp} \omega$, лежащим в единичном шаре, или

$$v_{(\rho)}(x, t) = \rho^{-1} \int_{t-\rho}^t v(x, \tau) d\tau. \quad (4.18_3)$$

В случае (4.18₂) усреднения надо брать от $v(y, t)$, продолженной нулем для $y \notin \Omega$.

При том и другом усреднении задача (4.18₁) глобально однозначно разрешима в разных классах обобщенных решений, если только $\rho_k > 0$. При условиях теоремы 4.6 она имеет решение $v^{(k)} \in W_2^{2,1}(Q_T)$, $\nabla p^{(k)} \in L_2(Q_T)$. Системы (4.18₁) с так “сглаженным” v в третьем члене предлагались мною еще в 50-х годах в качестве возможных замен (регуляризаций) уравнений Навье–Стокса при больших градиентах скоростей. Их глобальную однозначную разрешимость можно доказать, например, методом Галёркина с базисом, составленным из собственных функций оператора Стокса.

Из изложенного сделаем следующие выводы.

Заключение. Основная проблема о глобальной однозначной разрешимости трехмерной задачи (4.1_k), $k = 1, 2, 3$, в $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, сведена нами к вопросу о нахождении априорной оценки (4.17₁) с каким-либо $M < \infty$ и какими-либо (m, s) , удовлетворяющими условиям

$$\frac{3}{m} + \frac{2}{s} = 1, \quad m \in (3, \infty], \quad s \in [2, \infty) \quad (4.17_2)$$

или

$$m = 3 + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad s = \infty, \quad (4.17_3)$$

для всех возможных решений $v^\lambda \in W_2^{2,1}(Q_T)$ задач (4.16) с $f \in L_2(Q_T)$, $v^0 \in H(\Omega)$. Мажоранта M при этом должна определяться $\|f\|_{2, Q_T}$, $\|v_x^0\|_{2, \Omega}$ и Ω . Если такая оценка (4.17₁) есть, то задачи (4.16) действительно имеют решения $v^\lambda \in W_2^{2,1}(Q_T)$, $\nabla p^\lambda \in L_2(Q_T)$. В противном случае, если для каких-либо m, s из (4.17₂) или (4.17₃) имеет место

$$\sup_{\lambda \in [0, 1]} \|v^\lambda\|_{m, s, Q_T} = \infty, \quad (4.17_4)$$

то будет наблюдаться коллапс. Все сказанное верно, если вместо v^λ взять решения $v^{(k)}$ задач (4.18₁).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Многие предложения, сформулированные выше, справедливы и для $\Omega = \mathbb{R}^n$. В частности, теорема 4.3 верна и для $\Omega = \mathbb{R}^3$. Это видно из данных выше рассуждений, использующих только те неравенства (в частности, мультипликативные неравенства), константы в которых не меняются при раздувании области Ω .

Отметим также, что результаты, изложенные в предыдущих параграфах, позволили рассмотреть задачу Стокса (3.1_k) во всех фазовых пространствах $H^s(\Omega) = D((-\tilde{\Delta})^{s/2})$. Каждое из них является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(u, v)_s = \int_{\Omega} (-\tilde{\Delta})^{s/2} u \cdot (-\tilde{\Delta})^{s/2} v \, dx.$$

Здесь $\tilde{\Delta}$ есть самосопряженный оператор, описанный в § 2, а $H^1(\Omega)$ совпадает с $H(\Omega)$ из (2.4₅).

Для $\partial\Omega \subset C^2$ неравенство (4.15) и интерполяционное неравенство, связывающее пространства $\mathring{J}(\Omega)$ и $H^2(\Omega) = W_2^2(\Omega) \cap H(\Omega)$, дали хорошее описание пространств $H^s(\Omega)$ при всех $s \in [0, 2]$ – они являются подпространствами пространств $W_2^s(\Omega)$. Такая информация об $H^s(\Omega)$ позволила привлечь теоремы вложения для $W_2^s(\Omega)$, а это

требуется при исследовании нелинейных членов, входящих в уравнения Навье–Стокса. Пространства $H^s(\Omega)$ позволяют более дифференцированно описать свойства разрешающего оператора задачи (3.2) – оператора $e^{t\tilde{\Delta}}$, и свойства решений задачи Коши (3.2) при разных предположениях о данных v^0 и f . Такой анализ и его использование для исследования разрешимости задачи (4.1_k), $k = 1, 2, 3$, в фазовых пространствах $H^s(\Omega)$ был проведен Фуджита и Като (см. [52] и др.), а также многими другими специалистами по теории полугрупп. Однако качественно новых по сравнению с работами [34], [11] результатов по однозначной разрешимости уравнений Навье–Стокса он не дал – та же локальная по времени разрешимость для “не очень плохих” начальных данных и силах и разрешимость при всех $t > 0$ для “малых” данных. Только выражено это в терминах функциональных пространств $H^s(\Omega)$.

В 1966 году я нашла один случай трехмерной задачи для системы Навье–Стокса, для которого удалось доказать глобальную однозначную разрешимость задачи Коши и одной начально-краевой задачи в $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, являющейся областью вращения вокруг оси x_3 ([53], [54], [10₂], см. также [55]). Все данные задачи и решения обладают вращательной симметрией, а именно, цилиндрические компоненты поля скоростей $v = (v_r, v_\varphi, v_z)$ и сил $f = (f_r, f_\varphi, f_z)$, а также давление p не зависят от угла вращения φ и, кроме того, $v_\varphi \equiv 0$ и $f_\varphi \equiv 0$. В данном случае мы имеем дело с трехмерной ситуацией, но не во всей ее силе (случай же, когда ось вращения x_3 отделена от Ω , является, по существу, двумерным, и глобальная разрешимость в таких областях, причем без предположения $v_\varphi \equiv 0, f_\varphi \equiv 0$, была доказана мною еще в 1958 г.). Успех в ее исследовании опять-таки связан с новой априорной оценкой.

В §5 мы кратко расскажем о последующих атаках на задачу (4.1_k), $k = 1, 2, 3$.

§5. Исследования в пространствах $L_m, L_{m,s}$ и пространствах Гёльдера

Все описанное выше было сделано в рамках гильбертовых пространств $L_2, W_2^k(\Omega), W_2^{2k,k}(Q_T)$. После этого было естественным привлечь банаховы пространства $L_m, H^{2\alpha,\alpha}(Q_T)$ и другие и попытаться в них получить для решений линеаризованных уравнений Навье–Стокса и, прежде всего, системы Стокса (стационарной и нестационарной) оценки, аналогичные тем, о которых сказано в §§ 2 и 3. Ориентиры давали случаи, когда $\Omega = \mathbb{R}^n$. Для них можно применить преобразования Фурье в пространствах $x \in \mathbb{R}^n$ или $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$, решить явно полученные системы для Фурье-образов, а затем вернуться в x или (x, t) -представление и сделать выводы, используя теоремы о мультипликаторах Марцинкевича или их обобщения.

На этом пути я подсчитала, например, что слабые решения Хопфа v трехмерной задачи Коши для уравнений Навье–Стокса имеют производные v_t и v_{xx} , суммируемые по $Q_T = \mathbb{R}^3 \times (0, T)$ со степенью $5/4$ (если f принадлежит $L_{5/4}(Q_T)$). Для этого я использовала теорему Марцинкевича для случая интегралов Фурье⁷ и мультипликативные неравенства. С помощью этих же аргументов устанавливается и то, что для слабых решений Хопфа v справедливы включения:

$$v_t, v_{xx} \in L_{m,s}(\mathbb{R}^3 \times (0, T)) \quad (5.1_1)$$

⁷Мое указание в [10_k], что этот вариант теоремы Марцинкевича сделан С.Г. Михлиным в [56], неверно (хотя это мне было сообщено самим автором). В [56] и других публикациях С.Г. Михлина имеется огрубленный вариант, непригодный для уравнений Стокса и даже для параболических уравнений.

с любыми m, s , удовлетворяющими соотношениям

$$\frac{3}{m} + \frac{2}{s} = 4, \quad m \in \left[1, \frac{3}{2}\right], \quad s \in [1, 2]. \quad (5.1_2)$$

Этим же $L_{m,s}$ принадлежит и ∇p .

Выделим в форме теоремы то, что дают известные варианты теоремы Марцинкевича для задачи Коши:

ТЕОРЕМА 5.1. *Задача Коши*

$$u_t - \Delta u + \nabla q = f, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad u|_{t=0} = 0 \quad (5.2_1)$$

при $f \in L_{m,s}(Q_T)$, $Q_T = \mathbb{R}^n \times (0, T)$, с $m, s \in (1, \infty)$ имеет единственное решение, обладающее свойствами

$$u_t, u_{xx}, \nabla q \in L_{m,s}(Q_T). \quad (5.2_2)$$

Для него верна оценка

$$\|u_t, u_{xx}, \nabla q\|_{L_{m,s}(Q_T)} \leq C(m, s, n) \|f\|_{L_{m,s}(Q_T)}. \quad (5.2_3)$$

В пространстве Гёльдера $H^{\alpha, \alpha/2}(Q_T)$ справедлива

ТЕОРЕМА 5.2. *Задача (5.2₁) при $f \in H^{\alpha, \alpha/2}(Q_T)$, $\alpha \in (0, 1)$, имеет единственное решение, обладающее свойствами*

$$u_t, u_{xx}, \nabla q \in H^{\alpha, \alpha/2}(Q_T). \quad (5.3_1)$$

Для него верна оценка

$$\|u_t, u_{xx}, \nabla q\|_{H^{\alpha, \alpha/2}(Q_T)} \leq c(\alpha, n) \|f\|_{H^{\alpha, \alpha/2}(Q_T)}. \quad (5.3_2)$$

Для ее доказательства надо использовать данный мною критерий того, когда $m(\xi)$ является мультипликатором в пространствах $H^{\alpha, \alpha/2}(Q_T)$ ([57]; в этой публикации есть и приложения этого критерия к системам, включающим в себя систему (5.2₁)).

Результаты, аналогичные теоремам 5.1 и 5.2, доказаны к настоящему времени и для решений начально-краевых задач (3.1_k), $k = 1, 2, 3$, в областях произвольной формы $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Достигнуто это с помощью большого труда и сложной техники. Даже случай полупространства $\mathbb{R}_+^3$ и тот исследуется долго с использованием точных оценок для сингулярных операторов. Такие исследования начали проводиться с конца 50-х годов моими учениками В. А. Солонниковым, К. К. Головкиным и О. В. Гусевой, давшими разные представления для решений и функций Грина в полупространстве. Это направление исследований системы Стокса освещается в статье В. А. Солонникова, написанной для данного тома “Успехов” [58]. Полученные на этом пути результаты использовались затем для изучения решений уравнений Навье–Стокса. Качественно новых результатов по разрешимости уравнений Навье–Стокса они не дали, но зато

углубили наши знания свойств гладкости обобщенных решений разных классов. Результаты, полученные на этом пути, позволили В. А. Солонникову получить оценку резольвенты

$$\|(\tilde{\Delta} - \lambda I)^{-1}\|_{m,\Omega} \leq \frac{c(m, \varepsilon, \Omega)}{|\lambda|}, \quad |\arg \lambda| \leq \pi - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (5.4)$$

с любым $m \in (1, \infty)$, необходимую при анализе задач (3.2) и (4.1_k), $k = 1, 2, 3$, методами теории полугрупп.

Нечто качественно новое по разрешимости уравнений Навье–Стокса получено недавно в работах А. Бабина, А. Махалова и Б. Николаенко. Оно освещается в данном номере “Успехов” в статье [59].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ch. Fefferman. Existence & smoothness of the Navier–Stokes equation // http://claymath.org/Millennium_Prize_Problems/Navier-Stokes_Equations. Cambridge, MA: Clay Mathematics Institute, 2000. P. 1–5.
- [2] О. А. Ладыженская. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М.: Гостехиздат, 1953.
- [3] О. А. Ладыженская. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
- [4] О. А. Ladyzhenskaya. The Boundary Value Problems of Mathematical Physics. New York: Springer-Verlag, 1985. (Appl. Math. Sci. V. 49.)
- [5] G. P. Galdi. An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier–Stokes Equations. V. I, II. New York: Springer-Verlag, 1994. (Springer Tracts Natur. Philos. V. 38, 39.)
- [6] M. Wiegner. The Navier–Stokes equations – a neverending challenge? // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 1999. V. 101. № 1. P. 1–25.
- [7] О. А. Ладыженская. О разрешимости основных краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов // Докл. АН СССР. 1954. Т. 97. № 3. С. 395–398.
- [8] О. А. Ладыженская. О решении нестационарных операторных уравнений // Матем. сб. 1956. Т. 39. № 4. С. 491–524.
- [9] О. А. Ладыженская. О нестационарных операторных уравнениях и их приложениях к линейным задачам математической физики // Матем. сб. 1958. Т. 45. № 2. С. 123–158.
- [10₁] О. А. Ладыженская. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматгиз, 1961.
- [10₂] О. А. Ладыженская. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. 2-е изд. М.: Наука, 1970.
- [11] А. А. Киселев, О. А. Ладыженская. О существовании и единственности решений нестационарной задачи для вязкой несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1957. Т. 21. С. 655–680.
- [12] С. Л. Соболев. Об одной новой задаче для систем уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. 1951. Т. 81. № 6. С. 1007–1009.
- [13] H. Weyl. The method of orthogonal projection in potential theory // Duke Math. J. 1940. V. 7. P. 411–444.
- [14] О. А. Ладыженская. О методе Фурье для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1950. Т. 75. № 6. С. 765–768.
- [15] О. А. Ладыженская. О замыкании эллиптического оператора // Докл. АН СССР. 1951. Т. 79. № 5. С. 723–725.
- [16] F. K. G. Odquist. Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten // Math. Z. 1930. V. 32. P. 329–375.
- [17] В. А. Солонников. Об оценках тензоров Грина для некоторых краевых задач // Докл. АН СССР. 1960. Т. 130. № 5. С. 988–991.
- [18] L. Cattabriga. Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1961. V. 31. P. 308–340.

- [19] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II // *Comm. Pure Appl. Math.* 1964. V. 17. P. 35–92.
- [20] J. L. Lions. Équations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites. Berlin: Springer-Verlag, 1961. (Grundlehren Math. Wiss. V. 111.)
- [21] J. L. Lions. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Paris: Dunod / Gauthier-Villars, 1969.
- [22] R. Temam. On the Theory and Numerical Analysis of the Navier–Stokes Equations. College Park: Univ. of Maryland, 1973. (Lecture Note. V. 9.)
- [23] R. Temam. Navier–Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis. Amsterdam: North-Holland, 1977. (Stud. Math. Appl. V. 2.)
- [24] Л. В. Бабин, М. И. Вишик. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
- [25] О. А. Ладыженская. Стационарная краевая задача для вязкой несжимаемой жидкости // *УМН.* 1958. Т. 13. № 4. С. 219–220.
- [26] О. А. Ладыженская. Исследование уравнения Навье–Стокса в случае стационарного движения несжимаемой жидкости // *УМН.* 1959. Т. 14. № 3. С. 75–97.
- [27] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников. О некоторых задачах векторного анализа и обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье–Стокса // *Зап. научн. семин. ЛОМИ.* 1976. Т. 59. С. 81–116.
- [28] О. А. Ладыженская. О единственности и гладкости обобщенных решений уравнений Навье–Стокса // *Зап. научн. семин. ЛОМИ.* 1967. Т. 5. С. 169–185.
- [29] О. А. Ладыженская. Об интегральных оценках, скорости сходимости приближенных методов и решениях в функционалах для линейных эллиптических операторов // *Вестник Ленингр. ун-та.* 1958. № 7. С. 60–69.
- [30] G. P. Galdi. An introduction to the Navier–Stokes initial-boundary value problem // *Fundamental Directions in Mathematical Fluid Mechanics* / ed. G. P. Galdi et al. Basel: Birkhäuser, 2000. P. 1–70.
- [31] M. Oseen. *Hydrodynamik.* Leipzig, 1927.
- [32] J. Leray. Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique // *J. Math. Pures Appl.* (9). 1933. V. 12. P. 1–82.
- [33] J. Leray. Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois // *J. Math. Pures Appl.* (9). 1934. V. 13. P. 331–418.
- [34] J. Leray. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace // *Acta Math.* 1934. V. 63. P. 193–248.
- [35] J. Nečas, M. Ružička, V. Šverák. On Leray's self-similar solutions of the Navier–Stokes equations // *Acta Math.* 1996. V. 176. № 2. P. 283–294.
- [36] E. Hopf. Über die Anfangswertaufgabe für die Hydrodynamischen Grundgleichungen // *Math. Nachr.* 1951. V. 4. P. 213–231.
- [37] О. А. Ладыженская. Пример неединственности в классе слабых решений Хопфа для уравнений Навье–Стокса // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1969. Т. 33. № 1. С. 240–247.
- [38] О. А. Ладыженская. Решение “в целом” краевой задачи для уравнений Навье–Стокса в случае двух пространственных переменных // *Докл. АН СССР.* 1958. Т. 123. № 3. С. 427–429.
- [39] O. A. Ladyzhenskaya. Solution “in the large” of the nonstationary boundary value problem for the Navier–Stokes system with two space variables // *Comm. Pure Appl. Math.* 1959. V. 12. № 3. P. 427–433.
- [40] E. Gagliardo. Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili // *Ricerche Mat.* 1958. V. 7. № 1. P. 102–137.
- [41] G. Prodi. Un teorema di unicità per le equazioni di Navier–Stokes // *Ann. Mat. Pura Appl.* (4). 1959. V. 48. P. 173–182.
- [42] J. L. Lions. Sur l'existence de solutions des équations de Navier–Stokes // *C. R. Acad. Sci. Paris.* 1959. V. 248. P. 2847–2849.
- [43] J. L. Lions, G. Prodi. Un théorème d'existence et unicité dans les équations de Navier–Stokes en dimension 2 // *C. R. Acad. Sci. Paris.* 1959. V. 248. P. 3519–3521.

- [44] G. Prodi. Qualche risultato riguardo alle equazioni di Navier–Stokes nel caso bidimensionale // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1960. V. 30. P. 1–15.
- [45] J. L. Lions. Sur la régularité et l'unicité des solutions turbulentes des équations de Navier–Stokes // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1960. V. 30. P. 16–23.
- [46] H. Kozono. Well-posedness of the Navier–Stokes equations // EVEQ 2000, Prague, July 3–7, 2000. Part I. P. 1–27; Part II. P. 1–23.
- [47] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
- [48] Л. Ескауриаза, Г. Серёгин, В. Шверак. $L^{3,\infty}$ -решения уравнений Навье–Стокса и единственность для обратной задачи // УМН. 2003. Т. 58. №2. С. 3–44.
- [49] J. Serrin. The initial value problem for the Navier–Stokes equations // Nonlinear Problems / ed. R. E. Langer. Madison: Univ. of Wisconsin Press, 1963. P. 69–98.
- [50] О. А. Ладыженская (ред.). Математические вопросы гидродинамики и магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости. Сб. работ. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1960. (Труды МИАН. Т. 59.)
- [51] О. А. Ладыженская (ред.). Краевые задачи математической физики. 1, 2. Сб. работ. М.–Л.: Наука, 1964. (Труды МИАН. Т. 70, 73.)
- [52] H. Fujita, T. Kato. On the Navier–Stokes initial value problem. I // Arch. Ration. Mech. Anal. 1964. V. 16. P. 269–315.
- [53] О. А. Ладыженская. О некоторых нелинейных задачах теории сплошных сред // Тезисы докладов по приглашению на Международном конгрессе математиков (Москва, 1966). С. 149; // Труды Международного конгресса математиков (Москва, 1966). М.: Мир, 1968. С. 560–573.
- [54] О. А. Ладыженская. Об однозначной разрешимости в целом трехмерной задачи Коши для уравнений Навье–Стокса при наличии осевой симметрии // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1968. Т. 7. С. 155–177.
- [55] М. Р. Уховский, В. И. Юдович. Асимметричные течения идеальной и вязкой жидкости, заполняющей все пространство // Прикл. матем. мех. 1968. Т. 32. С. 59–69.
- [56] С. Г. Михлин. Интеграл Фурье и кратные сингулярные интегралы // Вестник Ленингр. гос. ун-та, сер. матем., мех. и астр. 1957. Т. 7. С. 143–155.
- [57] O. Ladyzhenskaya. On multipliers in Hölder spaces with nonhomogeneous metric // Methods Appl. Anal. 2000. V. 7. №3. P. 465–472.
- [58] В. А. Солонников. Об оценках решений нестационарной задачи Стокса в анизотропных пространствах С. Л. Соболева и об оценках резольвенты оператора Стокса // УМН. 2003. Т. 58. №2. С. 123–156.
- [59] А. С. Махалов, В. П. Николаенко. Глобальная разрешимость трехмерных уравнений Навье–Стокса с равномерно большой начальной завихренностью // УМН. 2003. Т. 58. №2. С. 111–122.